现代物理基础丛书 43

凝聚态、电磁学和引力中的多值场论

〔德〕 哈根·克莱纳特 著
姜 颖 译

科学出版社

现代物理基础丛书　43

凝聚态、电磁学和引力中的多值场论

〔德〕哈根·克莱纳特　著

姜　颖　译

科学出版社

北　京

图字：01-2012-4730

内 容 简 介

本书给出了多值场论的基本框架，并通过在不同领域的应用对此理论加以了详尽的阐述. 本理论的一个重要特性是它包含一个新的具有奇异性的规范场. 这个规范场为某个曲面上的 δ 函数，该曲面的形状是任意的，只有该曲面的边界具有物理意义，理论在曲面形变下的不变性可看作是一种新的规范对称性.

在本理论中多值映射起了十分重要的作用. 正是由此，我们可以从自由物质的物理定律推导出与规范场耦合的物质的物理定律以及带挠率的引力理论.

本书可作为研究人员、研究生学习掌握相变理论、量子场论、引力理论以及微分几何的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

凝聚态、电磁学和引力中的多值场论/(德)哈根·克莱纳特(Kleinert, H.)著；姜颖译. —北京：科学出版社, 2012

(现代物理基础丛书；43)

ISBN 978-7-03-035025-1

Ⅰ. ①凝…　Ⅱ. ①克…　②姜…　Ⅲ. ①场论　Ⅳ. ①O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 133351 号

责任编辑：钱　俊／责任校对：刘小梅
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第　一　版　开本: B5 (720 × 1000)
2012 年 6 月第一次印刷　印张: 32 3/4
字数: 633 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

译 者 的 话

同 Hagen Kleinert 教授从认识、合作到现在也有十二年了. 记得初次同 Kleinert 教授联系时我刚博士毕业不久，在中国科学院理论物理研究所做博士后，因为引力方面的一个问题我写 email 向他请教. 后来我有幸获得德国亚历山大 · 冯 · 洪堡基金会遴选资助，于 2001 年年底作为 "洪堡学者" 赴柏林自由大学同 Hagen Kleinert 教授开始了正式的合作研究. 我们当时的课题是关于晶体熔解相变方面的. 正是从那时起，在 Kleinert 教授的熏陶和鼓励下，我的科研兴趣转向了凝聚态理论方面.

Hagen Kleinert 教授学术功底异常深厚，毫不夸张地说，他是路径积分理论的集大成者，他的《量子力学、统计理论、聚合物物理学及金融市场中的路径积分》(*Path Integrals in Quantum mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*) 一书绝对是一部 "圣经级" 的专著. Kleinert 教授的研究涉猎极广，从粒子物理到引力理论，从凝聚态理论到金融物理学. 这种广博的研究经历使得 Kleinert 教授形成了独特的研究风格，并且极大地影响了他的学生和合作者，我也从中获益匪浅.

2010 年再度访问柏林时，Kleinert 教授给了我一本他出版不久的新书：*Multi-valued Field Theory*. 透过这本书的封皮，我感觉到了它的分量. 回来后，我细细翻看了此书. Kleinert 教授在本书中从一个全新的角度阐述了电磁规范理论. 这不仅仅是一种新的描述方式，更是一个全新理论框架的基础. 基于这一理论，在书中 Kleinert 教授详细地讨论了从超流到引力理论的诸多问题.

这一统一的美妙的理论框架深深地触动了我，于是萌生了想要将这本书翻译出版介绍给大家的想法. 我同 Kleinert 教授谈了我的想法，他欣然同意，并且将此书的中文版权无偿转让给了科学出版社. 于是，就有了现在这本译著.

在本书的出版过程中，得到了科学出版社钱俊先生的大力支持和无私的帮助，在此谨致诚挚谢意!

由于本书涵盖内容广泛，涉及物理学多个领域，翻译中的不妥之处在所难免，恳请指正.

姜　颖

2012 年 3 月 9 日于上海大学

序　　言

The modern physical developments
have required a mathematics
that continually shifts its foundations.
P.A.M. Dirac (1902~1984)

本书中所要阐述的理论主要有四个根源. 第一个根源是基于狄拉克在 1931 年所发表那篇意义深远的文章[1]. 在此文中狄拉克指出，麦克斯韦方程是可以与磁单极相容的，尽管磁场的散度为零，但归功于量子力学，我们总可以通过一根极细的磁通管将磁场从无穷远处导入到某点并使它呈现出来. 但也正是由于量子力学，这样的磁通管才可能做到物理不可测. 而只要**狄拉克电荷量子化条件**(Dirac charge quantization condition) 成立，上面所说的就没错. 这个著名的论断声明，所有的电荷都是整数倍的 $2\pi\hbar c/g$，其中 g 为从上述磁通管通过的总的磁通. 这个无法探测的磁通管称为**狄拉克弦**(Dirac string). 在狄拉克弦的末端，磁力线从该点沿径向方向四散开来，就像电力线从一个点电荷发出来那样，因此，狄拉克弦的末端就可当作是磁单极. 而这个无法探测的弦的形状就变得完全无关要紧，不过是个数学上的人为构造而已. 正是因为这个令人吃惊的发现，泡利给狄拉克起了一个外号，叫“独孤破仑”(Monopoleon，仿拿破仑的名字 Napoleon). 此狄拉克量子化条件随后被施温格 (Schwinger)[2] 进一步加以了改进，阐明电子自旋 $-1/2$ 波函数的双值性限制了这个整数倍只能是偶数. 然而，尽管人们多方努力，实验上却一直没有发现磁单极的存在，于是狄拉克理论在很长一段时间被束之高阁. 然而，在近 35 年，为了解释夸克禁闭现象，狄拉克理论才又重新得以重视.

本书的第二个根源则是基于超流相变. 这方面的重要贡献主要来自于 Berezinski[3]、Kosterlitz 以及Thouless[4]. 他们证明了液氦超流薄膜中的相变可以用超流中涡旋的统计力学来解释. 在此理论中，他们给每一个点上赋予了一个凝聚体波函数的相角，这个相角的取值范围为 $(0, 2\pi)$. 当环绕一个涡旋一周，这个角度会在某个地方有一个 2π 的跃变. 这个跃变线连接一对涡旋和反涡旋，就形成了类似“狄拉克弦”的结构，当然，它的具体形状是无关紧要的. 如果将此理论推广到三维液氦超流，也即本人在专著 [5] 中的工作，则我们就得到了涡旋环线的统计力学. 这些环线的长程相互作用形式同电流环间的相互作用是一样的.

本理论的第三个根源来自于一个完全不同的方向 —— 塑性形变理论，这一理

论是我们理解金属的加工硬化和材料疲劳的基础. 该理论是 1934 年[6] 在晶体中发现位错后发展起来的. 借助于场论技术，在本人的专著 [7] 中该理论已被发展成一个线缺陷的统计力学，在此书中，我用线状缺陷的凝聚解释了晶体中重要的熔解相变.

第四个根源是基于 Bilby 等[8]、Kondo[9] 以及 Kröner[10] 的工作，他们的工作显示出线状缺陷还可用几何量来描述. 晶体的弹性形变并不会改变缺陷的几何特性，因此同爱因斯坦坐标变换所起的作用是一样的. 带有缺陷的晶体会构成**黎曼–嘉当空间**的一种特殊的表示. 这种空间的理论最初是在 1922 年由嘉当创立的，他给弯曲的黎曼空间增加了另外一种几何性质：**挠率**[11]. 嘉当的工作促使爱因斯坦在具有绝对平行性的黎曼–嘉当时空中建立了一套引力理论[12].

20 年后，薛定谔尝试将挠率同电磁理论联系在一起[13]. 他注意到宇宙中挠率的存在会使光子获得质量从而限制了磁场从星球延伸出去的范围. 从他那个时代所观察到的数据，他定出了光子质量的上限，极端的微小[14].

又过了 20 年，Utiyama[15]、Sciama[16] 和 Kibble[17] 澄清了挠率和引力场自旋密度间的密切关系. 关于此方面的综述性文献，请参阅本人之前所写的书[7]. 关于这一课题的近况，Hammond 的论文[18] 中有概述.

我开始进入这一课题的研究是在 20 世纪 80 年代. 当时我已发展起了一套关于线状物的无序场论，这在我的著作 [5] 中有详细论述. 我关于这个理论的第一个应用是用它来处理了超流和超导中的涡旋线的问题，无序场的描述帮助我解决了一个长期困扰理论界的问题，即理论所预言的超导的二级相变最后被证明是一级的[19].

之后，我将无序场论用到了晶体中线状缺陷的研究上. 关于这些缺陷的原始描述是基于一些在曲面上不连续的函数，这些曲面的边界就是这些线状缺陷. 只要边界确定下来，这些曲面的形状可以是任意的. 我注意到这些曲面的形变可以看成是一种新的类型的规范场的规范变换，我称这个新的规范场为**缺陷规范场**.

利用所谓的**对偶变换**，我们就有可能将描述缺陷及其相互作用的理论改写为一种更加方便的规范理论. 这就会在描述上带来另一种任意性，我称其为**应力规范不变性**. 这个对偶描述又可看成是一个爱因斯坦–嘉当空间的线性化形式，这个爱因斯坦–嘉当空间中的规范变换是爱因斯坦局域平移变换和洛伦兹不变性局域推广的一种组合.

缺陷这个对偶理论和原始的基于跃变曲面的描述之间的关系其实完全类似于麦克斯韦磁理论的两种不同形式之间的关系，一种是以矢势规范场给出的描述，而在另一种形式中磁场由多值标量场的梯度给出.

上述进展正在进行时，场论专家也正在寻求用色电力线来对夸克禁闭现象给出一个简单的解释. 此时，超导物理就成为了一个重要的灵感的源泉. 自超导的伦

敦理论[20] 开始人们就知道，如果存在磁单极，超导会将它们禁闭. 原因就是**迈斯纳效应**，这一效应会将磁通排挤出超导体. 结果，由磁单极发出的磁力线会被挤压进一个具有固定粗细的磁通管且这个磁通管的能量正比于它的长度，因此带有相反磁荷的磁单极将会被永远地绑在一起. 由超导的 BCS 理论[21] 我们知道，这个效应是由电荷凝聚造成的，这个电荷凝聚就是著名的电荷的**库珀对**.

这一现象引出了目前普遍接受的关于夸克禁闭的解释. 人们设想宇宙的真空态是一个色磁单极的凝聚体. 同超导中库珀对作用于磁场而产生迈斯纳效应一样，这个色磁单极的凝聚作用于色电场上产生迈斯纳效应从而造成了色电荷的禁闭. 利用这一禁闭机制的模型是由 Nambu[22]、Mandelstam[23]、't Hooft[24] 以及 Polyakov[25] 发展起来的，相应的格点模型则是由 Wilson[26] 提出的.

在研究这一现象时，我注意到狄拉克磁单极同我上面提到的缺陷结构在数学上极其相似. 狄拉克用一个具有跃变曲面的矢势构造出了这些极细的在端点处接有点状磁源的磁通管. 因此，磁单极在时空中的世界线可以看作麦克斯韦场中的某种"涡旋线". 只要知道如何构造涡旋线系统的无序场论，我们就可以很容易地构造磁单极世界线的相应的无序场论，这个理论可以认为是现阶段关于夸克禁闭最简单的模型[27].

在拙著 [7] 的第二卷中，当把涡旋线的统计力学扩展至线缺陷系统时，我采用了线缺陷的对偶表述，并将之表示为黎曼–嘉当空间几何描述的一个线性近似. 这一结果给了我一个建设性的提示，其实可以将上面这个由多值场到几何描述的缺陷理论的推导倒过来，然后用它来重新构造引力理论. 传统上，引力理论是用几何来描述，而这里我们希望用一种不同的方法，即借助于平移场和转动场的跃变曲面来进行理论的构造. 在塑性理论中，这样的奇异变换通常用来将理想晶体映射到一个含有平移和转动缺陷的晶体上. 用几何的语言就是从平坦时空映射到了带有挠率的弯曲时空. 描述这个新的几何的数学基础就是**多值**标架场 $e^a{}_\mu(x)$.

在关于带自旋粒子引力理论的传统文献中，起特殊作用的是单值标架场 $h^\alpha{}_\mu(x)$. 它们定义了局域非完整坐标微分 $\mathrm{d}x^\alpha$. 这是由物理坐标微分 $\mathrm{d}x^\mu$ 通过变换 $\mathrm{d}x^\alpha = h^\alpha{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$ 而得到的. 这里，只有无穷小矢量 $\mathrm{d}x^\alpha$ 是有意义的，这个变换无法扩展到有限区域. 然而，对于自旋粒子的描述，这种扩展其实是不需要的，因为无穷小非完整坐标 $\mathrm{d}x^\alpha$ 已足以确定黎曼时空中自旋的变换特性.

本书中将要介绍的基于多值标架场的理论则向前跨出了重要的一步，并且使得我们对于非黎曼几何的描述极大地简化了. 关键的一点是我们有效地采用了一组全新的非完整坐标 $\mathrm{d}x^a$，它比原先传统上采用的 $\mathrm{d}x^\alpha$ 更加非完整. 为了强调这一点，我们可以将它们称作**超级非完整坐标**. 这组新的坐标同原先的 $\mathrm{d}x^\alpha$ 通过**多值**洛伦兹变换 $\mathrm{d}x^a = \Lambda^a{}_\alpha(x)\mathrm{d}x^\alpha$ 联系在一起，而与物理坐标 $\mathrm{d}x^\mu$ 的联系则是通过上述**多值** 标架 $\mathrm{d}x^a = e^a{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu \equiv \Lambda^a{}_\alpha(x)h^\alpha{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$. 梯度 $\partial_\mu e^a{}_\nu(x)$ 直接确定了完整的

仿射联络，而它们的反对称组合 $\partial_\mu e^a{}_\nu(x) - \partial_\nu e^a{}_\mu(x)$ 则给出了挠率. 这同通常的标架场 $h^\alpha{}_\mu(x)$ 的旋度是不同的，后者给出的是非完整量 (object of anholonomy)，这个量在纯黎曼时空 (无挠弯曲时空) 中也是存在的.

本书的一个目的就是希望研究电磁理论及引力物理的同行学者及学生们能够感受到多值标架场 $e^a{}_\mu(x)$ 带来的诸多便利和优势. 它不仅仅给出了以上关于黎曼–嘉当几何的一种直观的简单的重构，而且还提出了物理中的一个新的原理[28]，我称之为**多值映射原理**(multivalued mapping principle) 或**非完整映射原理** (nonholonomic mapping principle)，这会在本书中详加讨论. 多值映射使得我们可以将控制基本粒子行为的物理定律由平直时空映射到具有挠率和曲率的时空. 因此，很自然可以推断出这些定律映射后的结果也同样会正确地描述这些一般仿射时空中的物理规律. 这就使得我可以做出一些**预言**，而这些预言是无法在基于普通坐标变换下的协变性要求的爱因斯坦理论中做出的，因为后者无法给出不同几何之间的联系.

这里需要强调的是，利用多值坐标变换来重复所有这些引力理论中的几何计算并不是本书的目的. 事实上，我将会将大部分的讨论都集中在平坦辅助时空上. 这对于推导存在曲率和挠率时的物理定律的一般形式已足够. 最后，我们总归将回到通常的几何描述. 这个中间的带有缺陷的辅助时空就称作**宇宙晶体**.

读者将会很欣喜地看到，第 4.5 节中的电磁理论的标准最小耦合正是多值映射原理的一个简单结果. 而在第 17 章中，引力中类似的最小耦合也将从此原理加以推导而得.

最后，我们将讨论引力中的挠率场，即使存在也会十分隐秘，除非取特别的形式. 我们相信，在未来可见的日子里挠率都是无法探测到的，因为它只存在于质点周围极其小的邻域内，这个邻域的尺度差不多是普朗克长度 10^{-33} cm 的量级，目前还没有任何一种实验可以探测如此小的尺度.

综上所述，本书中所有关于有挠引力理论的推导在目前阶段来看就是一种单纯的理论上的努力. 它的主要价值就在于发展了研究黎曼–嘉当几何的多值映射方法，事实证明，在向初学者讲授引力物理的几何基础以及解释爱因斯坦理论中无挠假设丢掉了什么等方面，这个理论是相当有用的. 平行移动以及协变导数的定义很自然就是平直时空中平行移动和普通导数的非完整映射的像. 最小耦合规则也一样.

我们意识到，缺陷的多值描述其实在物理学的不同领域中是普适的，这很有价值. 当然，基于多值映射原理所做的预言还有待实验的检验.

作者由衷地感谢 F.W. Hehl 和 R. Rougemont 对本书细致地审阅. 感谢我的秘书 S. Endrias，她在完成本书稿 LATEX 文件方面给予我很大的帮助. 特别需要感谢的是我的妻子 Annemarie Kleinert 博士，感谢她所做出牺牲、无尽的耐心、持续

的鼓励以及对本书的严格的校阅.

H. Kleinert
柏林，2007 年 11 月

文献与注记

[1] P.A.M. Dirac, *Quantized Singularities in the Electromagnetic Field*, Proceedings of the Royal Society, A **133**, 60 (1931). 这可从以下网址进行查阅：`kl/files`，其中`kl` 为超链接`www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的缩写.

[2] J. Schwinger, Phys. Rev. **144**, 1087 (1966).

[3] V.L. Berezinski, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 907 (1970) [Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1971)].

[4] J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, J. Phys. C **5**, L124 (1972); J. Phys. C **6**, 1181 (1973); J.M. Kosterlitz, J. Phys. C **7**, 1046 (1974).

[5] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I, *Superflow and Vortex Lines*, World Scientific, Singapore, 1989, pp. 1–742 (`kl/re.html#b1`).

[6] E. Orowan, Z. Phys. **89**, 605, 634 (1934);
M. Polany, Z. Phys. **89**, 660 (1934);
G.I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A **145**, 362 (1934).

[7] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989, pp. 743-1456 (`kl/re.html#b2`).

[8] B.A. Bilby, R. Bullough, and E. Smith, *Continuous distributions of dislocations: A New Application of the Methods of Non-Riemannian Geometry*, Proc. Roy. Soc. London, A **231**, 263-273 (1955).

[9] K. Kondo, in *Proceedings of the II Japan National Congress on Applied Mechanics*, Tokyo, 1952, publ. in *RAAG Memoirs of the Unified Study of Basic Problems in Engeneering and Science by Means of Geometry*, Vol. 3, 148, ed. K. Kondo, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, 1962.

[10] E. Kröner, in *The Physics of Defects*, eds. R. Balian et al., North-Holland, Amsterdam, 1981, p. 264.

[11] E. Cartan, Comt. Rend. Acad. Science **174**, 593 (1922); Ann. Ec. Norm. Sup. **40**, 325 (1922); **42**, 17 (1922).

[12] E. Cartan and A. Einstein, *Letters of Absolute Parallelism*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
See Chapter 12 for more details.

[13] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A **49**, 135 (1943); **52**, 1 (1948); **54**, 79 (1951).

[14] 由所观测到的空间磁场的范围可以估算出 $m_\gamma < 10^{-27}\,\mathrm{eV}$，这大约对应于 $10^{-60}\,\mathrm{g}$，或是下述康普顿波长 $10^{17}\,\mathrm{km} \approx 3\,\mathrm{kpc}$. 实验室实验给出的上限弱很多，为 $m_\gamma < 3\times10^{-16}\,\mathrm{eV}$，

即 10^{-49} g，或对应的康普顿波长大约为 10^6 km (差不多为一个宇宙单位的 $\sim 1\%$). 历史上来讲，第一个精确的上限是通过探测同轴带电壳间的电场来加以测量的，见

E.R. Williams, J.E. Faller, and H.A. Hill, Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).

他们给出的上限为 $m_\gamma < 10^{-14}\,\mathrm{eV} \approx 2 \times 10^{-47}\,\mathrm{g} \times 6 \times 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{-1}$，下面这篇论文的结果则提高了两个数量级

D.D. Ryutov, Plasma Phys. Controlled Fusion A **39**, 73 (1997).

关于此最近的讨论请见

E. Adelberger, G. Dvali, and A. Gruzinov, Phys. Rev. Lett. **98**, 010402 (2007).

[15] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[16] D.W. Sciama, Rev. Mod. Phys. **36**, 463 (1964).

[17] T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[18] R.T. Hammond, Rep. Prog. Phys. **65**, 599 (2002).

[19] H. Kleinert, *Disorder Version of the Abelian Higgs Model and the Order of the Superconductive Phase Transition*, Lett. Nuovo Cimento **35**, 405 (1982) (`kl/97`).

[20] F. London and H. London, Proc. R. Soc. London, A **149**, 71 (1935); Physica A **2**, 341 (1935);

H. London, Proc. R. Soc. A **155**, 102 (1936);

F. London, *Superfluids*, Dover, New York, 1961.

[21] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957);

M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, New York, 1975.

[22] Y. Nambu, Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974).

[23] S. Mandelstam, Phys. Rep. C **23**, 245 (1976); Phys. Rev. D **19**, 2391 (1979).

[24] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974); and in *High Energy Physics*, ed. by A. Zichichi, Editrice Compositori, Bologna, 1976.

[25] A.M. Polyakov, JEPT Lett. **20**, 894 (1974).

[26] K.G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).

[27] H. Kleinert, *The Extra Gauge Symmetry of String Deformations in Electromagnetism with Charges and Dirac Monopoles*, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 4693 (1992) (`kl/203`); *Double-Gauge Invariance and Local Quantum Field Theory of Charges and Dirac Magnetic Monopoles*, Phys. Lett. B **246**, 127 (1990) (`kl/205`); *Abelian Double-Gauge Invariant Continuous Quantum Field Theory of Electric Charge Confinement*, Phys. Lett. B **293**, 168 (1992) (`kl/211`).

[28] H. Kleinert, *Quantum Equivalence Principle for Path Integrals in Spaces with Curvature and Torsion*, in Proceedings of the XXV International Symposium Ahrenshoop on *Theory of Elementary Particles* in Gosen/Germany 1991, ed. by H.J. Kaiser (quant-ph/9511020); *Quantum Equivalence Principle*, Lectures presented at the 1996 Cargèse Summer School on *Functional Integration: Basics and Applications* (quant-ph/9612040).

目　　录

第 1 章　基 础 知 识

Basic research is what I am doing
when I don't know what I am doing.
WERNHER VON BRAUN (1912～1977)

一本关于多值场论的专著首先必须要对经典力学和单值场理论中的一些基本概念进行回顾，这将在本书的前三章中予以完成. 对这部分内容已经十分熟悉的读者可以直接从第 4 章开始.

在关于理论力学的奠基性著作《原理》(*Principia*) 中，牛顿 (1642～1727) 假定了绝对时空的存在. 空间由矢量 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 来参数化，而点粒子在其中的运动由轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 来描述，轨迹的分量 $q^i(t)\,(i = 1, 2, 3)$ 则确定了粒子沿其轨迹随时间运动时的坐标 $x^i = q^i(t)$. 在牛顿的绝对时空中，一个自由粒子的运动是不带有任何加速度的. 数学上，这可由以下微分方程来表达：

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{x}(t) = 0, \tag{1.1}$$

其中，点表示对时间求导.

一组 N 个带有质量 m_n $(n = 1, \cdots, N)$ 的点粒子 $\boldsymbol{x}_n(t)$ 会受到万有引力的作用，这使得它们的运动方程变为

$$m_n \ddot{\boldsymbol{x}}_n(t) = G_{\mathrm{N}} \sum_{m \neq n} m_n m_m \frac{\boldsymbol{x}_m(t) - \boldsymbol{x}_n(t)}{|\boldsymbol{x}_m(t) - \boldsymbol{x}_n(t)|^3}, \tag{1.2}$$

其中，G_{N} 为牛顿万有引力常数

$$G_{\mathrm{N}} \approx 6.67259(85) \times 10^{-8} \mathrm{cm}^3/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^2). \tag{1.3}$$

1.1　牛顿力学的伽利略不变性

以上提到的绝对时空的参数化方案并不是唯一的，坐标的选择其实有很大的自由.

1.1.1　平移

坐标值 $\boldsymbol{x}$ 总可以通过下面给出的坐标平移而加以改变

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0. \tag{1.4}$$

很明显，平移后的轨迹 $\boldsymbol{x}'_n(t) = \boldsymbol{x}_n(t) - \boldsymbol{x}_0$ 同样满足运动方程 (1.2). 对于时间平移

$$t' = t - t_0, \tag{1.5}$$

这些方程同样是正确的，亦即，轨迹

$$\boldsymbol{x}'(t) \equiv \boldsymbol{x}(t + t_0) \tag{1.6}$$

满足方程 (1.2). 牛顿方程 (1.2) 的这种性质被称作时空中的**平移对称性**.

另一种对此不变性的等价的阐述则是保持坐标系不动，同时将物理系统在时空中做一个整体的移置，将所有的粒子移动到新的位置 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$ 和时间 $t' = t + t_0$. 在这种情况下，运动方程同样不变. 以上两种对同一物理体系的再参数化方案是等价的，第一种称为**被动对称变换**，第二种称为**主动对称变换**. 可以任选一个对体系的对称性进行讨论. 本书中，我们将根据实际情况选用主动式或者被动式变换进行讨论.

1.1.2 转动

对于更多的将不同方向坐标值进行线形组合的变换，运动方程同样是不变的. 例如，对于**转动**：

$$x'^i = R^i{}_j x^j, \tag{1.7}$$

其中，$R^i{}_j$ 是转动矩阵

$$R^i{}_j = \cos\theta\ \delta_{ij} + (1 - \cos\theta)\,\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j + \sin\theta\ \epsilon_{ijk}\hat{\theta}_k\,, \tag{1.8}$$

其中，$\hat{\theta}_i$ 表示转轴的单位**方向**矢量. 此矩阵满足**正交关系**

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = 1. \tag{1.9}$$

在方程 (1.7) 中，重复指标 j 意味着从 1 到 3 的求和，这就是所说的**爱因斯坦求和约定**，本书中将全部采用此种约定. 对于变换而言，转动同样可用于被动情形和主动情形.

主动式转动可通过改变 θ 的正负号从上面所讲的被动情形得到. 例如，绕 z 轴的具有转动矢量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (0, 0, 1)$ 的主动式转动可由如下正交矩阵给出：

$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

1.1.3　伽利略推进

下面一组更进一步的变换

$$x'^i = x^i - v^i t, \tag{1.11}$$

$$t' = t \tag{1.12}$$

则会将空间坐标和时间坐标混合在一起. 这称为**纯伽利略变换**或**伽利略推进**(Galilei boost). 坐标值 x'^i 和 t' 是从以速度 $\boldsymbol{v} \equiv (v^1, v^2, v^3)$ 匀速穿过绝对时空的参考系中观察到的粒子所处的位置和时间. 在主动性描述中, 变换 $x'^i = x^i + v^i t$ 确定了以速度 $\boldsymbol{v}$ 匀速掠过观察者的物理系统的坐标值.

1.1.4　伽利略群

将所有的这些变换结合起来

$$x'^i = R^i{}_j x^j - v^i t - x_0^i, \tag{1.13}$$

$$t' = t - t_0, \tag{1.14}$$

就构成了群. 群乘积可由接连执行相应变换来定义. 这样定义的乘积律很显然是具有结合性的, 并且每个群元素都有一个逆元. 这组变换式 (1.13) 和式 (1.14) 称作**伽利略群**.

所有在其中粒子的运动方程取式 (1.2) 简单形式的坐标系, 牛顿称之为**惯性系**.

1.2　麦克斯韦方程的洛伦兹不变性

当麦克斯韦 (1831～1879) 在 1864 年创立了他的电磁场理论后, 牛顿理论就出现问题了. 麦克斯韦关于真空中**电场** $\boldsymbol{E}(x)$ 和**磁通密度**或**磁感应强度** $\boldsymbol{B}(x)$ 的方程

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad (\text{库仑定律}), \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \qquad (\text{安培定律}), \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (\text{磁单极不存在}), \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\text{法拉第定律}), \tag{1.18}$$

可以进一步组合而得到二阶微分方程

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\right) \boldsymbol{E}\,(x,t) = 0, \tag{1.19}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2\right) \boldsymbol{B}\,(x,t) = 0. \tag{1.20}$$

这组方程中很明确地包含了光速

$$c \equiv 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}, \tag{1.21}$$

并且这组方程在伽利略群 (1.14) 的作用下并非不变. 事实上，这是与牛顿的绝对时空存在的假设相矛盾的. 如果光以速度 c 在绝对时空中传播，则它在其他相对于绝对时空以非零速度运动的惯性系中必不会如此. 因此，对光速的一个精确的测量就应该可以挑选出那个绝对的时空. 然而，所有的这方面的实验尝试均告失败. 迈克耳孙 (1852~1931) 和莫雷 (1838~1923) 在 1887 年所进行的实验显示，在 ± 5 km/s 的误差范围内，光沿着平行和垂直于地球运动轨道方向传播的速度是相同的[1, 2]. 这导致 Fitzgerald (1851~1901)[3]、洛伦兹 (1855~1928)[4]、庞加莱 (1854~1912)[5] 以及爱因斯坦 (1879~1955)[6] 等设想并认为牛顿关于绝对时空的假设是非物理的[7].

1.2.1 洛伦兹推进

上述矛盾可以通过对伽利略变换式 (1.11) 和式 (1.12) 进行修正以使麦克斯韦方程在其下也保持不变来解决. 这可由如下坐标变换来实现：

$$x'^i = x^i + (\gamma - 1)\frac{v^i v^j}{v^2}x^j - \gamma v^i t, \tag{1.22}$$

$$t' = \gamma t - \frac{1}{c^2}\gamma v^i x^i, \tag{1.23}$$

其中，γ 是一个依赖于速度的参量

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.24}$$

变换式 (1.22) 与式 (1.23) 被称为**纯洛伦兹变换** 或**洛伦兹推进**(Lorentz boost). 参数 γ 具有这样的效应：在以不同速度运动的参考系内，时间的流逝是不同的. 这对于保持光速在所有参考系中均相等是十分必要的.

将纯洛伦兹变换用四维矢量表示法写出来会比较方便. 引入**4-矢量** x^a(指标 a 取值 $0, 1, 2, 3$)，

$$x^a = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

我们可将式 (1.22) 和式 (1.23) 重新写为如下形式：

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b, \tag{1.26}$$

其中，$\Lambda^a{}_b$ 是如下 4×4- 矩阵：

$$\Lambda^a{}_b \equiv \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma v^i/c \\ \hline -\gamma v^i/c & \delta_{ij}+(\gamma-1)v_i v_j/v^2 \end{array}\right). \tag{1.27}$$

注意，对于重复指标 $a,b,c,\cdots=0,\cdots,3$，我们依然采用了爱因斯坦求和约定. 这个矩阵 $\Lambda^a{}_b$ 满足**赝正交关系** [请对照式 (1.9)]

$$\Lambda^{\mathrm{T}}{}_a{}^c\, g_{cd}\, \Lambda^d{}_b = g_{ab}, \tag{1.28}$$

其中，g_{ab} 是**闵可夫斯基度规**

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

由方程 (1.28) 可以给出这样的结果，即由闵可夫斯基度规定义的两个 4-矢量 x^a 和 y^a 的标量积

$$xy \equiv x^a g_{ab} y^b \tag{1.30}$$

在洛伦兹变换下是不变的.

为了验证方程 (1.28) 这一关系，我们引入一个被称作**快度**(rapidity) 的无量纲矢量 $\boldsymbol{\zeta}$，它指向速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向并且具有由下式决定的长度 $\zeta\equiv|\boldsymbol{\zeta}|$：

$$\cosh\zeta=\gamma, \quad \sinh\zeta=\gamma v/c. \tag{1.31}$$

我们同时定义三维空间的单位矢量

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} \equiv \boldsymbol{\zeta}/\zeta = \hat{\boldsymbol{v}} \equiv \boldsymbol{v}/v, \tag{1.32}$$

于是

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \operatorname{arctanh}\frac{v}{c}\,\hat{\boldsymbol{v}}. \tag{1.33}$$

这样一来，洛伦兹变换式 (1.27) 的矩阵 $\Lambda^a{}_b$ 就取如下形式：

$$\Lambda^a{}_b = B^a{}_b(\boldsymbol{\zeta}) \equiv \left(\begin{array}{c|ccc} \cosh\zeta & -\sinh\zeta\,\hat{\zeta}_1 & -\sinh\zeta\,\hat{\zeta}_2 & -\sinh\zeta\,\hat{\zeta}_3 \\ \hline -\sinh\zeta\,\hat{\zeta}_1 & & & \\ -\sinh\zeta\,\hat{\zeta}_2 & & \delta_{ij}+(\cosh\zeta-1)\,\hat{\zeta}_i\hat{\zeta}_j & \\ -\sinh\zeta\,\hat{\zeta}_3 & & & \end{array}\right). \tag{1.34}$$

符号 $B^a{}_b(\boldsymbol{\zeta})$ 强调此变换为推进. 赝正交性质 (1.28) 可由恒等式 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^2 = 1$ 和 $\cosh^2\zeta - \sinh^2\zeta = 1$ 直接导出.

对于物理系统的主动式变换，上述变换需要倒转过来. 例如，对于具有指向 z- 方向的快度 $\boldsymbol{\zeta} = \zeta(0,0,1)$ 的主动式推进，它的赝正交矩阵为

$$
\Lambda^a{}_b = B_3(\zeta) = \left(\begin{array}{c|ccc} \cosh\zeta & 0 & 0 & \sinh\zeta \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\zeta & 0 & 0 & \cosh\zeta \end{array}\right). \tag{1.35}
$$

1.2.2　洛伦兹群

式 (1.34) 中的洛伦兹推进可通过转动扩展并构成**洛伦兹群**. 在 4×4 - 矩阵表示中，转动矩阵 (1.8) 具有如下分块形式：

$$
\Lambda^a{}_b(R) = R^a{}_b \equiv \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R^i{}_j \\ 0 & \end{array}\right). \tag{1.36}
$$

很容易验证这些矩阵满足关系式 (1.28)，这里它变成了正交关系式 (1.9).

对于绕 z 轴并具有转动矢量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (0,0,1)$ 的主动式转动 (1.10)，其四维形式由如下正交矩阵给出：

$$
\Lambda^b{}_a = R_3(\varphi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{1.37}
$$

转动矩阵 (1.37) 和推进矩阵 (1.35) 的区别主要在于用三角函数取代了双曲函数. 同时，当考虑到度规 (1.29) 中的时间和空间部分取相反正负号，换位后会有一个正负号的转换.

当把所有可能的洛伦兹推进和转动依次结合的组合集合起来，就形成了一个群，称作**洛伦兹群**.

1.3　无穷小洛伦兹变换

连续群 —— 转动群和洛伦兹群 —— 的变换规律可以十分方便地用无穷小变换形式写出. 通过将许多无穷小变换依次组合起来的方式，我们总是可以从其中重

新构造出有限变换规律. 这一结论是基于如下事实：指数函数 e^x 总可以通过将许多小变量近似 $e^{\epsilon x} \approx 1 + \epsilon x$ 相乘而得到，即

$$e^x = \lim_{\epsilon \to 0} (1 + \epsilon x)^{1/\epsilon} . \tag{1.38}$$

1.3.1　群变换的生成元

我们现在来通过对主动式转动 (1.37) 的讨论来举例说明这一程序. 这个转动可以写为如下指数表达形式：

$$R_3(\varphi) = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi \right\} \equiv e^{-iL_3\varphi} . \tag{1.39}$$

矩阵

$$L_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

被称作洛伦兹群中该转动的**生成元**. 对于绕 x 轴和绕 y 轴的转动，有类似的生成元

$$L_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{1.41}$$

$$L_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.42}$$

以上三个生成元可以用一种紧凑的方式写为

$$L_i \equiv -i \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{\epsilon}_{ijk} \end{array} \right) , \tag{1.43}$$

其中，ϵ_{ijk} 是具有全反对称性的**列维 – 西维塔 (Levi-Civita) 张量**，并有 $\epsilon_{123} = 1$.

当为这三个生成元引入一个矢量表示法 $\boldsymbol{L} \equiv (L_1, L_2, L_2)$ 后，一般的纯转动矩阵 (1.36) 就可由如下指数形式表述：

$$\Lambda(R(\boldsymbol{\varphi})) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}}. \tag{1.44}$$

这是因为式 (1.36) 的空间分块中所有的 3×3- 正交矩阵都可写成 i 乘以一个反对称 3×3 矩阵的指数形式，并且这些矩阵都可写为以上生成元的线性组合 $\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}$.

现在，我们来找出主动式推进的生成元，首先是 z 方向的. 从方程 (1.35) 中我们看到推进矩阵可以写为如下指数形式：

$$\begin{aligned} B_3(\zeta) &= \exp\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\zeta\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}M_3\zeta}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

相应的生成元为

$$M_3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

类似地，我们可以找到 x 和 y 方向的生成元

$$M_1 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.47}$$

$$M_2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.48}$$

为此三个推进生成元引入矢量表示 $\boldsymbol{M} \equiv (M_1, M_2, M_2)$ 后，一般性的洛伦兹变换矩阵 (1.34) 就可写为下面的指数形式：

$$\Lambda(B(\boldsymbol{\zeta})) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{M}}. \tag{1.49}$$

对它的证明可比照对指数形式 (1.44) 的证明.

于是我们可以看到，洛伦兹群是由这六个矩阵 L_i 和 M_i 生成的，并且可以总的写为 $G_a(a=1,\cdots,6)$. 每个群元可以写为

$$\Lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{M})} \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_a G_a}. \tag{1.50}$$

对于确定洛伦兹群的生成元，存在一种洛伦兹协变的方式. 我们引入下列 4×4 矩阵：

$$(L^{ab})^{cd} = \mathrm{i}(g^{ac}g^{bd} - g^{ad}g^{bc}), \tag{1.51}$$

它们由一对反对称的指标 ab 来标识，即

$$L^{ab} = -L^{ba}. \tag{1.52}$$

存在六个相互独立的矩阵与上述转动和推进生成元相符：

$$L_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}L^{jk}, \quad M_i = L^{0i}. \tag{1.53}$$

利用式 (1.51) 中的生成元，我们可将式 (1.50) 中每个洛伦兹群的元素写为

$$\Lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}, \tag{1.54}$$

其中，反对称角量矩阵 $\omega_{ab}=-\omega_{ba}$ 集合了转动角度和快度

$$\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\varphi^k, \tag{1.55}$$

$$\omega_{0i} = \zeta^i. \tag{1.56}$$

综合以上所述，我们就对所有的洛伦兹变换建立了指数表示形式

$$\Lambda = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{M})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{1}{2}\varphi^i\epsilon_{ijk}L^{jk}+\zeta^iL^{0i})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{1}{2}\omega_{ij}L^{ij}+\omega_{0i}L^{0i})} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}. \tag{1.57}$$

注意，对于一个欧几里得度规

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.58}$$

上述表示形式将与基本矩阵理论相类似. 于是，方程 (1.28) 意味着 Λ 包含了所有四维实正交矩阵，这些正交矩阵都可写为 4×4 实反对称矩阵的指数形式. 对于那些与闵可夫斯基度规 (1.29) 相联系的满足式 (1.28) 的赝正交矩阵而言，只有 $\mathrm{i}L_i$ 是反对称的，而 $\mathrm{i}M_i$ 则是对称的.

1.3.2 群乘积和李代数

之所以要将群元表示成六个生成元的指数函数，是因为如此一来，就可将无穷多群元的**乘法规则**完全约化成这六个生成元 L_i 和 M_i 间的有限个**对易定则**的问题. 这正是以下 Baker-Campbell-Hausdorff**公式**的结果[8]：

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]-\frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]]+\cdots}. \tag{1.59}$$

根据这一公式，指数函数的乘积可以写为相应对易子的指数函数. 当采用方程 (1.53) 和方程 (1.57) 中这六个生成元的一般性表示 $G_r = (L_i, M_i)$ 后，两个群元的乘积可写为

$$\begin{aligned}\varLambda_1\varLambda_2 =& \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_r^1 G_r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_s^2 G_s}\\ =& \exp\Big\{-\mathrm{i}\alpha_r^1 G_r - \mathrm{i}\alpha_s^2 G_s + \frac{1}{2}[-\mathrm{i}\alpha_r^1 G_r, -\mathrm{i}\alpha_s^2 G_s]\\ &+\frac{1}{12}[-\mathrm{i}(\alpha_t^1-\alpha_t^2)G_t,[-\mathrm{i}\alpha_r^1 G_r, -\mathrm{i}\alpha_s^2 G_s]] + \cdots\Big\}.\end{aligned} \tag{1.60}$$

此表达式的指数部分只包含了 G_r 间的对易子. 对于洛伦兹群，这些可以从式 (1.40)~ 式 (1.42) 和式 (1.46)~ 式 (1.48) 中明确表示的 4×4 矩阵计算出来. 结果如下：

$$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}L_k, \tag{1.61}$$

$$[L_i, M_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}M_k, \tag{1.62}$$

$$[M_i, M_j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}L_k. \tag{1.63}$$

此生成元的代数被称作这个群的**李代数**. 在生成元的一般性表示 G_r 下，此代数写为

$$[G_r, G_s] = \mathrm{i}f_{rst}G_t. \tag{1.64}$$

线性独立的矩阵 G_r 的个数 (这里是 6) 称作该李代数的**秩**.

在任何李代数中，两个生成元的对易子总是生成元的线性组合. 系数 f_{abc} 称为**结构常数**. 它们对于指标 a, b, c 全反对称，并且满足如下关系：

$$f_{rsu}f_{utv} + f_{stu}f_{urv} + f_{tru}f_{usv} = 0. \tag{1.65}$$

这确保了生成元满足**雅可比恒等式**(Jacobi identity)

$$[[G_r, G_s], G_t] + [[G_s, G_t], G_r] + [[G_t, G_r], G_s] = 0, \tag{1.66}$$

而这又保证了当按照式 (1.60) 中的展开计算三个指数函数 $\varLambda_j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_r^j G_r}$ $(j = 1, 2, 3)$ 的乘积时，它们遵循结合律 $(\varLambda_1\varLambda_2)\varLambda_3 = \varLambda_1(\varLambda_2\varLambda_3)$.

利用 ϵ 张量所满足的恒等式

$$\epsilon_{ijl}\epsilon_{lkm}+\epsilon_{jkl}\epsilon_{lim}+\epsilon_{kil}\epsilon_{ljm}=0, \tag{1.67}$$

可以十分容易和精确地验证洛伦兹群的结构常数 (1.61)~(1.63) 是满足式 (1.65) 中的关系的. 雅可比恒等式意味着 r 个具有 $r\times r$ 个元素的矩阵

$$(F_r)_{st}\equiv -\mathrm{i}f_{rst} \tag{1.68}$$

满足对易关系式 (1.64). 它们正是李代数**伴随表示**的生成元. 式 (1.43) 中 L_i 的矩阵的空间分块正是这一类型.

利用伴随表象的矩阵 F_r ，对易关系还可写为

$$[G_r,G_s]=-(F_t)_{rs}G_t. \tag{1.69}$$

将式 (1.68) 中的生成元代入，我们就重新得到了关系式 (1.65).

运用以上对易关系继续将式 (1.60) 中的指数部分各项展开，则所有的对易子都可以依次计算出来，我们就最后得到如下表示式：

$$\Lambda_{12}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_r^{12}(\alpha^1,\alpha^2)G_r}, \tag{1.70}$$

其中，系数 α_r^{12} 完全由 α_r^1 和 α_r^2 决定. 这个结果只依赖于结构常数 f_{abc}，而与表示无关.

如果我们对式 (1.53) 中的 L_i 和 M_i 采用张量表示 L^{ab}，并且执行协变乘积以使乘积 $L^{ab}L^{cd}$ 具有形如 $(L^{ab})_{\sigma\tau}(L^{cd})^{\tau}{}_{\delta}$ 的矩阵元，则对易子式 (1.61)~ 式 (1.63) 可写为

$$[L^{ab},L^{cd}]=-\mathrm{i}(g^{ac}L^{bd}-g^{ad}L^{bc}+g^{bd}L^{ac}-g^{bc}L^{ad}). \tag{1.71}$$

由于指标 $a\leftrightarrow b$ 和 $c\leftrightarrow d$ 的反对易性，因此只要确定如下更为简单的对易子就足够了

$$[L^{ab},L^{ac}]=-\mathrm{i}g^{aa}L^{bc},\quad \text{不对 } a \text{ 求和}. \tag{1.72}$$

此式中所列对易子只是省略了式 (1.71) 中由于指标 ab 和指标 cd 完全不同而为零的那部分对易关系.

对于无穷小变换，矩阵 (1.54) 具有如下一般形式：

$$\Lambda\equiv 1-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}. \tag{1.73}$$

当把式 (1.51) 中的 4×4 生成元代入后，它们的矩阵元为

$$\Lambda^a{}_b=\delta^a{}_b+\omega^a{}_b,\quad \left(\Lambda^{-1}\right)^a{}_b=\delta^a{}_b-\omega^a{}_b, \tag{1.74}$$

其中，$\omega^a{}_b$ 和 $\omega_a{}^b$ 通过如下关系与反对称角量矩阵 ω_{ab} 相联系：

$$\omega^a{}_b=g^{aa'}\omega_{a'b},\quad \omega_a{}^b=g^{bb'}\omega_{ab'}. \tag{1.75}$$

1.4 矢量、张量和标量场

我们会经常性地考察各种 4-分量的物理量 v^a，它在洛伦兹变换下具有与坐标 x^a 相同的变换行为

$$v'^a = \Lambda^a{}_b v^b. \tag{1.76}$$

这种变换特性就定义出了**洛伦兹矢量**，或称为**4-矢量**. 除此之外，还有其他具有多个指标的量，如 t^{ab}、t^{abc}、$\cdots$，它们如同矢量的乘积一样变换

$$t'^{ab} = \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d t^{cd}, \quad t'^{abc} = \Lambda^a{}_d \Lambda^b{}_e \Lambda^c{}_f t^{def}, \cdots . \tag{1.77}$$

这就是二阶、三阶或者高阶**洛伦兹张量**的变换形式.

任意给定两个 4-矢量 u^a 和 v^a，我们可以如式 (1.30) 中一样定义它们的标量积

$$uv = u^a g_{ab} v^b. \tag{1.78}$$

很明显，由于赝正交关系 (1.28)，标量积在洛伦兹变换下是不变的.

如果 v^a、t^{ab}、t^{abc} 等是 x 的函数，则它们称为**矢量场和张量场**. 这些场关于 x 的导数同样遵循矢量和张量的变换规律. 实际上，由于

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b, \tag{1.79}$$

我们看到微商 $\partial/\partial x^b$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial x'^a} = \left(\Lambda^{\mathrm{T}-1}\right)_a{}^b \frac{\partial}{\partial x^b}, \tag{1.80}$$

即它通过洛伦兹矩阵 $\Lambda^a{}_b$ 转置矩阵的逆矩阵进行变换. 利用赝正交关系 (1.28)，有

$$\frac{\partial}{\partial x'^a} = \left(g\Lambda g^{-1}\right)_a{}^b \frac{\partial}{\partial x^b}. \tag{1.81}$$

可如下定义其矩阵元：

$$\Lambda_a{}^b \equiv \left(g\Lambda g^{-1}\right)_a{}^b = g_{ac}\, \Lambda^c{}_d\, g^{db}. \tag{1.82}$$

于是，我们可将式 (1.81) 改写为

$$\partial'_a = \Lambda_a{}^{b'} \partial_b. \tag{1.83}$$

一般来讲，任何一个具有 4-分量 v_a 的量，如果它具有与微商相同的变换行为，即

$$v'_a = \Lambda_a{}^b v_b \tag{1.84}$$

我们就称之为**协变** 4-矢量或洛伦兹矢量. 与之相反，矢量 v^a 如坐标 x^a 般变换，被称作**逆变** 矢量.

一个协变矢量 $\boldsymbol{v}_a$ 可以由一个逆变矢量 v^b 通过与度规张量相乘而构造

$$v_a = g_{ab} v^b. \tag{1.85}$$

这个操作被称为**降指标**. 这个操作可以反转过来，即我们所说的**升指标**

$$v^a = g^{ab} v_b, \tag{1.86}$$

其中，g^{ab} 为**逆度规**的矩阵元，即

$$g^{ab} \equiv \left(g^{-1}\right)^{ab}. \tag{1.87}$$

利用爱因斯坦求和规则，逆度规 $g^{ab} \equiv \left(g^{-1}\right)^{ab}$ 满足

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a{}_c. \tag{1.88}$$

相同的上指标和下指标的求和称为**缩并**.

可以看出，式 (1.82) 与指标升降规则是完全兼容的.

在闵可夫斯基时空中，度规 g 和 g^{-1} 恰巧是相同的，它们的矩阵元 g_{ab} 和 g^{ab} 也是相同的，都与式 (1.29) 相同. 但是，在具有一般几何结构的万有引力物理中，这点不再成立. 因此，对度规 g 和它的逆 g^{-1} 以及它们的矩阵元 g_{ab} 和 g^{ab} 保持其符号的区别，对于我们以后的讨论将是十分有益的.

当我们将式 (1.78) 中的矢量的标量积重新写为

$$uv = u^a g_{ab} v^b = u^a v_a = u_a v^a, \tag{1.89}$$

可以很明显地看出协变矢量和逆变矢量的缩并正是标量积. 当然，我们也可以利用逆度规 g^{-1} 来构造两个协变矢量的标量积

$$uv = u_a g^{ab} v_b. \tag{1.90}$$

利用式 (1.28) 中的赝正交性，我们可以很容易地验证其在洛伦兹变换 (1.84) 下的不变性：

$$u'_a g^{ab} v'_b = u'^{\mathrm{T}} g^{-1} v' = u^{\mathrm{T}} g^{-1} \Lambda^{\mathrm{T}} g\, g^{-1}\, g \Lambda g^{-1} v = u^{\mathrm{T}} g^{-1} v = u_a g^{ab} v_b. \tag{1.91}$$

由于 $\partial/\partial x^a$ 如协变矢量般变换，通过如下标记来强调这种行为会很有用：

$$\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{1.92}$$

将协变矢量的定义扩展开来，我们可以定义二阶、三阶以至高阶协变张量 t_{ab}、t_{abc} 等是满足如下变换的量：

$$t'_{ab} = \Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^d\, t_{cd}, \quad t'_{abc} = \Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^f \Lambda_c{}^g\, t_{efg}, \cdots . \tag{1.93}$$

我们总可以从逆、协变矢量和张量的乘积中通过合适的指标缩并而得到新的逆、协变量. 如果缩并后没有剩余指标，则我们得到一个不变量，称为**洛伦兹标量**.

对协变导数矢量引入逆变形式

$$\partial^a \equiv g^{ab} \partial_b, \tag{1.94}$$

并对逆变坐标矢量引入协变形式

$$x_a \equiv g_{ab} x^b, \tag{1.95}$$

这对后面的分析会很有帮助.

麦克斯韦方程 (1.20) 的不变性是这些缩并法则的一个直接结果，因为方程式左边的微分算子可以协变地写为

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial}{\partial x^a} g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^b} = \partial_a g^{ab} \partial_b = \partial^a \partial_a = \partial^2. \tag{1.96}$$

式 (1.96) 右边很显然是个洛伦兹标量.

1.4.1 离散洛伦兹变换

我们可以对洛伦兹群进行扩充以包含四个时空方向的反射变换

$$x^a \to -x^a, \tag{1.97}$$

而不破坏其定义 (1.28) 中的性质. 然而，$\boldsymbol{\Lambda}$ 的行列式会变成负的. 如果只有 x^0 被反转，这个反射变换被称为**时间反演**并被记为

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.98}$$

同时对三个空间方向作反射被称作**宇称变换** 并被记为一个 4×4 矩阵 $\boldsymbol{P}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.99}$$

当作了这些扩展后，整个洛伦群将无法从单位元的邻域通过无穷小变换的乘积形式得到，换句话说，即无法从李代数的指数函数 (1.57) 得到.

它包含四个拓扑不相交的区域，这些区域可以分别由无穷小变换的乘积乘以 1、P、T 和 PT 而得到. 群的这四个区域为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}P, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}T, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}PT. \tag{1.100}$$

与 P 和 T 相关的区域的洛伦兹变换 Λ 具有负的行列式. 这就给出了**赝张量**的定义：它们的变换同张量一样，但有一个额外的行列式因子 $\det\Lambda$. 具有这样性质的矢量也称为**轴矢量**. 三维中，角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$ 就是一个轴矢量，因为在空间反射变换下它不改变正负号，保持不变，并不像矢量 $\boldsymbol{x}$ 那样.

1.4.2 庞加莱群

就像伽利略变换那样，洛伦兹变换可以通过时空变换

$$x^a = x^a - a^a \tag{1.101}$$

扩展而形成**非齐次洛伦兹群** 或**庞加莱群**.

惯性系可以定义为那些在其中麦克斯韦方程有效的参考系. 它们之间通过如下庞加莱变换相互联系：

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^a - a^a. \tag{1.102}$$

1.5 洛伦兹变换的微分算子

四维时空中的物理规律可以用洛伦兹不变的场论来确切描述. 这些场取决于时空坐标 x^a. 为了执行洛伦兹群的变换，我们需要洛伦兹群生成元对应的微分算子.

对于具有小的转动角和快度的洛伦兹变换 Λ，我们可将指数函数形式的式 (1.57) 近似地表示为

$$\Lambda \equiv 1 - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}. \tag{1.103}$$

坐标的洛伦兹变换

$$x \xrightarrow{\Lambda} x' = \Lambda x \tag{1.104}$$

可以方便地由如下无穷小变换来表示：

$$\delta_\Lambda x = x' - x = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}x. \tag{1.105}$$

将式 (1.51) 中 4×4 矩阵生成元代入后，式 (1.105) 可更明确地写为 [同式 (1.74) 相比较]

$$\delta_\Lambda x^a = \omega^a{}_b x^b. \tag{1.106}$$

我们看到式 (1.105) 可用微分算子

$$\hat{L}^{ab} \equiv \mathrm{i}(x^a\partial^b - x^b\partial^a) = -\hat{L}^{ba} \tag{1.107}$$

来表示为一个对易子

$$\delta_\Lambda x = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}[\hat{L}^{ab}, x]. \tag{1.108}$$

微分算子 (1.107) 满足与洛伦兹群的 4×4 生成元 L^{ab} 相同的对易关系 (1.71) 和 (1.72). 它们构成了式 (1.71) 和式 (1.72) 中李代数的一个表示. 通过指数函数化，我们就可以构造出有限洛伦兹变换的算符表示

$$\hat{D}(\Lambda) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}, \tag{1.109}$$

它与 4×4 矩阵 Λ 满足同样的群乘积法则.

有限洛伦兹变换 (1.104) 和它的算符表示 (1.109) 之间的关系为

$$x' = \Lambda x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}} = \hat{D}^{-1}(\Lambda)\,x\,\hat{D}(\Lambda). \tag{1.110}$$

这可以通过利用**李展开公式**

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}}\,\hat{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} = 1 - \mathrm{i}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\mathrm{i}^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots\ , \tag{1.111}$$

将左边的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}}x$ 展成 ω_{ab} 的幂的形式并对右边的 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}$ 进行同样的处理而证明.

这个算符表示式 (1.109) 可以用来对任何函数的时空变量 x 进行洛伦兹变换：

$$f'(x) \equiv f(\Lambda^{-1}x) = f\left(\hat{D}(\Lambda)x\,\hat{D}^{-1}(\Lambda)\right) = \hat{D}(\Lambda)f\,(x)\,\hat{D}^{-1}(\Lambda). \tag{1.112}$$

最后一步可以从 $f(x)$ 的幂级数展开而得到. 举个例子，对于 $f(x)$ 的展开项 $f_{a,b}x^a x^b$，在变换后的函数 $f'(x)$ 中变为

$$f_{a,b}\hat{D}(\Lambda)x^a\,\hat{D}^{-1}(\Lambda)\hat{D}(\Lambda)x^b\hat{D}^{-1}(\Lambda) = \hat{D}(\Lambda)\left(f_{a,b}x^a x^b\right)\hat{D}^{-1}(\Lambda). \tag{1.113}$$

1.6　矢量和张量算子

在计算微分算子 $\hat{L}^{ab}$ 间的对易法则中，为方便起见，我们将利用 $\hat{L}^{ab}$ 与 x^c 和 $\hat{p}^c$ 间的对易关系：

$$[\hat{L}^{ab}, x^c] = -\mathrm{i}(g^{ac}x^b - g^{bc}x^a) = -(L^{ab})^c{}_d x^d, \tag{1.114}$$

$$[\hat{L}^{ab}, \hat{p}^c] = -\mathrm{i}(g^{ac}\hat{p}^b - g^{bc}\hat{p}^a) = -(L^{ab})^c{}_d \hat{p}^d. \tag{1.115}$$

同时这些对易关系也确定出 x^c 和 $\hat{p}^c$ 为**矢量算子**

一般来讲，如果一个算子 $\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}$ 的每一个张量指标在与 L^{ab} 的对易中都如式 (1.114) 与式 (1.115) 中 x^a 或 $\hat{p}^a$ 的指标般变化

$$\begin{aligned}[\hat{L}^{ab},\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}] &= -\mathrm{i}[(g^{ac_1}\hat{t}^{b,\cdots,c_n}-g^{bc_1}\hat{t}^{a,\cdots,c_n})+\cdots+(g^{ac_n}\hat{t}^{c_1,\cdots,b}-g^{bc_n}\hat{t}^{c_1,\cdots,a})] \\ &= -(L^{ab})^{c_1}{}_d\,\hat{t}^{dc_2,\cdots,c_n}-(L^{ab})^{c_2}{}_d\,\hat{t}^{c_1d,\cdots,c_n}-\cdots-(L^{ab})^{c_n}{}_d\,\hat{t}^{c_1c_2,\cdots,d}.\end{aligned} \tag{1.116}$$

则这个算子被认为是 n 阶**张量算子**. 生成元间的对易关系 (1.71) 意味着它们本身就是张量算符.

张量算子中最简单的例子就是矢量的直积，如 $\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}=x^{c_1}\cdots x^{c_n}$ 或者 $\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}=\hat{p}^{c_1}\cdots\hat{p}^{c_n}$. 事实上，对于这些直积来说，利用算子乘积间的对易关系

$$[\hat{a},\hat{b}\hat{c}]=[\hat{a},\hat{b}]\hat{c}+\hat{b}[\hat{a},\hat{c}],\quad [\hat{a}\hat{b},\hat{c}]=\hat{a}[\hat{b},\hat{c}]+[\hat{a},\hat{c}]\hat{b}, \tag{1.117}$$

就会得到右边的关系式. 这其实类似于导数运算中的**莱布尼茨链式法则**

$$\partial(fg)=(\partial f)g+f(\partial g). \tag{1.118}$$

1.7　有限洛伦兹变换下矢量和张量的行为

我们将上述有限算符表示 (1.109) 作用于矢量 x^c ，就构成了

$$\hat{D}(\varLambda)x^c\hat{D}^{-1}(\varLambda). \tag{1.119}$$

我们将对转动和洛伦兹变换分别采取如此措施.

1.7.1　转动

一个任意的 3-矢量 (x^1,x^2,x^3) 绕第 3 轴的转动可用由 $\hat{L}_3=-\mathrm{i}(x^1\partial_2-x^2\partial_1)$ 生成的算子 $\hat{D}(R_3(\varphi))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}$ 进行如下操作而得到

$$\hat{D}(R_3(\varphi))x^i\hat{D}^{-1}(R_3(\varphi))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}x^i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}. \tag{1.120}$$

由于 $\hat{L}_3$ 与 x^3 对易，此分量在式 (1.120) 中的操作下是不变的

$$\hat{D}(R_3(\varphi))x^3\hat{D}^{-1}(R_3(\varphi))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}=x^3. \tag{1.121}$$

对于 x^1 和 x^2，式 (1.119) 中的李展开包含如下对易子：

$$-\mathrm{i}[L_3,x^1]=x^2,\quad -\mathrm{i}[L_3,x^2]=-x^1. \tag{1.122}$$

于是，式 (1.120) 右边的一阶展开项将二维矢量 (x^1, x^2) 转换为 $(x^2, -x^1)$. 二阶项可以通过交换算子 $-\mathrm{i}\hat{L}_3$ 和 $(x^2, -x^1)$ 而得到，从而导致 $-(x^1, x^2)$. 到三阶，这再次转换为 $-(x^2, -x^1)$，如此等等. 很明显，所有的偶数阶的项将重现初始的二维矢量 (x^1, x^2) 并依次交替携带正负号，而所有的奇次幂项则正比于 $(x^2, -x^1)$. 于是，我们得到如下展开：

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}(x^1, x^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3} = &\left(1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \cdots\right)(x^1, x^2)\\ &+ \left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \cdots\right)(x^2, -x^1).\end{aligned} \tag{1.123}$$

偶次幂项和奇次幂项可以分别结合起来形成余弦函数和正弦函数，从而得到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}(x^1, x^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3} = \cos\varphi\ (x^1, x^2) + \sin\varphi\ (x^2, -x^1). \tag{1.124}$$

可以看出，式 (1.124) 右边表达式同式 (1.121) 中不变的 x^3 一起构成了一个矢量，这个矢量正是由 x^i 通过式 (1.37) 中的**反向**转动而得到. 于是

$$\hat{D}(R_3(\varphi))x^i\hat{D}^{-1}(R_3(\varphi)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3}x^i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\hat{L}_3} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi L_3}\right)^i{}_j x^j = R_3^{-1}(\varphi)^i{}_j x^j. \tag{1.125}$$

通过接连执行绕三个轴的旋转，我们可以以这样的方式构造出任何反向转动：

$$\hat{D}(R(\boldsymbol{\varphi}))x^i\hat{D}^{-1}(R(\boldsymbol{\varphi})) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}}x^i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}}\right)^i{}_j x^j = R^{-1}(\boldsymbol{\varphi})^i{}_j x^j. \tag{1.126}$$

这正是与对易关系

$$[\hat{L}_i, x_k] = x_j(L_i)_{jk}, \tag{1.127}$$

相联系的有限变换规则，而这也正赋予了 x^i 矢量算子的性质 [对比式 (1.114)]. 这样，对于任一矢量算子 $\hat{v}^i$，式 (1.126) 同样成立.

很明显，时间分量 x^0 在转动变换下是不变的，因为 $\hat{L}_3$ 与 x^0 是对易的. 因此，我们可以毫不费力地将式 (1.126) 推广到 4-矢量的情况，只需将 $\hat{D}(R(\boldsymbol{\varphi}))$ 用 $\hat{D}(\Lambda(R(\boldsymbol{\varphi})))$ [式 (1.44)] 来替代.

1.7.2 洛伦兹推进

对于洛伦兹推进可以进行类似的计算. 我们这里首先考虑第三方向上由 $\hat{M}_3 = \hat{L}^{03} = -\mathrm{i}(x^0\partial_3 + x^3\partial_0)$ [式 (1.57)、式 (1.53) 和式 (1.107)] 生成的推进 $B_3(\zeta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}$. 注意，生成元 $\hat{L}^{03}$ 中的两项具有相同的正负号是由于 $\partial_i = -\partial^i$ 而 $\partial_0 = \partial^0$. 这样，我们就得到

$$\hat{D}(B_3(\zeta))x^i\hat{D}^{-1}(B_3(\zeta)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}x^i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}. \tag{1.128}$$

右式中的李展开包含有对易子

$$-\mathrm{i}[M_3,x^0]=-x^3,\quad -\mathrm{i}[M_3,x^3]=-x^0,\quad -\mathrm{i}[M_3,x^1]=0,\quad -\mathrm{i}[M_3,x^2]=0. \tag{1.129}$$

从上面可以看出，2-矢量 (x^1,x^2) 是不变的, 但 2 矢量 (x^0,x^3) 会变换成 $-(x^3,x^0)$. 在展开的第二项，后者会变成 (x^0,x^3)，如此下去，就导致

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}(x^0,x^3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}=&\left(1+\frac{1}{2!}\zeta^2+\frac{1}{4!}\zeta^4+\cdots\right)(x^0,x^3)\\&-\left(\zeta+\frac{1}{3!}\zeta^3+\frac{1}{5!}\zeta^5+\cdots\right)(x^3,x^0).\end{aligned} \tag{1.130}$$

式 (1.130) 右边的求和正是双曲余弦函数和双曲正弦函数，于是有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}(x^0,x^3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}=\cosh\zeta\ (x^0,x^3)-\sinh\zeta\ (x^3,x^0). \tag{1.131}$$

同 (x^1,x^2) 的不变性一起，这恰恰对应于推进变换 (1.35) 的逆：

$$\hat{D}(B_3(\zeta))x^a\hat{D}^{-1}(B_3(\zeta))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}x^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta\hat{M}_3}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta M_3}\right)^a{}_b x^b=B_3^{-1}(\zeta)^a{}_b x^b. \tag{1.132}$$

1.7.3 洛伦兹群

通过接连执行各个不同方向上的转动和推进，我们就找出了所有的洛伦兹变换

$$\hat{D}(\varLambda)x^c\hat{D}^{-1}(\varLambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}x^c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}})^c{}_{c'}x^{c'}=(\varLambda^{-1})^c{}_{c'}x^{c'}, \tag{1.133}$$

其中，ω_{ab} 就是式 (1.55) 和式 (1.56) 中的参数. 式 (1.133) 右边最后一项中我们将 4×4 矩阵 $\varLambda$ 表示为其生成元的指数函数形式，用以强调生成元 L^{ab} 和它们的微分算子表示 $\hat{L}^{ab}$ 间的一一对应关系.

第一眼看上去，出现在方程两边各自的左手因子中的群变换相互为**逆** 似乎是件十分奇怪的事情. 然而，我们可以十分容易地说服自己这对于保证正确的群乘积律是十分必要的. 事实上，如果我们连续作两个变换：

$$\begin{aligned}\hat{D}(\varLambda_2\varLambda_1)x^c\hat{D}^{-1}(\varLambda_2\varLambda_1)&=\hat{D}(\varLambda_2)\hat{D}(\varLambda_1)x^c\hat{D}^{-1}(\varLambda_1)\hat{D}^{-1}(\varLambda_2)\\&=(\varLambda_1^{-1})^c{}_{c'}\hat{D}(\varLambda_2)x^{c'}\hat{D}^{-1}(\varLambda_2)=(\varLambda_1^{-1})^c{}_{c'}(\varLambda_2^{-1})^{c'}{}_{c''}x^{c''}\\&=[(\varLambda_2\varLambda_1)^{-1}]^c{}_{c'}x^{c'}.\end{aligned} \tag{1.134}$$

如果式 (1.133) 中右式所包含的不是 $\varLambda^{-1}$ 而是 $\varLambda$ 的话，则式 (1.134) 中右式内 $\varLambda_2\varLambda_1$ 中因子的顺序将于左式中 $\hat{D}(\varLambda_2\varLambda_1)$ 内的顺序相反.

通过对式 (1.133) 中的操作进行一个直接的推广就可得到对于张量 $\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n} = x^{c_1}\cdots x^{c_n}$ 的变换规律

$$
\begin{aligned}
\hat{D}(\Lambda)\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}\hat{D}^{-1}(\Lambda) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}\,\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}} \\
&= (\Lambda^{-1})^{c_1}{}_{c_1'}\cdots(\Lambda^{-1})^{c_n}{}_{c_n'}\hat{t}^{c_1',\cdots,c_n'} \\
&= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}})^{c_1}{}_{c_1'}\cdots(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}})^{c_n}{}_{c_n'}\hat{t}^{c_1',\cdots,c_n'}.
\end{aligned}
\tag{1.135}
$$

这可通过以下方法得到：在乘积 $x^{c_1}\cdots x^{c_n}$ 中相邻的两个因子间插入辅助单位因子 $1 = \hat{D}(\Lambda)\hat{D}^{-1}(\Lambda) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}$ 并对每一项进行如式 (1.135) 中的操作. 式 (1.135) 中最后一项可以写成

$$
\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}(L^{ab}\times 1\times 1\cdots\times 1\,+\,1\times L^{ab}\times 1\cdots\times 1\,+\,\cdots)}\right]^{c_1\cdots c_n}{}_{c_1'\cdots c_n'}\;t^{c_1'\cdots c_n'}.
\tag{1.136}
$$

由于对易关系 (1.116) 完全决定了上述结果，因此式 (1.135) 中的变换公式对于任何张量算符 $\hat{t}^{c_1,\cdots,c_n}$ 都是正确的，而不仅仅是对由矢量 x^{c_i} 的乘积组合而成的张量.

此结果可以十分容易地推广到指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$ 并进而推广到任何具有傅里叶表示的函数 $f(x)$

$$
\hat{D}(\Lambda)f(x)\hat{D}^{-1}(\Lambda) = f(\Lambda^{-1}x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}\,f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}.
\tag{1.137}
$$

由于最后一个微分算子没有作用对象，可以把它省略掉，式 (1.137) 也可以写为

$$
\hat{D}(\Lambda)f(x)\hat{D}^{-1}(\Lambda) = f(\Lambda^{-1}x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{L}^{ab}}\,f(x).
\tag{1.138}
$$

1.8　相对论性点粒子力学

麦克斯韦方程的洛伦兹不变性解释了观测到的光速在不同惯性系中的不变性. 然而，这与牛顿力学并不相容. 因此，对于牛顿定律需要有一个修正，它既满足洛伦兹不变性，同时又在描述低速宏观物体这种牛顿方程最初为之而建立的体系的运动时与原有牛顿力学差别甚微. 为此，我们首先引入庞加莱不变的时空距离测度

$$
\mathrm{d}s \equiv \sqrt{\mathrm{d}x^2} = \left(g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\right)^{1/2}.
\tag{1.139}
$$

在惯性系的一个固定的坐标点上，$\mathrm{d}s$ 等于 c 乘以所经历的时间

$$
\mathrm{d}s = \sqrt{g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0} = \mathrm{d}x^0 = c\mathrm{d}t.
\tag{1.140}
$$

爱因斯坦称

$$
\tau \equiv \frac{s}{c}
\tag{1.141}
$$

为**固有时**.

当从一个惯性系转到另一个惯性系后，在第一个惯性系中同时发生在两个**不同**地点的事件在第二个惯性系中将在**不同**的时间发生. 然而，由于赝正交关系 (1.28)，这两个事件间的不变距离在两个参考系中保持一样，即

$$\mathrm{d}s' = \left(g_{ab}\mathrm{d}x'^a\mathrm{d}x'^b\right)^{1/2} = \left(g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\right)^{1/2} = \mathrm{d}s. \tag{1.142}$$

在一个闵可夫斯基参考系中以匀速沿着轨迹 $\boldsymbol{x}(t)$ 运动的粒子在另外一个相对于第一个参考系以速度 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 运动的闵氏参考系中保持静止. 它的固有时则通过洛伦兹变换

$$c\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s = \sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2} = c\mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2} = c\mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} = \frac{c\mathrm{d}t}{\gamma} \tag{1.143}$$

与它在第一个参考系中的坐标时相联系. 这就是著名的爱因斯坦关系，意味着运动的粒子的寿命将延长为 γ 倍. 对于这一现象有直接的实验证据. 例如，π^+ 介子的平均寿命为 $\tau_\mathrm{a} = 2.60\times10^{-8}$ s，之后它将衰变为一个 μ 介子和一个中微子. 如果 π 介子被观察到在一个气泡室内以光速 $c \equiv 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ 的 10% 的速度运动的话，它的轨迹的长度平均为 $l \approx \tau_\mathrm{a}\times c\times 0.1/\sqrt{1-0.1^2} \approx 0.78\,\mathrm{cm}$. 然而，一个以 90% 光速极快地运动的 π 介子的轨迹的长度则是原来的 $(0.9/0.1)\times\sqrt{1-0.10^2}/\sqrt{1-0.9^2} \equiv$ 20.6 倍. 无质量的粒子以光速运动，并且有 $\mathrm{d}\tau = 0$，即沿着它们的轨迹固有时是静止不变的. 这意味着无质量粒子永远不会衰变，它们必须是稳定粒子.

另一个看到时间延迟的方法是观察运动的原子的谱线，比方说氢原子的谱线. 如果原子静止不动，则它的谱线频率为

$$\nu = -Ry\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{1.144}$$

其中, $Ry = m_e c^2\alpha^2/2 \approx 13.6$ eV, 是**里德伯常量** (Rydberg constant)

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx 1/137.035\,989 \tag{1.145}$$

是**精细结构常数** (fine-structure constant)，n 和 m 是初态和末态电子轨道的主量子数. 如果当原子在以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿垂直于观测方向的路径上运动的同时释放出一个光量子，则这个频率将**降低**为原来的 $1/\gamma$

$$\frac{\nu_\mathrm{obs}}{\nu} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1.146}$$

如果这个原子背离或朝向观测者运动的话，这个频率还要由于**多普勒频移**进一步修正. 由于距离的增加或减少，波列将以更小或者更高的频率到达

$$\frac{\nu_\mathrm{obs}}{\nu} = \left(1 \pm \frac{v}{c}\right)^{-1}\frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{1 \mp v/c}{1 \pm v/c}}. \tag{1.147}$$

在第一种情况，观察者看到了谱线附加的**红移**，而在第二种情况，则为**蓝移**.

在无外力的情况下，四维时空中自由粒子的运动轨迹是直线. 如果粒子的时空位置用固有时 τ 来参数化，则它们满足如下运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}x^a(\tau)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^a(\tau)=0. \tag{1.148}$$

$x^a(\tau)$ 的第一阶导数是**动量的相对论性 4-矢量** $p^a(\tau)$，简称为**4-动量**；

$$p^a(\tau)\equiv m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}x^a(\tau)\equiv m\,u^a(\tau). \tag{1.149}$$

在式 (1.149) 右边我们引进了**速度的相对论性 4-矢量** $u^a(\tau)$，或称为**4-速度**. 将式 (1.143) 代入式 (1.149)，我们确定出 $u^a(\tau)$ 的分量为

$$u^a=\begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma v^a\end{pmatrix}, \tag{1.150}$$

并且 $\boldsymbol{u}^a(\tau)$ 满足

$$u^a(\tau)u_a(\tau)=\boldsymbol{c}^2. \tag{1.151}$$

4-动量 (1.149) 的时间和空间分量是

$$p^0=m\gamma c=mu^0,\qquad p^i=m\gamma v^i=mu^i. \tag{1.152}$$

这表明时间膨胀因子 γ 等于 p^0/mc，并且对于非相对论性动量 mv^i，此因子提高了空间动量. 这一修正在粒子速度接近光速时变得尤为重要，这称为**相对论性**的. 光子的质量为 $m=0$，其速度为 $v=c$，它是终极相对论性的.

注意，由于式 (1.152)，式 (1.31) 中快度的双曲函数与 4-速度和能量以及动量有如下关系：

$$\cosh\zeta=u^0/c=p^0/mc,\qquad \sinh\zeta=|\boldsymbol{u}|/c=|\boldsymbol{p}|/mc. \tag{1.153}$$

在时空的洛伦兹变换下，4-动量 p^a 以与坐标 4-矢量 x^a 完全相同的方式变换. 这当然是由于式 (1.149) 中固有时 τ 的洛伦兹不变性. 事实上，从式 (1.152) 中我们可以导出如下重要关系：

$${p^0}^2-p^2=m^2c^2, \tag{1.154}$$

这个关系显示由闵氏度规构成的 4-动量的平方是不变的；

$$p^2\equiv p^ag_{ab}p^b=m^2c^2. \tag{1.155}$$

由于 x^a 和 p^a 都是洛伦兹矢量，它们的标量积

$$xp\equiv g_{ab}x^ap^b \tag{1.156}$$

是一个不变量. 在正则表述中，动量 p^i 为空间坐标 x^i 的共轭变量. 式 (1.156) 显示 cp^0 与 $x^0/c=t$ 共轭. 因此，它一定是粒子的能量

$$E = cp^0. \tag{1.157}$$

由式 (1.154)，我们可以得出相对论性粒子能量与动量的函数关系

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{1.158}$$

对于低速情形，式 (1.158) 可以展开为

$$E = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \cdots . \tag{1.159}$$

第一项给出了不为零的**静止能量**，它在非相对论物理中是观测不到的. 第二项正是牛顿力学的动能.

第一项有着极强的观测效应. 粒子可在碰撞过程中产生或消失. 在后一种情况中，它们的静止能量 mc^2 可转化为其他粒子的动能. 这个大因子 c 使得不稳定的粒子成为巨大能量的源泉，并且已在 1945 年造成了广岛和长崎的灾难性后果.

1.9 量 子 力 学

在量子力学中，具有动量 p 的无自旋自由粒子由如下形式的平面波描述：

$$\phi_p(x) = \mathcal{N}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}, \tag{1.160}$$

其中, $\mathcal{N}$ 是个归一化因子. 动量分量是下列微分算子的本征值：

$$\hat{p}_a = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x^a}, \tag{1.161}$$

它们与 x^b 满足如下对易关系：

$$[\hat{p}_a, x^b] = \mathrm{i}\hbar\delta_a{}^b. \tag{1.162}$$

由这些，生成元 (1.107) 可以重新写为

$$\hat{L}^{ab} \equiv \frac{1}{\hbar}(x^a\hat{p}^b - x^b\hat{p}^a). \tag{1.163}$$

除 $1/\hbar$ 之外，这正是四维角动量的张量形式.

很值得注意的是，这个微分算子 (1.163) 还可表示成 4×4 矩阵生成元 (1.51) 夹在 x^c 和 $\hat{p}^d$ 之间像三明治那样的形式

$$\hat{L}^{ab} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(L^{ab})_{cd}x^c\hat{p}^d = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}x^{\mathrm{T}}L^{ab}\hat{p} = \mathrm{i}\hat{p}^{\mathrm{T}}L^{ab}x. \tag{1.164}$$

这种构造 4×4 李代数 (1.71) 的算子表示的方法是关于定义矩阵表示的更高级表述的一般构造技术的一个特别的应用. 事实上，二次量子化程序正是基于这样的构造，它将单粒子薛定谔算子扩展到了多粒子态的福克空间.

一般来讲，我们总可以引入满足对易关系

$$[\hat{a}^c, \hat{a}^d] = [\hat{a}_c^\dagger, \hat{a}_d^\dagger] = 0; \quad [\hat{a}^c, \hat{a}_d^\dagger] = \delta^c{}_d \tag{1.165}$$

的矢量形式的产生、消灭算子 $\hat{a}_c^\dagger$ 和 $\hat{a}^d$ 并构造三明治式的算子

$$\hat{L}^{ab} = \hat{a}_c^\dagger (L^{ab})^c{}_d \hat{a}^d. \tag{1.166}$$

由于莱布尼茨链式规则 (1.117)，这些算子满足与三明治化矩阵相同的对易关系. 由于 $-\mathrm{i}\hat{p}_a/\hbar$ 和 x^a 如 $\hat{a}$ 与 $\hat{a}^\dagger$ 般对易，于是，矩阵的对易规则可直接用于三明治算子 (1.164). 由此而生成的更高级表示则处于平方可积函数的希尔伯特空间中.

在洛伦兹变换下，由波函数 (1.160) 描述的粒子的动量转化为 $p' = \varLambda p$，则相应的波函数将作如下转换：

$$\phi_p(x) \xrightarrow{\varLambda} \phi'_p(x) \equiv \phi_{p'}(x) = \mathcal{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varLambda p)x} = \mathcal{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\varLambda^{-1}x} = \phi_p(\varLambda^{-1}x). \tag{1.167}$$

这也可以写为 $\phi'_{p'}(x') = \phi_p(x)$. 这些波的一个任意的叠加则变换如下：

$$\phi(x) \xrightarrow{\varLambda} \phi'(x) = \phi(\varLambda^{-1}x), \tag{1.168}$$

这个式子正是**标量场**的定义关系式.

式 (1.168) 中的变换也可以用式 (1.138) 中的洛伦兹群的微分算子表示来生成，即

$$\phi(x) \xrightarrow{\varLambda} \phi'(x) = \hat{D}(\varLambda)\phi(x). \tag{1.169}$$

1.10　电磁场中的相对论性粒子

洛伦兹和爱因斯坦所系统发展的描述具有电磁相互作用的相对论性有质量粒子的理论被称为是**麦克斯韦–洛伦兹理论**. 这一理论在庞加莱群下是不变的，并且它可用来描述带电粒子 (如电子) 以非相对论或相对论速度运动时的动力学特性.

电磁场中一个质量为 m 电荷为 e 的粒子的运动行为由**洛伦兹方程**来支配

$$\frac{\mathrm{d}p^a(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = m\frac{\mathrm{d}^2x^a(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} = f^a(\tau), \tag{1.170}$$

其中, f^a 为与**洛伦兹力**相关联的 4-矢量

$$f^a = \frac{e}{c}F^a{}_b\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{mc}F^a{}_b(x(\tau))\,p^b(\tau), \tag{1.171}$$

$F^a{}_b(x)$ 是一个电场和磁场的 4×4 组合，其分量为

$$F^i{}_j = \epsilon^{ijk} B^k, \quad F^0{}_i = E^i. \tag{1.172}$$

将 $F^a{}_b$ 的第二个指标升起来后，我们就得到张量

$$F^{ac} = g^{cb} F^a{}_b, \tag{1.173}$$

此张量与六个电磁场分量所组成的反对称矩阵

$$F^{ab} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ \hline E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{array}\right) \tag{1.174}$$

相关联. 这种张量记法十分重要，因为在洛伦兹群下，F^{ab} 与乘积 $x^a x^b$ 以相同的方式变换，后者变换为 $x'^a x'^b = \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \, x^c x^d$. 在 $F^{ab}(x)$ 中，当进行变换时，自变量也必须同时作如式 (1.168) 中所示的标量场般的变换，这样，我们就得到**张量场**的一般性的变换行为

$$F^{ab}(x) \xrightarrow{\Lambda} F'^{ab}(x) = \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \, F^{cd}(\Lambda^{-1} x). \tag{1.175}$$

回想一下式 (1.136) 中洛伦兹变换直积的指数表示形式以及式 (1.138) 中自变量 x 变换的微分算符表示，式 (1.175) 可以进一步写为

$$F^{ab}(x) \xrightarrow{\Lambda} F'^{ab}(x) = [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{J}^{ab}} \, F]^{ab}(\Lambda^{-1} x), \tag{1.176}$$

其中

$$\hat{J}^{cd} \equiv L^{cd} \times 1 + 1 \times L^{cd} \tag{1.177}$$

是该矢量场 4 维总角动量的生成元. 直积中的因子依次作用于和两个洛伦兹指标关联的表示空间以及时空坐标上. 生成元 $\hat{J}^{ab}$ 遵循与 L_{ab} 和 $\hat{L}_{ab}$ 相同的对易关系式 (1.71) 和式 (1.72).

为了验证式 (1.175) 中的变换律，我们首先来回顾一下电磁学中的基本结果：当变换到一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 移动的坐标系 $x \to x' = \Lambda x$ 中后，电场和磁场变为

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel}(x') = \boldsymbol{E}_{\parallel}(x), \quad \boldsymbol{E}'_{\perp}(x') = \gamma \left[\boldsymbol{E}_{\perp}(x) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(x)\right], \tag{1.178}$$

$$\boldsymbol{B}'_{\parallel}(x') = \boldsymbol{B}_{\parallel}(x), \quad \boldsymbol{B}'_{\perp}(x') = \gamma \left[\boldsymbol{B}_{\perp}(x) - \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}(x)\right], \tag{1.179}$$

其中, 角标 $\|$ 和 $\perp$ 分别表示平行于和垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的分量. 回想矩阵 (1.27)，我们看到式 (1.178) 和式 (1.179) 恰好对应于张量场的变换律 (1.175).

运动方程 (1.170) 内电磁力中的场张量相应变换为

$$F^a{}_b(x(\tau)) \xrightarrow{\Lambda} F'^a{}_b(x(\tau)) = \Lambda^a{}_c \Lambda^{\mathrm{T}}{}_b{}^d F'^c{}_d(\Lambda^{-1}x(\tau)). \tag{1.180}$$

这可以通过将 $F^a{}_b(x(\tau))$ 重新写为

$$F^a{}_b(x(\tau)) = \int \mathrm{d}^4x \, F^a{}_b(x) \, \delta^{(4)}(x - x(\tau)), \tag{1.181}$$

并运用式 (1.175) 中的变换得以验证.

将式 (1.171) 中的洛伦兹力的 4-矢量的时间和空间分量进行分离，我们发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^0 = f^0 = \frac{e}{Mc}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{1.182}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} = \frac{e}{Mc}\left(\boldsymbol{E}\,p^0 + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}\right). \tag{1.183}$$

洛伦兹力也可以用速度矢量来描写

$$f^a = \frac{e}{c}F^a{}_b\frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\begin{pmatrix} \dfrac{e}{c}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} \\ e\boldsymbol{E}^i + \dfrac{1}{c}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})^i \end{pmatrix}. \tag{1.184}$$

应当指出的是，如果我们不用固有时 τ 而是用坐标时间 $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau$ 去描述粒子轨道的话，则运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}f^a, \tag{1.185}$$

这使得加速度由洛伦兹力的 3-矢量

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{em}} = e\left[\boldsymbol{E}(x) + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\boldsymbol{B}(x)\right] \tag{1.186}$$

来决定.

以上这些方程支配着带电点粒子在给定外场中的运动行为. 然而，运动的粒子也会产生出附加的电磁场. 这可以通过求解如下包含电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的**麦克斯韦方程**而计算出来：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho \qquad \text{(库仑定律)}, \tag{1.187}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \qquad \text{(安培定律)}, \tag{1.188}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(磁单极缺失)}, \tag{1.189}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(法拉第定律)}. \tag{1.190}$$

在一个介电常数为 ϵ 磁导率为 μ 的介电顺磁介质中，我们可用以下关系分别定义电位移矢量场 $\boldsymbol{D}(x)$ 和磁场 $\boldsymbol{H}(x)$：

$$\boldsymbol{D}(x)=\epsilon\boldsymbol{E}(x),\qquad \boldsymbol{H}(x)=\frac{\boldsymbol{B}(x)}{\mu}, \tag{1.191}$$

则麦克斯韦方程变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} &= \rho \qquad \text{(库仑定律)}, &(1.192)\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} &= \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \qquad \text{(安培定律)}, &(1.193)\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \qquad \text{(磁单极缺失)}, &(1.194)\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \qquad \text{(法拉第定律)}. &(1.195)\end{aligned}$$

在方程 (1.187)、方程 (1.188)、方程 (1.192) 和方程 (1.193) 的右边，为方便起见，我们省略了因子 4π. 这使得电子电荷等于 $-e=-\sqrt{4\pi\alpha\hbar c}$.

真空中，方程 (1.187) 和方程 (1.188) 这两个非齐次麦克斯韦方程可以合并成一个方程

$$\partial_b F^{ab}=-\frac{1}{c}j^a, \tag{1.196}$$

其中, j^a 为**电流密度 4-矢量**

$$j^a(x)=\begin{pmatrix} c\rho(\boldsymbol{x},t)\\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}. \tag{1.197}$$

实际上，式 (1.196) 中的第零分量就等同于式 (1.187)：

$$\partial_i F^{0i}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=-\rho, \tag{1.198}$$

而其指标为 $a=i$ 的空间分量则退化为方程 (1.188)：

$$\partial_0 F^{i0}+\partial_j F^{ij}=\partial_j\epsilon^{ijk}B^k+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^i=-\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}\right)^i+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^i=-\frac{1}{c}j^i. \tag{1.199}$$

剩下的齐次麦克斯韦方程 (1.189) 和方程 (1.190) 也可以重新组合成以下张量形式：

$$\partial_b\tilde{F}^{ab}=0. \tag{1.200}$$

这里 $\tilde{F}^{ab}$ 被称为**对偶场张量**，它由下式定义：

$$\tilde{F}^{ab}=\frac{1}{2}\epsilon^{abcd}F_{cd}, \tag{1.201}$$

其中，ϵ^{abcd} 为单位全反对称张量，$\epsilon^{0123}=1$. 它的计算特性见附录 1A.

式 (1.196) 中 F^{ab} 的反对称性意味着电流密度的 4 散度为零

$$\partial_a j^a(x)=0. \tag{1.202}$$

这正是电荷的**定域守恒律**的四维表述. 如写成空间和时间分量形式，则为

$$\partial_t\rho(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{1.203}$$

此式在给定区域上的积分给出

$$\partial_t\left[\int \mathrm{d}^3x\,\rho(\boldsymbol{x},t)\right]=-\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{1.204}$$

式 (1.204) 右边为零. 这是因为根据高斯散度定理，一个流密度的散度的体积分等于穿过此区域边界的通量的面积分. 如果该电流不跑出这个空间区域的话，则此积分便为零. 而对于一个无限大体系而言，这通常是正确的. 于是，我们便发现，作为定域守恒律 (1.202) 的一个结果，体系的总电荷

$$Q(t)\equiv\int \mathrm{d}^3\,\rho(\boldsymbol{x},t)\equiv\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3x\,j^0(x) \tag{1.205}$$

满足**整体守恒律**，体系的总电荷是不随时间而变化的

$$Q(t)\equiv Q. \tag{1.206}$$

对于一组电荷分别为 e_n 的点粒子，相应的电荷密度和电流密度为

$$\rho(x,t)=\sum_n e_n\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)\right), \tag{1.207}$$

$$\boldsymbol{j}(x,t)=\sum_n e_n\dot{\boldsymbol{x}}_n(t)\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(t)\right). \tag{1.208}$$

将此表达式与流密度 4-矢量 (1.197) 相结合，我们可以很轻易地验证 $j^a(x)$ 确实如**矢量场**般变换 [与式 (1.168) 中标量场和式 (1.175) 中张量场的行为作比较]：

$$j^a(x)\xrightarrow{\Lambda} j'^a(x)=\Lambda^a{}_b\,j^b(\Lambda^{-1}x). \tag{1.209}$$

为了验证这点，我们注意到 $\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t)\right)$ 可以写为沿着由固有时 τ 参数化了的粒子的轨迹的积分形式：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\delta^{(4)}(x-x(\tau))&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\delta(x^0-x^0(\tau))\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(\tau)\right)\\&=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x^0}\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t)\right)=\frac{1}{c\gamma}\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t)\right).\end{aligned} \tag{1.210}$$

这使得我们可以将式 (1.207) 和式 (1.208) 重新写为

$$c\rho(\boldsymbol{x},t)=c\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n e_n\gamma_n c\,\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right), \tag{1.211}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=c\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n e_n\gamma_n\boldsymbol{v}_n\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right). \tag{1.212}$$

这两个方程可以合并成一个单一的 4-矢量方程式

$$j^a(x)=c\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n e_n\dot{x}_n^a(\tau)\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right), \tag{1.213}$$

这样，由 $\dot{x}_n^a(\tau)$ 的矢量性质可以看出式 (1.209) 中的变换行为是十分明显的.

借助于 4 维电流密度表示式，非齐次麦克斯韦方程 (1.196) 就变为了**麦克斯韦–洛伦兹方程**

$$\partial_b F^{ab}=-\frac{1}{c}\,j^a=-\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n e_n\dot{x}_n^a(\tau)\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right). \tag{1.214}$$

对于式 (1.213) 中的电流密度，我们来验证一下守恒定律 (1.202). 将微分算子 ∂_a 作用于上式中的 δ 函数，得 $\partial_a\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right)=-\partial_{x_n^a}\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right)$，于是有

$$\begin{aligned}\partial_a j^a(x)&=-c\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n e_n\frac{\mathrm{d}x_n^a(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x_n^a}\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right)\\&=-c\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n e_n\partial_\tau\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right).\end{aligned} \tag{1.215}$$

如果粒子轨道 $x_n(\tau)$ 是稳定的，则它们要么在时空中闭合，要么从负无穷远 $x_n(\tau)$ 走向无穷远 $x_n(\tau)$. 那么，式 (1.215) 右边在任何一个有限区域内均为零，于是我们发现电流密度确实是守恒的.

作为本节结尾，我们来进一步考察一下矢量的变换律 (1.209). 类似于式 (1.175) 中张量的变换律，式 (1.209) 可写为

$$j^a(x)\xrightarrow{\ \varLambda\ }j'^a(x)=[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{J}^{ab}}\,j]^a(\varLambda^{-1}x), \tag{1.216}$$

其中

$$\hat{J}^{cd}\equiv L^{cd}\times\hat{1}+1\times\hat{L}^{cd} \tag{1.217}$$

为矢量场的 4 维总角动量的生成元. 如同在式 (1.177) 中一样，直积中的因子将分别作用于与洛伦兹指标和时空坐标相关联的表示空间，并且生成元 $\hat{J}^{ab}$ 遵循与 L_{ab} 和 $\hat{L}_{ab}$ 一样的对易规则 (1.71) 和 (1.72).

1.11　狄拉克粒子和场

宇宙中的可观测物质主要由电子和核子组成，而后者则主要是三个夸克的束缚态. 电子和夸克都是自旋为 1/2 的粒子，它们由 4-分量狄拉克场 $\psi(x)$ 来描述. 这些场遵循狄拉克方程

$$(\mathrm{i}\gamma^a\partial_a - m)\,\psi(x) = 0, \tag{1.218}$$

其中, γ^a 为 **4×4 狄拉克矩阵**

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ \tilde{\sigma}^a & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.219}$$

其中的 2×2 子矩阵 σ^a 和 $\tilde{\sigma}^a$ ($a=0,\cdots,3$) 组成**泡利矩阵 4-矢量**

$$\sigma^a \equiv (\sigma^0, \sigma^i), \quad \tilde{\sigma}^a \equiv (\sigma^0, -\sigma^i). \tag{1.220}$$

上述的空间分量 σ^i 就是通常的**泡利矩阵**

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.221}$$

而第零分量 σ^0 则定义为 2×2 单位矩阵

$$\sigma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.222}$$

由这些矩阵的代数性质

$$(\sigma^a)^2 = \sigma^0 = 1, \quad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \sigma^a\tilde{\sigma}^b + \sigma^b\tilde{\sigma}^a = 2g^{ab}, \tag{1.223}$$

我们可以推导出 γ^a 须满足以下反对易规则：

$$\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = 2g^{ab}. \tag{1.224}$$

在洛伦兹变换下，依照洛伦兹群的旋量表示，狄拉克场变换为

$$\psi_A(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi'_A(x) = D_A{}^B(\Lambda)\psi_B(\Lambda^{-1}x). \tag{1.225}$$

这与式 (1.209) 中矢量场所满足的变换律是相类似的，只不过是将式 (1.209) 中洛伦兹群标准表示的 4×4 矩阵 Λ 替换为反映旋量空间中洛伦兹群表示的 4×4 矩阵 $D(\Lambda)$.

我们可以很容易地构造这些矩阵. 如果我们用 4×4 矩阵 Σ^{ab} 来标记李代数 (1.72) 的旋量表示的话，这些矩阵须满足以下交换律：

$$[\Sigma^{ab},\Sigma^{ac}]=-\mathrm{i}g^{aa}\Sigma^{bc},\quad \text{不对 } a \text{ 求和.} \tag{1.226}$$

我们看到，下面这些矩阵正好满足该方程：

$$\Sigma^{ab}\equiv\frac{1}{2}\sigma^{ab}, \tag{1.227}$$

其中，σ^{ab} 是如下组成的矩阵的反对称张量：

$$\sigma^{ab}\equiv\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^a,\gamma^b]. \tag{1.228}$$

于是，有限洛伦兹变换的表示矩阵可表示为式 (1.54) 中指数函数的形式

$$D(\Lambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\Sigma^{ab}}, \tag{1.229}$$

其中, ω_{ab} 正是与式 (1.54) 中一样的反对称矩阵，它包含了式 (1.55) 和式 (1.56) 中确定的转动和推进参量. 与式 (1.57) 的比较显示纯转动和纯洛伦兹变换分别由式 (1.57) 中的 L^{ab} 的旋量表示

$$\Sigma^{ij}=\epsilon_{ijk}\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix},\quad \Sigma^{0i}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}-\sigma^i & 0\\ 0 & \sigma^i\end{pmatrix} \tag{1.230}$$

而生成. 对应于式 (1.53) 中的 L_i 的转动群的生成元 $\Sigma^i=\dfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma^{jk}$ 则由两个泡利矩阵的直和构成，即为 4×4 自旋矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}\equiv\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{1.231}$$

对应于式 (1.53) 中的 M_i 的纯洛伦兹变换的生成元 Σ^{0i} 也可由一个 4×4 矩阵矢量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \tag{1.232}$$

表示为 $\Sigma^{0i}=\mathrm{i}\alpha^i/2$. 利用 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$，我们看到纯转动和纯洛伦兹变换的表示矩阵 (1.229) 具有如下确切的形式：

$$D(R)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}\end{pmatrix},\quad D(B)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2}\end{pmatrix}. \tag{1.233}$$

式 (1.226) 中的对易关系正是生成元 $\varSigma^{ab}$ 与 γ 矩阵对易关系

$$[\varSigma^{ab}, \gamma^c] = -(L^{ab})^c{}_d\,\gamma^d = -\mathrm{i}(g^{ac}\gamma^b - g^{bc}\gamma^a) \tag{1.234}$$

的一个直接结果. 与式 (1.114) 与式 (1.115) 的比较显示 γ^a 就像 x^a 一样变换，也即，它们构成一个矢量算子. 利用莱布尼茨链式法则 (1.117)，对易关系 (1.226) 可直接由式 (1.234) 得到.

对于整体变换，式 (1.234) 中的矢量特性意味着 γ^a 的行为和式 (1.133) 中的矢量 $\boldsymbol{x}^a$ 是一样的，即

$$D(\varLambda)\gamma^c D^{-1}(\varLambda) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\varSigma^{ab}}\gamma^c \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\varSigma^{ab}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}L^{ab}})^c{}_{c'}\,\gamma^{c'} = (\varLambda^{-1})^c{}_{c'}\,\gamma^{c'}. \tag{1.235}$$

利用生成元 $\varSigma^{ab}$，我们可以将式 (1.225) 中的场的变换律更精确地写为

$$\psi(x) \xrightarrow{\varLambda} \psi'_\varLambda(x) = D(\varLambda)\psi(\varLambda^{-1}x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\varSigma^{ab}}\psi(\varLambda^{-1}x), \tag{1.236}$$

这与式 (1.168)、式 (1.175) 和式 (1.209) 中的标量、张量和矢量的变换律是完全类似的.

利用 4 维角动量的微分算子来重新表示式 (1.236) 右边时空变量的变换会十分有用. 类似于式 (1.177) 和式 (1.217)，我们可以将式 (1.236) 重新写为

$$\psi(x) \xrightarrow{\varLambda} \psi'_\varLambda(x) = \hat{D}(\varLambda) \times D(\varLambda)\psi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{J}^{ab}}\psi(x), \tag{1.237}$$

其中

$$\hat{J}^{cd} \equiv \varSigma^{cd} \times \hat{1} + 1 \times \hat{L}^{cd} \tag{1.238}$$

为狄拉克场的 4 维总角动量的生成元.

1.12 能 动 张 量

4 维电流密度 $j^a(x)$ 包含了相对论性粒子轨道的所有电学性质. 我们也可将其所有的力学性质集中在一个张量中，这就是**能动张量**.

1.12.1 点粒子

粒子簇的**能量密度**可以写为

$$\overset{\text{part}}{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_n m_n \gamma c^2 \delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n(t)\right). \tag{1.239}$$

我们之前已经看到能量的变换同 4-矢量的第零分量的变换是一样的 [参看式 (1.152)]. 能量密度给出的是空间单位体积内的能量. 4 维无穷小体积元 d^4x 在

洛伦兹变换下是不变的，这是由于赝正交关系 (1.28) 所示的单位行列式 $|\Lambda^a{}_b| = 1$ 引起的，我们确实有

$$\mathrm{d}^4x' = \left|\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right|\mathrm{d}^4x = |\Lambda^a{}_b|\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x. \tag{1.240}$$

这显示出如空间体积元的倒数般变换的 δ 函数 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$

$$\frac{1}{\mathrm{d}^3x} = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}^4x}, \tag{1.241}$$

其行为就像 4-矢量的第零分量. 于是式 (1.239) 中的能量密度可被看作一个洛伦兹张量的第 00 分量，这个张量就是对称的能动张量 $\overset{\text{part}}{T}{}^{ab}$. 按照惯例，我们须构造此张量使之具有动量密度的量纲，因此我们必须将能量密度定义为 $c\overset{\text{part}}{T}{}^{00}$. 事实上，利用式 (1.210) 中的恒等关系，我们可以将式 (1.239) 重新写为

$$\overset{\text{part}}{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x},t) = c\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n\frac{1}{m_n}p_n^0(\tau)p_n^0(\tau)\delta^{(4)}(x-x_n(\tau)), \tag{1.242}$$

这正等于 c 乘以以下的能动张量的第 00 分量

$$\overset{\text{part}}{T}{}^{ab}(\boldsymbol{x},t) = \sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n\frac{1}{m_n}p_n^a(\tau)p_n^b(\tau)\delta^{(4)}(x-x_n(\tau)). \tag{1.243}$$

粒子的空间动量密度

$$\overset{\text{part}}{\mathcal{P}}{}^i(\boldsymbol{x},t) = \sum_n m_n\gamma_n\dot{x}_n^i(\tau)\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n(\tau)\right) \tag{1.244}$$

是 3-矢量. 此密度的变换同一个洛伦兹张量的第 $0i$ 分量是一样的. 实际上，当我们再次利用式 (1.210) 中的等式，我们可以将式 (1.244) 改写为

$$\overset{\text{part}}{\mathcal{P}}{}^i(x,t) = \overset{\text{part}}{T}{}^{0i}(x,t) = \sum_n\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau_n\frac{1}{m_n}p_n^0(\tau)p_n^i(\tau)\delta^{(4)}(x-x_n(\tau)), \tag{1.245}$$

这个式很明确地显示出了它的张量特性. 多粒子体系的总能量动量的 4-矢量可以通过对能动张量的第 $0a$ 分量进行积分而得到

$$\overset{\text{part}}{P}{}^a(t) \equiv \int\mathrm{d}^3x\ \overset{\text{part}}{T}{}^{0a}(\boldsymbol{x},t). \tag{1.246}$$

这里将式 (1.242) 和式 (1.245) 代入，我们得到系统中所有粒子 4-动量的和

$$\overset{\text{part}}{P}{}^a(t) = \sum_n p_n^a(\tau). \tag{1.247}$$

类比于 4 维电流密度 $j^a(x)$，我们现在来计算 4 散度 $\partial_b \overset{\text{part}}{T}{}^{ab}$. 利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau_n\, p_n^a(\tau)\dot{x}_n^b(\tau)\partial_b\delta^{(4)}(x-x_n(\tau)) \\
=&-\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau_n\, p_n^a(\tau)\partial_\tau\delta^{(4)}(x-x_n(\tau)) \\
=&-\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau_n\partial_\tau\left[p_n^a(\tau)\delta^{(4)}(x-x_n(\tau)\right] \\
&+\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau_n\dot{p}_n^a(\tau)\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right).
\end{aligned} \tag{1.248}$$

如果粒子是稳定的，即其轨道是封闭的或者是从负无穷 x^0 到正无穷 x^0，则式 (1.248) 右边第一项为零. 如果只有电磁力加在粒子上，则式 (1.248) 第二项中的导数可更明确地表示出来，它就等于洛伦兹力，即式 (1.184) 中的 4-矢量 $\boldsymbol{f}^a(\tau)$，于是我们得到

$$\begin{aligned}
\partial_b \overset{\text{part}}{T}{}^{ab} =& \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau_n f_n(\tau)\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right) \\
=& \frac{1}{c}\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau_n e_n F^a{}_b\left(x_n(\tau)\right)\dot{x}_n{}^b(\tau)\delta^{(4)}\left(x-x_n(\tau)\right).
\end{aligned} \tag{1.249}$$

如果用式 (1.213) 中的电流 4-矢量来表示的话，则式 (1.249) 为

$$\partial_b \overset{\text{part}}{T}{}^{ab}(x) = \frac{1}{c^2}F^a{}_b(x)j^b(x). \tag{1.250}$$

当系统不存在电磁场时，则粒子的能动张量是守恒的.

将式 (1.249) 对空间坐标积分后就得到了整体 4-动量随时间的变化

$$\begin{aligned}
\partial_t \overset{\text{part}}{P}{}^a(t) =& c\,\partial_0\left[\int \mathrm{d}^3x\, \overset{\text{part}}{T}{}^{a0}\right] = c\int \mathrm{d}^3x\,\partial_b \overset{\text{part}}{T}{}^{ab} - c\int \mathrm{d}^3x\,\partial_i \overset{\text{part}}{T}{}^{ai} \\
=& \frac{e}{c}\sum_n F^a{}_b\left(x_n(\tau)\right)\dot{x}_n^b(\tau)\gamma_n(\tau).
\end{aligned} \tag{1.251}$$

这当然与洛伦兹方程 (1.170) 是相一致的，因为由式 (1.247)，有

$$\partial_t \overset{\text{part}}{P}{}^a(t) = \partial_t \sum_n p_n^a(\tau) = \sum_n \dot{p}_n^a(\tau)\,\gamma_n. \tag{1.252}$$

如果不存在电磁力，则 $\overset{\text{part}}{P}{}^a$ 是随时间不变的.

1.12.2 理想流体

定义一个以速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ 运动的理想化的均匀的物质介质为理想流体. 只要相较于观测者可分辨尺度而言，介质中微观平均自由程很短，则均质性就是一个可以接受的近似. 考虑这样的流体静止的情况，则它的能动张量不具有动量密度

$$\overset{\text{fluid}}{T}{}^{0i} = 0. \tag{1.253}$$

并且它的能量密度为

$$c\overset{\text{fluid}}{T}{}^{00} = c^2\rho, \tag{1.254}$$

其中, ρ 为其质量密度.

由于它是各向同性的，能动张量的**纯空间**部分则必须是对角的

$$\overset{\text{fluid}}{T}{}^{ij} = \frac{p}{c}\delta_{ij}, \tag{1.255}$$

其中, p 是该流体的**压强**. 通过对静止时的能动张量作洛伦兹变换，我们就可以计算出移动的理想流体的能动张量

$$\overset{\text{fluid}}{T}{}^{ab} \to \Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d\overset{\text{fluid}}{T}{}^{cd}. \tag{1.256}$$

将式 (1.34) 中由静止到动量 $\boldsymbol{p}$ 的洛伦兹推进应用于此，并据式 (1.153) 将双曲函数用能量和动量来表示，我们得到

$$\overset{\text{fluid}}{T}{}_{ab} = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{p}{c^2}+\rho\right)u^a u^b - pg^{ab}\right], \tag{1.257}$$

其中, u^a 为该流体的 4-速度 (1.150)，且 $u^a u_a = c^2$.

1.12.3 电磁场

众所周知，电磁场的能量密度可表为

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^2(x) + \boldsymbol{B}^2(x)\right]. \tag{1.258}$$

相关的能流密度由**坡印亭矢量**(Poynting vector)

$$\boldsymbol{S}(x) = c\,\boldsymbol{E}(x)\times\boldsymbol{B}(x) \tag{1.259}$$

给出. 由此，我们得到了能动张量的四个分量

$$\overset{\text{em}}{T}{}^{00}(x) \equiv \frac{1}{c}\mathcal{E}(x), \quad \overset{\text{em}}{T}{}^{0i} = \overset{\text{em}}{T}{}^{i0} \equiv \frac{1}{c^2}S^i(x). \tag{1.260}$$

剩余分量由如下张量给出：

$$\overset{\text{em}}{T}{}^{ab}(x) = \frac{1}{c}\left[-F^{a}{}_{c}F^{bc} + \frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}\right]. \tag{1.261}$$

它的 4 散度为

$$\partial_b \overset{\text{em}}{T}{}^{ab} = \frac{1}{c}\left[-F^{a}{}_{c}\partial_b F^{ab} - \left(\partial_b F^{a}{}_{c}\right)F^{bc} + \frac{1}{4}\partial^{a}\left(F^{cd}F_{cd}\right)\right]. \tag{1.262}$$

由于式 (1.189) 和式 (1.190) 中的齐次麦克斯韦方程的第二和第三项相抵消，为了看清楚这点，我们取平凡的恒等式 $\partial_b\epsilon^{abcd}F_{cd} = 2\epsilon^{abcd}\partial_b\partial_c A_d = 0$，然后将此式乘以 $\epsilon_{aefg}F_{fg}$. 利用式 (1A.23) 中的恒等式

$$\epsilon^{abcd}\epsilon_{aefg} = -\left(\delta^b_e\delta^c_f\delta^d_g + \delta^c_e\delta^d_f\delta^b_g + \delta^d_e\delta^b_f\delta^c_g - \delta^b_e\delta^d_f\delta^c_g - \delta^d_e\delta^c_f\delta^b_g - \delta^c_e\delta^b_f\delta^d_g\right), \tag{1.263}$$

我们得到

$$-F^{cd}\partial_e F_{cd} - F^{db}\partial_b F_{ed} - F^{bc}\partial_b F_{ce} + F^{dc}\partial_e F_{cd} + F^{cb}\partial_b F_{ce} + F^{bd}\partial_b F_{ed} = 0. \tag{1.264}$$

由于 F_{ab} 的反对称性，此式给出

$$-\partial_e\left(F^{cd}F_{cd}\right) + 4F^{bd}\partial_b F_{bd} = 0, \tag{1.265}$$

于是我们得到如下守恒律：

$$\partial_b \overset{\text{em}}{T}{}^{ab}(x) = -\frac{1}{c}\left[F^{a}{}_{c}(x)\partial_b F^{bc}(x)\right] = 0. \tag{1.266}$$

式 (1.266) 最后一步中，我们利用了式 (1.196) 中无电流情况下的麦克斯韦方程.

守恒律 (1.266) 中的类时分量为

$$\partial_t \overset{\text{em}}{T}{}^{00}(x) + c\,\partial_i \overset{\text{em}}{T}{}^{0i}(x) = 0, \tag{1.267}$$

结合式 (1.258) 和式 (1.260)，此式可重新写为著名的能流的**坡印亭定律**

$$\partial_t\,\mathcal{E}(x) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}(x) = 0. \tag{1.268}$$

在有电流存在的情况下，式 (1.196) 中的麦克斯韦方程会将式 (1.266) 中的守恒律变为

$$c\,\partial_b \overset{\text{em}}{T}{}^{ab}(x) = -\frac{1}{c}F^{a}{}_{c}(x)j^{c}(x), \tag{1.269}$$

则式 (1.258) 修正为

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^2(x) + \boldsymbol{B}^2(x)\right] - \frac{1}{c}\,\boldsymbol{j}(x)\cdot\boldsymbol{A}(x) = c\,\overset{\text{em}}{T}{}^{00}(x), \tag{1.270}$$

同时坡印亭矢量 (1.260) 变为

$$S^i(x) - j^i(x)A^0 = c^2 \overset{\text{em}}{T}{}^{0i}, \tag{1.271}$$

且式 (1.268) 变为

$$\partial_t \mathcal{E}(x) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}(x) = -\boldsymbol{j}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x). \tag{1.272}$$

可以看出，一个平行于电场的电流会降低场能量.

在介质中，能量密度和坡印亭矢量变为

$$\mathcal{E}(x) \equiv \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}(x) \cdot \boldsymbol{D}(x) + \boldsymbol{B}(x) \cdot \boldsymbol{H}(x)\right], \quad \boldsymbol{S}(x) \equiv c\boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{H}(x), \tag{1.273}$$

利用式 (1.193) 和式 (1.195) 中的麦克斯韦方程，我们就可以很轻松地验证相应的守恒律

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S}(x) &= c\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{E}(x) \times \boldsymbol{H}(x)] = c[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(x)] \cdot \boldsymbol{H}(x) - c\boldsymbol{E}(x) \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(x)] \\ &= \{\partial_t \boldsymbol{B}(x) \cdot \boldsymbol{H}(x) + \boldsymbol{E}(x) \cdot [\partial_t \boldsymbol{D}(x) + \boldsymbol{j}(x)]\} = \partial_t \mathcal{E}(x) + \boldsymbol{j}(x) \cdot \boldsymbol{E}(x).\end{aligned} \tag{1.274}$$

我们现在观察到式 (1.269) 右边的力恰好与式 (1.250) 右边的力大小相等符号相反，这正是牛顿第三公理作用力与反作用力所要求的. 于是，粒子和电磁场的联合系统的总能动张量

$$T^{ab}(x) = \overset{\text{part}}{T}{}^{ab}(x) + \overset{\text{em}}{T}{}^{ab}(x) \tag{1.275}$$

的散度为零，即

$$\partial_b T^{ab}(x) = 0. \tag{1.276}$$

这意味着总 4-动量 $P^a \equiv \int \mathrm{d}^3x\, T^{0a}$ 是一个守恒量，即

$$\partial_t P^a(t) = 0. \tag{1.277}$$

1.13 角动量和自旋

对于粒子和场的总角动量，可以采用类似的考虑. 由于 $T^{i0}(x)$ 为动量密度，我们可从以下积分计算出总角动量的空间张量

$$J^{ij}(t) = \int \mathrm{d}^3x \left[x^i T^{j0}(x) - x^j T^{i0}(x)\right]. \tag{1.278}$$

在三维空间中，我们可以用一个矢量 $J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk}$ 来描述角动量. 式 (1.278) 中的角动量可看作洛伦兹张量

$$J^{ab,c}(x) = x^a T^{bc}(x) - x^b T^{ac}(x). \tag{1.279}$$

的 $i, j, 0$ 分量的积分

$$J^{ij}(t) = \int \mathrm{d}^3 x\, J^{ij,0}(x). \tag{1.280}$$

很容易可以看出，由于式 (1.276) 中能动张量的对称性，对于指标 c，洛伦兹张量 $J^{ab,c}(x)$ 的散度为零，即

$$\partial_c J^{ab,c}(x) = 0. \tag{1.281}$$

其结果就是对它的空间积分

$$J^{ab}(t) = \int \mathrm{d}^3 x\, J^{ab,0}(x) \tag{1.282}$$

是一个守恒量. 这是守恒的总角动量的四维扩展. 分量 $J^{0\mathrm{i}}$ 的守恒即质心定理.

一个具有式 (1.243) 中的能动张量的点粒子组的四维角动量为

$$\overset{\text{part}}{J}{}^{ab}(\tau) = \sum_n \left[x_n^a(\tau)p_n^b(\tau) - x_n^b(\tau)p_n^a(\tau)\right]. \tag{1.283}$$

在没有电磁场存在的情况下，这是守恒的; 否则，它对于 τ 的依赖性将十分重要.

一个粒子的自旋是由在它的静止坐标系中的总角动量来定义的. 它是粒子的**内禀角动量**. 电子、质子、中子以及中微子具有 1/2 自旋. 对于原子核和原子，它们的自旋可以取大得多的值.

沿着粒子的轨道存在一个 4-矢量 $S^a(\tau)$，在静止坐标系中它可退化为粒子的角动量. 它由角动量 (1.283) 和 4-速度 $u^d(\tau)$ [参看式 (1.150)] 的组合来定义

$$S^a(\tau) \equiv \frac{1}{2c}\epsilon^{abcd}\overset{\text{part}}{J}{}_{bc}(\tau)u_d(\tau). \tag{1.284}$$

在静止坐标系中

$$u_{\mathrm{R}}^a = (c, 0, 0, 0), \tag{1.285}$$

这确实使之约化为总角动量 3-矢量

$$S_{\mathrm{R}}^a(\tau) = (0, \overset{\text{part}}{J}{}_{23}(\tau), \overset{\text{part}}{J}{}_{31}(\tau), \overset{\text{part}}{J}{}_{12}(\tau)) = (0, \overset{\text{part}}{\boldsymbol{J}}(\tau)). \tag{1.286}$$

对于一个自由粒子，由于其动量和总角动量的守恒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_d(\tau) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\overset{\text{part}}{J}{}_{bc}(\tau) = 0, \tag{1.287}$$

我们发现它的自旋矢量 $S^a(\tau)$ 也是守恒的：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}S^a(\tau)=0. \tag{1.288}$$

自旋 4-矢量对于理解原子物理中的一个重要现象，即原子中电子自旋的**托马斯进动**(Thomas precession)，是十分必要和有用的. 它解释了为什么观察到的原子物理的精细结构决定了电子的回磁比 g_{e} 接近于 2.

将纯洛伦兹变换矩阵 (1.27) 作用于式 (1.286) 得到

$$S^i=S^i_{\mathrm{R}}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{v^iv^j}{c^2}S_{\mathrm{R}}{}^j,\quad S^0=\gamma\frac{v^i}{c}S^i_{\mathrm{R}}\,, \tag{1.289}$$

这个式子十分清楚地展现了自旋 (1.286) 与其 4-矢量之间的关系. 需要注意 S^0 与 S^i 满足 $S^0=v^iS^i/c$，这可以进一步用协变的形式写为

$$u^aS_a=0. \tag{1.290}$$

式 (1.289) 中变换的逆变换可以借助恒等式 $v^2/c^2=(\gamma^2-1)/\gamma^2$ 而得到

$$S^i_{\mathrm{R}}=S^i-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{v^iv^j}{c^2}S^j=S^i-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{v^iv^j}{v^2}S^j. \tag{1.291}$$

如果有外力作用在系统上，则其自旋矢量开始移动. 这个移动就叫做**进动**. 如果一个点粒子在**中心力**作用下沿一个轨道运动 (在一个原子内，一个电子围绕原子核运动)，由于没有力矩作用于粒子上，所以在其静止坐标系中总角动量是守恒的. 因此 $\mathrm{d}S^i_{\mathrm{R}}(\tau)/\mathrm{d}\tau=0$，它可以协变地表示为 $\mathrm{d}S^a(\tau)/\mathrm{d}\tau\propto u^a(\tau)$. 然而，在原子的静止坐标系中，自旋将表现出进动行为. 我们现在对此来进行计算. 由定义 (1.284) 我们可得

$$\frac{\mathrm{d}S_a}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\overset{\text{part}}{J}{}^{bc}\frac{\mathrm{d}u^d}{\mathrm{d}\tau}. \tag{1.292}$$

其中并没有来自于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\overset{\text{part}}{J}{}^{bc}=x^a(\tau)\dot{p}^b(\tau)-x^b(\tau)\dot{p}^a(\tau) \tag{1.293}$$

的贡献，因为 $\dot{p}=m\dot{u}$ 并且 ϵ 张量是反对称的.

对于式 (1.292) 的右边，我们可以通过以下方式进行简化：将一个平凡的表示

$$g_{st}u^su^t=c^2 \tag{1.294}$$

与之相乘，并利用 ϵ 张量的恒等式

$$\epsilon^{abcd}g^{st}\quad=\quad\epsilon^{abcs}g^{dt}+\epsilon^{absd}g^{ct}+\epsilon^{ascd}g^{bt}+\epsilon^{sbcd}g^{at}. \tag{1.295}$$

这个恒等式可以十分容易地通过利用 ϵ^{abcd} 的反对称性并对指标 a、b、c 和 d 分别取 0、1、2 和 3 来加以证明. 通过以上手续，式 (1.292) 的右边就化为四项的和

$$\frac{1}{2}\left(\epsilon_{abcs}\overset{\text{part}}{J}{}^{bc}u^s u^d u'^d+\epsilon_{absd}\overset{\text{part}}{J}{}^{bc}u_c u^s u'^d+\epsilon_{ascd}\overset{\text{part}}{J}{}^{bc}u_b u^a u'^d+\epsilon_{sbcd}\overset{\text{part}}{J}{}^{bc}u^s u^a \dot{u}^d\right).$$

第一项为零，因为 $u^d\dot{u}_d = (1/2)\mathrm{d}u^2/\mathrm{d}\tau = (1/2)\mathrm{d}c^2/\mathrm{d}\tau = 0$. 最后一项等于 $-S_d\,\dot{u}^d u_a/c^2$. 把恒等式 (1.295) 代入第二和第三项后，我们就得到了两倍的式 (1.292) 的左边. 对此进行移项后，我们就得到了运动方程

$$\frac{\mathrm{d}S_a}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{c^2}S_c\frac{\mathrm{d}u^c}{\mathrm{d}\tau}u_a. \tag{1.296}$$

值得注意的是，由于这个方程，我们发现时间导数 $\mathrm{d}S_a/\mathrm{d}\tau$ 指向 u^a 的方向，这与我们最初的零力矩力的假设是相一致的.

现在我们可以计算托马斯进动率了. 在本节的最后部分我们用一个点“·”来表示对物理时间 $t=\gamma\tau$ 的导数，这样，我们可以将式 (1.296) 重新写为

$$\dot{\boldsymbol{S}}\equiv\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{1}{c^2}\left(S^0\dot{u}^0+\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\right)\boldsymbol{u}=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\right)\boldsymbol{v}, \tag{1.297}$$

$$\dot{S}_0\equiv\frac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\right). \tag{1.298}$$

利用关系式 $\dot{\gamma}=\gamma^3\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}/c^2$，我们将式 (1.291) 对时间求导，发现

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}=\dot{\boldsymbol{S}}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c^2}\dot{S}^0\boldsymbol{v}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c^2}S^0\dot{\boldsymbol{v}}-\frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2}\frac{1}{c^4}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\,S^0\,\boldsymbol{v}. \tag{1.299}$$

将式 (1.297) 和式 (1.298) 代入，我们得到

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c^2}S^0\,\dot{\boldsymbol{v}}-\frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2}\left(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\right)S^0\boldsymbol{v}. \tag{1.300}$$

当利用式 (1.289) 将式 (1.300) 右边重新用自旋矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$ 表示后，我们就得到

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{1}{c^2}\left[(\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{v})\dot{\boldsymbol{v}}\right]=\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}, \tag{1.301}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{T}}=-\frac{\gamma^2}{(\gamma+1)}\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}} \tag{1.302}$$

为托马斯进动频率.

这是纯运动学效应. 当存在电磁场时，则需考虑额外的动力学进动. 对于低速粒子，它可由下式给出：

$$\dot{\boldsymbol{S}}\equiv-\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{em}}\approx\boldsymbol{\mu}\times\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}\right), \tag{1.303}$$

其中, $\boldsymbol{\mu}$ 为磁矩

$$\boldsymbol{\mu}=g\mu_{\mathrm{B}}\frac{\boldsymbol{S}}{\hbar}=\frac{eg}{2Mc}\boldsymbol{S}, \tag{1.304}$$

而 g 为无量纲**旋磁比**，也称为**朗德因子**(Landé factor). 其中，**玻尔磁子** μ_{B} 的值为

$$\mu_{\mathrm{B}}\equiv\frac{e\hbar}{2Mc}\approx 3.094\times10^{-30}\ \mathrm{C}\cdot\mathrm{cm}\approx\ 0.927\times10^{-20}\ \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{Gs}}\approx\ 5.788\times10^{-8}\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{Gs}}.$$
$$(1\mathrm{erg}=10^{-7}\mathrm{J},1\mathrm{Gs}=10^{-4}\mathrm{T}) \tag{1.305}$$

而对于电子快速移动的情形，我们利用洛伦兹变换 (1.178) 和 (1.179) 将电磁场变换到电子的静止坐标系中，得到自旋的运动方程

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}=\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{\mu}\times\left[\gamma\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}\right)-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{B}\right)\right]. \tag{1.306}$$

用式 (1.304) 将 $\boldsymbol{\mu}$ 表示后，式 (1.306) 变为

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}\equiv-\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{em}}=\frac{eg}{2mc}\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\times\left[\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}\right)-\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{B}\right)\right], \tag{1.307}$$

这正是式 (1.303) 的相对论性推广. 很容易看到，与之关联的全协变方程为

$$S^{a\prime}=\frac{g}{2mc}\left[eF^{ab}S_b+\frac{1}{mc}p^aS_c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^c\right]=\frac{eg}{2mc}\left[F^{ab}S_b+\frac{1}{m^2c^2}p^aS_cF^{c\kappa}p_\kappa\right]. \tag{1.308}$$

式 (1.308) 右边我们已经插入了外加电磁场中点粒子的相对论性运动方程 (1.170).

如果我们将零力矩托马斯进动率 (1.296) 加入其中的话，我们就得到了协变的**Bargmann-Michel-Telegdi 方程**[9]

$$S^{a\prime}=\frac{1}{2mc}\left[egF^{ab}S_b+\frac{g-2}{mc}p^aS_c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p^c\right]=\frac{e}{2mc}\left[gF^{ab}S_b+\frac{g-2}{m^2c^2}p^aS_cF^{c\kappa}p_\kappa\right]. \tag{1.309}$$

对于电子静止坐标系中的自旋矢量 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$，这意味着式 (1.307) 中的电磁场进动率变为[10]

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{em\,T}}\times\boldsymbol{S}\equiv(\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{em}}+\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{T}})\times\boldsymbol{S} \tag{1.310}$$

其中频率由如下**托马斯方程**给出：

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{em\,T}}=-\frac{e}{mc}\left[\left(\frac{g}{2}-1+\frac{1}{\gamma}\right)\boldsymbol{B}-\left(\frac{g}{2}-1\right)\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{B}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c}-\left(\frac{g}{2}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}\right]. \tag{1.311}$$

托马斯进动的贡献就是式 (1.311) 右边不含旋磁因子 g 的部分

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{T}}=-\frac{e}{mc}\left[-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\boldsymbol{B}+\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{v}+\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right]. \tag{1.312}$$

由式 (1.182) 和式 (1.183)，我们可以直接得到加速度表示

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t)=c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{p}}{p^0}=\frac{e}{\gamma m}\left[\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{E}\right)\right], \tag{1.313}$$

利用此关系，我们发现式 (1.312) 与式 (1.302) 中的托马斯频率是相一致的.

托马斯方程 (1.311) 可用来计算与时间相关的电子的螺旋性 $h\equiv\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}$ ，即自旋在运动方向上的分量. 利用微分的链式法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}\right)=\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{v}\left[\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}-(\hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}})\hat{\boldsymbol{v}}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}, \tag{1.314}$$

并将式 (1.310) 以及关于加速度的方程 (1.313) 代入，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{e}{mc}\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}\perp}\cdot\left[\left(\frac{g}{2}-1\right)\hat{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{B}+\left(\frac{gv}{2c}-\frac{c}{v}\right)\boldsymbol{E}\right], \tag{1.315}$$

其中, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}\perp}$ 为自旋垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的分量. 此方程说明具有 $g=2$ 的狄拉克电子的螺旋性在纯磁场中保持不变. 另外，如果电子以极端相对性的速度 ($v\approx c$) 运动，则 $g=2$，使得式 (1.315) 最后一项非常小，约为 $(e/mc)\gamma^{-2}\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}\perp}\cdot\boldsymbol{E}$，以至于它的螺旋性几乎不受电场影响. 然而，电子的反常磁矩 $a\equiv(g-2)/2$ 会将这项修正为一个有限值 $\approx-(e/mc)a\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}\perp}\cdot\boldsymbol{E}$. 这个显著的效应被用来在实验中测到了电子、正电子和 μ 介子的 a 的实验值：

$$a(\mathrm{e}^-)=(115\,965.77\pm0.35)\times10^{-8}, \tag{1.316}$$

$$a(\mathrm{e}^+)=(116\,030\pm120)\times10^{-8}, \tag{1.317}$$

$$a(\mu^\pm)=(116\,616\pm31)\times10^{-8}. \tag{1.318}$$

1.14　依赖时空的洛伦兹变换

本书中将要发展的引力理论不仅仅是洛伦兹不变的，同时在如下局域洛伦兹变换下也是不变的：

$$x'^a=\Lambda^a{}_b(x)x^b. \tag{1.319}$$

作为阐述这种理论的预备，我们在这里将推导出一个适用于多种目的的群论性的公式.

1.14.1　角速度

考虑一个依赖于时间的 3×3 转动矩阵 $R(\boldsymbol{\varphi}(t))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}(t)\cdot\boldsymbol{L}}$，其生成元为 $(L_i)_{jk}=-\mathrm{i}\epsilon_{\mathrm{ijk}}$ [参照式 (1.43)]. 随着时间的推移，旋转角度将随着如下定义的

角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 而变化：

$$R^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(t))\,\dot{R}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = -\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{L}. \tag{1.320}$$

利用**欧拉角**α、β 和 γ 对转动进行参数化

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma), \tag{1.321}$$

可以很清楚地确定 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 的分量. 式 (1.321) 中的 $R_3(\alpha)$ 和 $R_3(\gamma)$ 分别为绕 z 轴转过 α 角和 γ 角的转动，而 $R_2(\beta)$ 则为绕 y 轴转过 β 角的转动，也即

$$R(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{L}_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\hat{L}_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma\hat{L}_3}. \tag{1.322}$$

式 (1.57) 中的转角矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 与欧拉角 α、β 和 γ 的关系可以通过纯粹的几何考量而得到. 最简单的办法是将转动 $R(\boldsymbol{\varphi})$ 的 2×2 表示

$$R(\boldsymbol{\varphi}) = \cos\frac{\varphi}{2} - \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{1.323}$$

与式 (1.322) 中欧拉分解的 2×2 表示

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \mathrm{i}\sigma_3\,\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2} - \mathrm{i}\sigma_2\,\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\sigma_3\,\sin\frac{\gamma}{2}\right) \tag{1.324}$$

相等同，利用式 (1.223) 中的泡利矩阵的乘积法则直接可以得到所期望的关系式.

在欧拉分解中，我们可以求出下列偏导：

$$\mathrm{i}\hbar\partial_\alpha R = R\,\left[\cos\beta\,L_3 - \sin\beta(\cos\gamma\,L_1 - \sin\gamma\,L_2)\right], \tag{1.325}$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_\beta R = R\,(\cos\gamma\,L_2 + \sin\gamma\,L_1), \tag{1.326}$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_\gamma R = R\,L_3. \tag{1.327}$$

第三个式子可以很轻松地得到，第二个式子可由生成元的转动

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma L_3/\hbar}L_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma L_3/\hbar} = \cos\alpha\,L_2 + \sin\gamma\,L_1 \tag{1.328}$$

得到，而该关系式则是**李展开**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A} = 1 + \mathrm{i}[A,B] + \frac{\mathrm{i}^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots \tag{1.329}$$

和式 (1.61) 中 3×3 矩阵 L_i 对易关系的联合结果. 第一个式子 (1.325) 的推导则须额外用到转动关系

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta L_2/\hbar}L_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta L_2/\hbar} = \cos\beta L_3 - \sin\beta L_1. \tag{1.330}$$

现在，利用式 (1.325)∼ 式 (1.327) 以及微分的链式法则，我们就可以计算出 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 对时间的导数，得到式 (1.320) 的右边，并且角速度为

$$\omega_1 = \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma, \tag{1.331}$$

$$\omega_2 = \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma, \tag{1.332}$$

$$\omega_3 = \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma}. \tag{1.333}$$

因为在式 (1.325)∼ 式 (1.327) 的推导中只用到了对易关系，因此式 (1.331)∼ 式 (1.333) 中的公式对于转动群的**所有**表示均成立.

1.14.2　角梯度

角速度的概念可推广至依赖于时空的欧拉角 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 和 $\gamma(x)$，式 (1.320) 则被**角梯度**(angular gradient) 关系式所替换

$$R^{-1}(\boldsymbol{\varphi}(x))\,\partial_a R(\boldsymbol{\varphi}(x)) = -\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}_a(x)\cdot\boldsymbol{L}, \tag{1.334}$$

其中角速度矢量的推广为

$$\omega_{a;1} = \partial_a\beta\sin\gamma - \partial_a\alpha\sin\beta\cos\gamma, \tag{1.335}$$

$$\omega_{a;2} = \partial_a\beta\cos\gamma + \partial_a\alpha\sin\beta\sin\gamma, \tag{1.336}$$

$$\omega_{a;3} = \partial_a\alpha\cos\beta + \partial_a\gamma. \tag{1.337}$$

偏导算符 ∂_a 只作用于紧随其后的函数上. 这些方程同样对于转动群及其生成元的任何表示都成立.

对于洛伦兹群 $\Lambda(\omega_{ab}(x)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}(x)L^{ab}}$ [参照式 (1.57)]，同样存在一个类似于式 (1.334) 的关系式，并且相应的广义角速度可定义为

$$\Lambda^{-1}(\omega_{ab}(x))\,\partial_c\Lambda(\omega_{ab}(x)) = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{c;ab}(x)L^{ab}. \tag{1.338}$$

将式 (1.51) 中 4×4 生成元的具体表示代入式 (1.338) 右边，我们就可发现矩阵元的关系式

$$[\Lambda^{-1}(\omega_{ab}(x))\,\partial_c\Lambda(\omega_{ab}(x))]_{ef} = \omega_{c;ef}(x). \tag{1.339}$$

同样，将式 (1.338) 中的矩阵 $\Lambda(\omega_{ab}(x))$ 和 L^{ab} 可用洛伦兹群及其生成元的其他任何表示代换掉，特别是对于旋量表示 (1.229)，有

$$D^{-1}(\Lambda(\omega_{ab}(x)))\,\partial_c D(\Lambda(\omega_{ab}(x)) = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{c;ab}(x)\Sigma^{ab}. \tag{1.340}$$

附　录

1A　张量恒等式

在 d 维欧几里得以及闵可夫斯基时空的张量计算中，逆变的**列维–西维塔张量**

$$\epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_d}, \quad a_i = 0, 1, \cdots, d-1 \tag{1A.1}$$

扮演着一个特殊的角色. 这是一个全反对称的单位矩阵，且

$$\epsilon^{012\cdots(d-1)} = 1. \tag{1A.2}$$

当任何两个指标一致时它为零，而当它的指标与自然顺序 $0, 1, \cdots, (d-1)$ 相差偶次或奇次交换的话，则它分别等于 ± 1. 运用列维–西维塔张量，我们可如下计算一个张量 t_{ab} 的行列式：

$$\det(t_{ab}) = \frac{1}{d!} \epsilon^{a_1 a_2 \cdots a_d} \epsilon^{b_1 b_2 \cdots b_d} t_{a_1 b_1} \cdots t_{a_d b_d}. \tag{1A.3}$$

为了看清楚这一点，我们需要引进 $\epsilon^{a_1 \cdots a_d}$ 的协变形式，这个由如下式子定义：

$$\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_d} \equiv g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2} \cdots g_{a_d b_d} \epsilon^{b_1 b_2 \cdots b_d}. \tag{1A.4}$$

这又是一个全反对称单位张量，且

$$\epsilon_{012\cdots(d-1)} = (-1)^{d-1}. \tag{1A.5}$$

很容易，我们可以得到这两个张量的缩并

$$\epsilon_{a_1 \cdots a_d} \epsilon^{a_1 \cdots a_d} = -d!. \tag{1A.6}$$

于是，由定义，我们知道一个矩阵的行列式是如下全反对称的求和：

$$\det(t_{ab}) = \epsilon^{a_1 \cdots a_d} t_{a_1 0} \cdots t_{a_d (d-1)}. \tag{1A.7}$$

我们也可以将之写为

$$\det(t_{ab})\, \epsilon_{b_1 \cdots b_d} = -\epsilon^{a_1 \cdots a_d} t_{a_1 b_1} \cdots t_{a_d b_d}. \tag{1A.8}$$

对此利用 $\epsilon^{b_1 \cdots b_d}$ 进行缩并，同时利用 (1A.6)，我们就得到

$$\det(t_{ab}) = \frac{1}{d!} \epsilon^{a_1 \cdots a_d} \epsilon^{b_1 \cdots b_d} t_{a_1 b_1} \cdots t_{a_d b_d}, \tag{1A.9}$$

这与式 (1A.7) 相一致.

用同样的方法，我们可以推导出下列公式：

$$\det\left(t_a{}^b\right) = -\frac{1}{d!}\epsilon^{a_1\cdots a_d}\epsilon_{b_1\cdots b_d}t_{a_1}{}^{b_1}\cdots t_{a_d}{}^{b_d}. \tag{1A.10}$$

在镜像翻转下，列维–西维塔张量则表现为一个赝张量. 确实，当我们将它置于洛伦兹变换 $\Lambda^a{}_b$ 下，我们得到

$$\epsilon'^{\,a_1\cdots a_d} = \Lambda^{a_1}{}_{b_1}\cdots\Lambda^{a_d}{}_{b_d}\,\epsilon^{b_1\cdots b_d} = \det(\Lambda)\,\epsilon^{a_1\cdots a_d}. \tag{1A.11}$$

只要 $\det\Lambda = 1$, 张量 $\epsilon^{a_1\cdots a_d}$ 在洛伦兹变换下是协变的. 然而，一旦包含了时间或空间的倒置，则 $\det\Lambda = -1$, 于是式 (1A.11) 就展现出了 $\epsilon^{a_1\cdots a_d}$ 的赝张量特性.

下面我们罗列出一些关于列维–西维塔张量有用的恒等式，这些恒等式将在本书中经常性地被用到.

1A.1 乘积公式

(1) $d=2$ 欧几里得空间，$g_{ij} = \delta_{ij}$.

反对称列维–西维塔张量 ϵ_{ij} (其中 $\epsilon_{12}=1$) 满足下列恒等关系：

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}, \tag{1A.12}$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ik} = \delta_{jk}, \tag{1A.13}$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2, \tag{1A.14}$$

$$\epsilon_{ij}\delta_{kl} = \epsilon_{ik}\delta_{jl} + \epsilon_{kj}\delta_{il}. \tag{1A.15}$$

(2) $d=3$ 欧几里得空间，$g_{ij} = \delta_{ij}$.

反对称列维–西维塔张量 ϵ_{ijk} (其中 $\epsilon_{123}=1$) 满足下列恒等关系：

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = {}&\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}\\ &-\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn},\end{aligned} \tag{1A.16}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \tag{1A.17}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}, \tag{1A.18}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6, \tag{1A.19}$$

$$\epsilon_{ijk}\delta_{lm} = \epsilon_{ijl}\delta_{km} + \epsilon_{ilk}\delta_{jm} + \epsilon_{ljk}\delta_{im}, \tag{1A.20}$$

(3) $d=4$ 闵可夫斯基空间，其度规为：

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1A.21}$$

反对称列维–西维塔张量 (其中 $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$) 满足下列乘积恒等式：

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{abcd}\epsilon^{efgh} = -\Big(&\delta_a^e\delta_b^f\delta_c^g\delta_d^h + \delta_a^f\delta_b^g\delta_c^h\delta_d^c + \delta_a^g\delta_b^k\delta_c^e\delta_d^f + \delta_a^h\delta_b^e\delta_c^f\delta_d^g \\
+ \;&\delta_a^f\delta_b^e\delta_c^h\delta_d^g + \delta_a^e\delta_b^h\delta_c^g\delta_d^f + \delta_a^h\delta_b^g\delta_c^f\delta_d^e + \delta_a^g\delta_b^f\delta_c^e\delta_d^h \\
+ \;&\delta_a^h\delta_b^g\delta_c^f\delta_d^e + \delta_a^g\delta_b^f\delta_c^e\delta_d^h + \delta_a^f\delta_b^e\delta_c^h\delta_d^g + \delta_a^c\delta_b^h\delta_c^g\delta_d^f \\
- \;&\delta_a^e\delta_b^f\delta_c^h\delta_d^g - \delta_a^f\delta_b^h\delta_c^g\delta_d^e - \delta_a^h\delta_b^g\delta_c^e\delta_d^f - \delta_a^g\delta_b^c\delta_c^f\delta_d^h \\
- \;&\delta_a^f\delta_b^e\delta_c^g\delta_d^h - \delta_a^e\delta_b^g\delta_c^h\delta_d^f - \delta_a^g\delta_b^h\delta_c^f\delta_d^e - \delta_a^h\delta_b^f\delta_c^e\delta_d^g \\
- \;&\delta_a^g\delta_b^h\delta_c^f\delta_d^e - \delta_a^h\delta_b^f\delta_c^e\delta_d^g - \delta_a^f\delta_b^e\delta_c^g\delta_d^h - \delta_a^e\delta_b^g\delta_c^h\delta_d^f\Big),
\end{aligned} \tag{1A.22}
$$

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{afgh} = -\left(\delta_b^f\delta_c^g\delta_d^h + \delta_b^g\delta_c^h\delta_d^f + \delta_b^h\delta_c^f\delta_d^g - \delta_b^f\delta_c^h\delta_d^g - \delta_b^h\delta_c^g\delta_d^f - \delta_b^g\delta_c^f\delta_d^h\right), \tag{1A.23}$$

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{abgh} = -2\left(\delta_c^g\delta_d^h - \delta_c^h\delta_d^g\right), \tag{1A.24}$$

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{abch} = -6\delta_d^h, \tag{1A.25}$$

$$\epsilon_{abcd}\epsilon^{abcd} = -24, \tag{1A.26}$$

$$\epsilon_{abcd}g_{ef} = \epsilon_{abce}g_{dt} + \epsilon_{abcd}g_{cf} + \epsilon_{aecd}g_{bf} + \epsilon_{ebcd}g_{af}. \tag{1A.27}$$

1A.2　行列式

(1) $d=2$ 欧几里得：

$$
\begin{aligned}
g &= \det(g_{ij}) = \frac{1}{2!}\epsilon_{ik}\epsilon_{il}g_{ij}g_{kl} \equiv \frac{1}{2}g_{ij}C^{ij}, \\
C^{ij} &= \epsilon_{ik}\epsilon_{jl}g_{kl} = \text{代数余子式}, \\
g^{ij} &= \frac{1}{g}C_{ij} = g_{ij}\text{的逆矩阵}.
\end{aligned} \tag{1A.28}
$$

(2) $d=3$ 欧几里得：

$$
\begin{aligned}
g &= \det(g_{ij}) = \frac{1}{3!}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}g_{ij}g_{km}g_{ln} = g_{ij}C^{ij}, \\
C^{ij} &= \frac{1}{2!}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}g_{km}g_{ln} = \text{代数余子式}, \\
g^{ij} &= \frac{1}{g}C^{ij} = g_{ij}\text{的逆矩阵}.
\end{aligned} \tag{1A.29}
$$

(3) $d=4$ 闵可夫斯基：

$$
\begin{aligned}
g = \det(g_{ab}) &= -\frac{1}{4!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{ac}g_{bf}g_{cg}g_{dh} = \frac{1}{4}g^{ae}C^{ae}, \\
C^{ae} &= -\frac{1}{3!}\epsilon^{abcd}\epsilon^{efgh}g_{bf}g_{cg}g_{dh} = \text{代数余子式}, \\
g^{ab} &= \frac{1}{g}C^{ab} = g_{ab}\text{的逆矩阵}.
\end{aligned} \tag{1A.30}
$$

1A.3 行列式的展开

由式 (1A.28)~ 式 (1A.30)，并利用式 (1A.12)、式 (1A.16) 和式 (1A.22)，我们可得

$$
\begin{aligned}
d=2: &\quad \det(g_{ij}) = \frac{1}{2!}\left[(\mathrm{tr} g)^2 - \mathrm{tr}(g^2)\right],\\
d=3: &\quad \det(g_{ij}) = \frac{1}{3!}\left[(\mathrm{tr} g)^3 + 2\,\mathrm{tr}(g^3) - 3\,\mathrm{tr} g\,\mathrm{tr}(g^2)\right],\\
d=4: &\quad \det(g_{ab}) = \frac{1}{24}\left[(\mathrm{tr} g)^4 - 6(\mathrm{tr} g)^2\,\mathrm{tr}(g^2) + 3[\mathrm{tr}(g^2)]^2 + 8\,\mathrm{tr}(g)\,\mathrm{tr}(g^3) - 6\,\mathrm{tr}(g^4)\right].
\end{aligned}
\tag{1A.31}
$$

文献与注记

[1] A.A. Michelson, E.W. Morley, Am. J. Sci. **34**, 333 (1887), reprinted in *Relativity Theory: Its Origins and Impact on Modern Thought* ed. by L.P. Williams, J. Wiley and Sons, N.Y. (1968).

[2] 更新的一个极限是 1 km/sec. 参阅 T.S. Jaseja, A. Jaxan, J. Murray, C.H. Townes, Phys. Rev. **133**, 1221 (1964).

[3] G.F. Fitzgerald, as told by O. Lodge, Nature **46**, 165 (1982).

[4] H.A. Lorentz, Zittingsverslag van de Akademie van Wetenschappen **1**, 74 (1892), Proc. Acad. Sci. Amsterdam **6**, 809 (1904).

[5] J.H. Poincaré, Rapports présentés au Congrès International de Physique réuni á Paris (Gauthier-Villiers, Paris, 1900).

[6] A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 891 (1905), **18**, 639 (1905).

[7] 关于牛顿力学的不足之处，请参阅以下网页：
`www.physics.gmu.edu/classinfo/astr228/CourseNotes/ln_ch14.htm`.

[8] 关于它的推导，请看
J.E. Campbell, Proc. London Math. Soc. **28**, 381 (1897); **29**, 14 (1898);
H.F. Baker, ibid., **34**, 347 (1902); **3**, 24 (1905);
F. Hausdorff, Berichte Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Naturw. Kl. **58**, 19 (1906);
J.A. Oteo, J. Math. Phys. **32**, 419 (1991),
或者参阅下面这本专著的第 2 章
H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing Co., Singapore 2004, 3rd extended edition, pp. 1–1460 (`kl/b5`)，其中`kl` 为以下超链接的缩写：www.physik.fu-berlin.de/~kleinert.

[9] V. Bargmann, L. Michel, and V.L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

[10] L.T. Thomas, Phil. Mag. **3**, 1 (1927).

第 2 章　作用量方法

Never confuse movement with action.

Ernest Hemingway (1899~1961)

描述一个系统的物理性质最行之有效的途径就是基于**作用量** $\mathcal{A}$ 的方法. $\mathcal{A}$ 的极值给出系统的运动方程，而对相因子 $e^{i\mathcal{A}/\hbar}$ 的全部历史进行求和就给出了量子力学的时间演化振幅[1, 2]. 对所有历史进行求和是通过**路径积分**来加以实现的. 历史上，作用量方法的引入是为了在经典力学中更有效地利用牛顿的方法去建立体系的运动方程，并将它的应用范围扩大到具有广义坐标的多变量物理问题中. 在量子力学中，对所有路径的包含作用量的因子 $e^{i\mathcal{A}/\hbar}$ 进行求和则可以替换并推广薛定谔理论. 路径积分遍历每一时刻所有的位置和动量变量，并且可确定出所谓的**量子涨落**. 它们的尺度由普朗克常量 $\hbar$ 来控制，这与热涨落有着极大的相似之处，热涨落的尺度则由温度 T 来控制. 在 $\hbar\to 0$ 的极限下，使作用量取极值的路径将具有最大的振幅，这就解释了如何由量子力学而呈现出经典力学.

让人感到高兴的是作用量方法可直接推广到场论中. 为了描述电磁学现象，麦克斯韦创立了经典场论这一十分有用的概念. 特别是他的方程使得我们可以去研究自由电磁波的传播而不需要去考虑它的源. 20 世纪，通过假定时空度规是一个以引力波的形式在空间传播的依赖于时空的场，爱因斯坦创立了他的引力理论. 在凝聚态物理中，可引入场的概念来描述许多系统中的激发态，并且朗道将之发展成一个研究相变的普适的工具[3]. 这种场被称作**序参数场**.

最近发现的一个可以应用场论的领域是线状激发的巨正则系综的统计力学，其中包括超流和超导中的涡旋[4]，晶体中的线状缺陷[5]，等等. 这种激发扰乱了系统的秩序，相关场量我们称之为**无序场**[4].

2.1　广义质点动力学

任意给定一个经典系统，它的广义坐标和速度分别为 $q_n(t)$ 和 $\dot{q}_n(t)$，其典型的作用量形式为

$$\mathcal{A}[q_k]=\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\,L\left(q_k(t),\dot{q}_k(t),t\right),\tag{2.1}$$

其中，$L\left(q_k(t),\dot{q}_k(t),t\right)$ 被称为该系统的**拉格朗日量**，它通常最多是速度 $\dot{q}_k(t)$ 的平

方. 具有如此特性的拉格朗日量被称为是时间**局域**的. 如果一个理论由一个局域拉格朗日量支配，则此作用量以及整个理论也被称为是局域的. 对于 $\dot{q}(t)$ 的平方依赖性有时候只有经过在作用量中进行分部积分后才能显现出来. 例如，$-\int \mathrm{d}t\, q(t)\ddot{q}(t)$ 在朗格朗日量里是一个局域项，因为在作用量 (2.1) 中通过分部积分，它可化成为 $\int \mathrm{d}t\, \dot{q}^2(t)$.

系统的物理轨迹可由**极值原理**得到. 比较如下两个作用量：一个对应于连接两个端点

$$q_k(t_a) = q_{k,a}, \quad q_k(t_b) = q_{k,b} \tag{2.2}$$

的轨道 $q_k(t)$；另一个对应于连接同样两个端点而相对于前一条有无穷小偏离的轨道 $q'_k(t) \equiv q_k(t) + \delta q_k(t)$，其中 $\delta q_k(t)$ 称为轨道的**变分**. 由于 $q_k(t) + \delta q_k(t)$ 和 $q_k(t)$ 具有相同的端点，因此轨道端点处的变分为零

$$\delta q(t_a) = 0, \quad \delta q(t_b) = 0. \tag{2.3}$$

相应的作用量的变分为

$$\delta \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}[q_k + \delta q_k] - \mathcal{A}[q_k] = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k(t)} \delta q_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)} \delta \dot{q}_k(t) \right). \tag{2.4}$$

经过分部积分后，式 (2.4) 变为

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k(t) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k(t) \bigg|_{t_a}^{t_b}. \tag{2.5}$$

在由式 (2.4) 到式 (2.5) 的推导过程中，我们用到了如下事实：由 $\delta q_k(t)$ 的定义可知，时间导数的变分等于变分的时间导数，即

$$\delta \dot{q}_k(t) = \dot{q}'_k(t) - \dot{q}_k(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[q_k(t) + \delta q_k(t)] - q_k(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_k(t). \tag{2.6}$$

用更形式的语言来描述，就是时间导数与轨道的变分相对易：

$$\delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_k(t) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_k(t). \tag{2.7}$$

利用式 (2.3) 中的性质，可知式 (2.5) 右边的边界项为零. 对于经典轨道，作用量取极值，即对于所有的变分 $\delta q_k(t)$，$\delta \mathcal{A}$ 都必须为零，这就意味着 $q_k(t)$ 满足如下**欧拉–拉格朗日方程**：

$$\frac{\partial L}{\partial q_k(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)} = 0, \tag{2.8}$$

这就是系统的**运动方程**. 对于一个局域拉格朗日量 $L(q_k(t),\dot{q}_k(t))$，它最多只包含到 $\dot{q}_k$ 的平方项，其相应的欧拉–拉格朗日方程则是轨道 $q_k(t)$ 的二阶微分方程.

一组带质量万有引力粒子的局域拉格朗日量为

$$L(\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t)) = \sum_k \frac{m_k}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}}_k^2(t) + G_{\mathrm{N}} \sum_{k\neq k'} \frac{m_k m_{k'}}{|\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k'}(t)|}. \tag{2.9}$$

如果我们将 $3N$ 个坐标 x_n^i $(n=1,\cdots,N)$ 等同于 $3N$ 个广义坐标 q_k $(k=1,\cdots,3N)$，则欧拉–拉格朗日方程 (2.8) 刚好就约化为式 (1.2) 中的牛顿方程.

对于一个一般的拉格朗日系统，它的能量可以通过由其拉格朗日量构造所谓的**哈密顿量** 来得到. 哈密顿量可由如下**勒让德变换**定义：

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L, \tag{2.10}$$

其中

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{2.11}$$

称为**正则动量**. 式 (2.10) 中的能量构成了哈密顿形式的基础. 如果用 p_k 和 q_k 来表示，则运动方程变为

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{2.12}$$

对于式 (2.9) 中的拉格朗日量，其广义动量就等于其物理动量 $p_n = m_n \dot{x}_n$，于是，其哈密顿量就由如下牛顿表达式给出：

$$H = T + V \equiv \sum_k \frac{m_k}{2}\dot{\boldsymbol{x}}_k^2 - G_{\mathrm{N}} \sum_{k\neq k'} \frac{m_k m_{k'}}{|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{k'}|}. \tag{2.13}$$

第一项为动能，第二项为系统的势能.

2.2 相对论性单粒子

对于一个带质量的相对论性粒子，它的力学作用量为

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\ \overset{\mathrm{m}}{L} = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \sqrt{1-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2(t)}{c^2}}. \tag{2.14}$$

式 (2.11) 中的正则动量直接给出粒子的空间动量：

$$\boldsymbol{p}(t) = \frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{L}}{\partial\, \dot{\boldsymbol{x}}(t)}. \tag{2.15}$$

在相对论表示中，逆变矢量的导数 $\partial \overset{\mathrm{m}}{L}/\partial \dot{x}^i$ 是一个具有下指标 i 的协变矢量. 为了保证式 (2.15) 中非相对论性的约定，并能使其保持相对论表示，我们必须作如下定义：

$$p_i \equiv -\frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{L}}{\partial \dot{x}^i} = m\gamma\, \dot{x}_i. \tag{2.16}$$

如此，由勒让德变换而得到的能量为

$$\begin{aligned}\overset{\mathrm{m}}{H} &= \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{x}} - \overset{\mathrm{m}}{L} = -p_{\mathrm{i}}\dot{x}^{\mathrm{i}} - \overset{\mathrm{m}}{L} = m\gamma\,\boldsymbol{v}^2 + mc^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} = m\gamma\,\boldsymbol{v}^2 + mc^2\frac{1}{\gamma}\\ &= m\gamma c^2,\end{aligned} \tag{2.17}$$

这与式 (1.157) 中的能量相一致 [请参看式 (1.152)].

我们看到

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2}. \tag{2.18}$$

这可使式 (2.14) 中的作用量写为更加协变的形式. 在此表示中，无穷小时间元 $\mathrm{d}t$ 可以由任意类时参量代替，即 $t \to \sigma = f(t)$，这样，作用量将取更加一般的形式

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} \mathrm{d}\sigma\ \overset{\mathrm{m}}{L} = -mc\int_{\sigma_a}^{\sigma_b} \mathrm{d}\sigma\ \sqrt{g_{ab}\dot{x}^q(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}. \tag{2.19}$$

对于该作用量，我们可以通过构造如下导数来定义对应于参量 σ 的广义 4-动量：

$$p_a(\sigma) \equiv -\frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{L}}{\partial \dot{x}^a(\sigma)} = \frac{mc}{\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}} g_{ab}\dot{x}^b(\sigma), \tag{2.20}$$

其中, 圆点表示对自变量求导. 注意，正则动量 的定义式中的负号对应于非相对论情形，这是为了使该正则形式与式 (1.29) 中闵可夫斯基度规空间部分的负号相协调. 关于 $\dot{x}^a$ 的导数就如一个具有下指标 a 的协变矢量般变换，而物理动量则由逆变矢量 $\boldsymbol{p}^a$ 给出.

如果 σ 取为固有时 τ 的话，则式 (2.20) 中的平方根与 τ 无关

$$\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\tau)\dot{x}^b(\tau)} = c, \tag{2.21}$$

于是

$$p_a(\tau) = m\, g_{ab}\dot{x}^b(\tau) = m\,\dot{x}_a(\tau) = mu_a(\tau), \tag{2.22}$$

与之前在式 (1.152) 中定义的 4-动量相一致.

用固有时表示时，欧拉–拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}p_a(\tau) = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_{ab}\dot{x}^{\,b}(\tau) = m\,\ddot{x}_{\,a}(\tau) = 0, \tag{2.23}$$

这意味着自由粒子在闵可夫斯基空间中沿直线运动.

注意，关于 $p_a(\sigma)$ 的勒让德变换与物理能量毫无关系. 事实上，这一变换恒等于零：

$$\overset{\mathrm{m}}{H}_\sigma = -p_a(\sigma)\,\dot{x}^a(\sigma) - \overset{\mathrm{m}}{L} = -\frac{mc}{\sqrt{\dot{x}_a(\sigma)\dot{x}^a(\sigma)}}\dot{x}_a(\sigma)\dot{x}^a(\sigma) + mc\,\sqrt{\dot{x}_a(\sigma)\dot{x}^a(\sigma)} \equiv 0. \tag{2.24}$$

原因就在于，在时间的任意参数化 $\sigma \to \sigma' = f(\sigma)$ 下式 (2.19) 中的作用量的不变性. 对此，我们将从第 3 章一般性讨论连续对称变换生成元中获得更好的理解 (特别参见 3.5.3 节).

物理能量则由 c 乘以式 (2.22) 中 4-动量的第零分量 $p_0(\tau) = mc\gamma$ 给出，这与式 (2.17) 中的能量 H 一致.

2.3 标 量 场

上节提到的自由经典粒子就是相对论性局域标量自由场论中的量子.

2.3.1 局域性

将式 (2.1) 后的那一段中所描述的时间局域性进行推广，场论中的局域性表明作用量为**拉格朗日密度** 的时空积分：

$$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{L}(x) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x). \tag{2.25}$$

根据第 2.1 节所阐述的时间局域性概念，它应该只平方依赖于场对时间的导数. 由于在相对论理论中时间和空间的等价性，对于空间导数将有同样的限制. 一个局域拉格朗日密度最多为同一点上场的时空一阶导数的平方. 物理上来讲，这意味着位于点 x 上的场最多与其无限近邻点 $x + \mathrm{d}x$ 上的场相互作用，就像具有最近邻弹簧作用的一维链上的带质量粒子. 如果其中的导数项不取如此形式，则它们必须至少可以通过对式 (2.25) 进行分部积分取得该形式. 如果拉格朗日密度是局域的，我们也称此作用量以及整个理论是局域的.

由于一个自由场拉格朗日密度在同一时空点上对于场及其导数都是二次的，因此，对于标量场，它为

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left[\hbar^2\partial_a\phi(x)\partial^a\phi(x) - m^2c^2\phi(x)\phi(x)\right]. \tag{2.26}$$

如果粒子是带电的，则场为复场，相应的拉格朗日密度变为

$$\mathcal{L}(x) = \hbar^2 \partial_a \varphi^*(x) \partial^a \varphi(x) - m^2 c^2 \varphi^*(x) \varphi(x). \tag{2.27}$$

2.3.2 洛伦兹不变性

任何相对论性的拉格朗日密度 $\mathcal{L}(x)$ 不仅仅是局域的，同时也必须是标量，即它在洛伦兹变换下同式 (1.168) 中的标量场 $\phi(x)$ 一样变换：

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1} x). \tag{2.28}$$

我们将通过展示 $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ 来验证拉格朗日密度式 (2.26) 满足这一点. 根据定义，$\mathcal{L}'(x')$ 等于

$$\mathcal{L}'(x') = \hbar^2 \partial'_a \phi'(x') \partial'^a \phi(x') - m^2 c^2 \phi'(x') \phi'(x'). \tag{2.29}$$

利用标量场的变换规则式 (1.168)，我们得到

$$\mathcal{L}'(x') = \hbar^2 \partial'_a \phi(x) \partial'^a \phi(x) - m^2 c^2 \phi(x) \phi(x). \tag{2.30}$$

在此处插入

$$\partial'_a = \Lambda_a{}^b \partial_b, \quad \partial'^a = \Lambda^a{}_b \partial^b. \tag{2.31}$$

利用

$$\Lambda_a{}^b \equiv g_{ac} g^{bd} \Lambda^c{}_d, \tag{2.32}$$

我们看到 ∂^2 是洛伦兹不变的，

$$\partial'^2 = \partial^2, \tag{2.33}$$

因此变换后的拉格朗日密度 (2.29) 确实与原来的拉氏密度 (2.27) 是相一致的.

作为标量拉格朗日密度的时空积分，作用量 (2.25) 同样是洛伦兹不变的. 这可由在式 (1.240) 中证明过的时空体元的洛伦兹不变性

$$\mathrm{d}x'^0 \mathrm{d}^3 x' = \mathrm{d}^4 x' = \mathrm{d}^4 x \tag{2.34}$$

直接得到. 我们可通过下述运算直接进行验证：

$$\mathcal{A}' = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}'(x) = \int \mathrm{d}^4 x'\, \mathcal{L}'(x') = \int \mathrm{d}^4 x'\, \mathcal{L}(x) = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}(x) = \mathcal{A}. \tag{2.35}$$

2.3.3 场方程

通过对作用量 (2.25) 作关于场的变分，我们可以得到相应标量场的运动方程. 考虑复标量场的情况，$\varphi(x)$ 和 $\varphi^*(x)$ 必须分别独立进行变分. 场变量的独立性可由泛函微分法则表示出来：

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')}=\delta^{(4)}(x-x'),\quad \frac{\delta\varphi^*(x)}{\delta\varphi^*(x')}=\delta^{(4)}(x-x'),\\&\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi^*(x')}=0,\quad \frac{\delta\varphi^*(x)}{\delta\varphi(x')}=0.\end{aligned}\tag{2.36}$$

利用此法则以及式 (1.118) 中的莱布尼茨链式法则，我们计算出作用量 (2.25) 的泛函导数如下：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)}&=\int \mathrm{d}^4x'\ \left[\hbar^2\partial'_a\delta^{(4)}(x'-x)\partial'^a\varphi(x')-m^2c^2\delta^{(4)}(x'-x)\varphi(x')\right]\\&=(-\hbar^2\partial^2-m^2c^2)\varphi(x)=0,\end{aligned}\tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)}&=\int \mathrm{d}^4x'\ \left[\hbar^2\partial'_a\varphi^*(x')\partial'^a\delta^{(4)}(x'-x)-m^2c^2\varphi^*(x')\delta^{(4)}(x'-x)\right]\\&=\varphi^*(x)(-\hbar^2\overleftarrow{\partial}^2+m^2c^2)=0,\end{aligned}\tag{2.38}$$

其中, 最后一个微分算符上的指向左边的箭头表示该算符作用于其左边的场变量上. 第二个方程就是前一个方程的复共轭.

场方程也可以通过式 (2.27) 中拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 对所有场以及他们的导数作常规偏导直接得到. 其实，局域作用量的泛函导数可通过通常的法则用拉格朗日密度的各级导数来展开

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi(x)}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\varphi(x)\right]}+\partial_a\partial_b\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\partial_b\varphi(x)\right]}+\cdots\ ,\tag{2.39}$$

对于复共轭场 $\varphi^*(x)$ 我们有同样的展开. 这些展开都直接来源于式 (2.36) 的定义关系. 在作用量的极值点，场满足欧拉–拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi(x)}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\partial_a\varphi(x)}+\partial_a\partial_b\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\partial_a\partial_b\varphi(x)}+\cdots=0.\tag{2.40}$$

将拉格朗日密度式 (2.27) 代入，我们得到 $\varphi(x)$ 的场方程：

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\varphi^*(x)}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\varphi^*(x)\right]}=(-\hbar^2\partial^2+m^2c^2)\varphi(x)=0,\tag{2.41}$$

以及其复共轭 $\varphi^*(x)$ 的场方程.

在式 (2.25) 中作用量积分的分部积分下，欧拉–拉格朗日方程是不变的. 例如，一个拉格朗日密度在分部积分下等价于式 (2.27)：

$$\mathcal{L} = -\hbar^2 \varphi^*(x)\partial^2\varphi(x) - m^2c^2\varphi^*(x)\varphi(x). \tag{2.42}$$

将之代入式 (2.40)，$\varphi(x)$ 的场方程的获得就变得异常简单：

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \varphi^*(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi^*(x)} = (-\hbar^2\partial^2 + m^2c^2)\varphi(x) = 0. \tag{2.43}$$

然而，另一方面，$\varphi^*(x)$ 的场方程的推导则会变得相对繁琐. 通过计算式 (2.39) 中所有不为零的导数，我们就得到了式 (2.43) 的复共轭：

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \varphi(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \varphi(x)} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a \varphi(x)\right]} + \partial_a\partial_b \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_a\partial_b \varphi(x)\right]} = (-\hbar^2\partial^2 + m^2c^2)\varphi^*(x) = 0. \tag{2.44}$$

2.3.4 平面波

场方程 (2.43) 和方程 (2.44) 的解为量子力学平面波

$$f_{\boldsymbol{p}}(x) = \mathcal{N}_{p_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px/\hbar}, \quad f^*_{\boldsymbol{p}}(x) = \mathcal{N}_{p_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}, \tag{2.45}$$

其中, $\mathcal{N}_{p_0}$ 取决定能量的归一化因子，且 4-动量满足所说的**质壳条件**

$$p^a p_a - m^2c^2 = 0. \tag{2.46}$$

式 (2.45) 中的两个解相互独立，这一点很重要. 物理上，两者最主要的不同是能量的正负号

$$\mathrm{i}\partial_0 f_{\boldsymbol{p}}(x) = p^0 f_{\boldsymbol{p}}(x), \qquad \mathrm{i}\partial_0 f^*_{\boldsymbol{p}}(x) = -p^0 f^*_{\boldsymbol{p}}(x). \tag{2.47}$$

由于这个原因，他们将分别被称为正能波函数和负能波函数. 后一个的物理意义只有在这个场被量子化后才能够认识清楚. 那个时候，他们与反粒子相联系. 然而，场的量子化超出了本书的范围，只是在本书最后的第 22.2 节中，才略为论述一下它对引力的影响.

2.3.5 作为非相对论极限的薛定谔量子力学

具有拉格朗日密度 (2.26) 的标量场作用量 (2.25) 的非相对论性极限可由如下方法得到：从 $\phi(x)$ 的正频部分去掉对应于静止能量 mc^2 的快速震荡因子，并作替换

$$\phi(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mc^2\,t/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2M}}\psi(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.48}$$

对于式 (2.45) 中的平面波 $f_p(x)$，$\psi(x)$ 场变为 $\mathcal{N}\sqrt{2M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p^0c-mc^2)t/\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$. 在大 c 极限下，第一个指数变为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p^2t/2M}$ [回顾式 (1.159)]. 该结果正是薛定谔方程

$$\left[\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M}\partial_{\boldsymbol{x}}{}^2\right]\psi(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.49}$$

的平面波解. 此方程正是非相对论性作用量

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\,\psi^*(\boldsymbol{x},t)\left[\mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2M}\partial_{\boldsymbol{x}}{}^2\right]\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{2.50}$$

取极值而得到的欧拉–拉格朗日方程.

请注意，式 (2.45) 中具有负频率的平面波 $f_p^*(x)$ 并不具有非相对论性极限，因为它在此极限下会变 $\mathcal{N}\sqrt{2M}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p^0c+mc^2)t/\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$，它具有时间系数 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}mc^2t/\hbar}$，这在 $c\to\infty$ 的极限下将以无穷快的频率震荡，因此，根据**Riemann-Lebesgue引理**，它为零. 这在统计学的意义上是成立的，因为在统计学上零分布意味着所有光滑探测函数与之相乘后的积分都为零. 根据 Riemann-Lebesgue 引理，在大 c 极限下，所有包含 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}mc^2t/\hbar}$ 的光滑函数的积分正是此种情况.

2.3.6 自然单位

利用不同于通常物理 SMI 或 cgs 单位的基本单位 l_0、m_0、t_0、E_0，我们可以在后面的式子中避免出现 $\hbar$ 和 c 等常数. 这些单位的选取使得 $\hbar$ 和 c 的取值为 1. 如果表示为传统的长度、时间、质量和能量，这些**自然单位**为

$$l_0 = \frac{\hbar}{m_0c}, \quad t_0 = \frac{\hbar}{m_0c^2}, \quad m_0 = M, \quad E_0 = m_0c^2, \tag{2.51}$$

其中, M 是某个特定的质量. 例如，如果我们研究质子，我们会选取 $M = m_p$，这样，基本单位为

$$\begin{aligned} l_0 &= 2.103138\times10^{-11}\mathrm{cm} \\ &= \text{质子的康普顿波长}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} t_0 &= l_0/c = 7.0153141\times10^{-22}\mathrm{s} \\ &= \text{光走过康普顿波长所需的时间}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$m_0 = m_p = 1.6726141\times10^{-24}\mathrm{g}, \tag{2.54}$$

$$E_0 = 938.2592\,\mathrm{MeV}. \tag{2.55}$$

对于其他质量，我们很容易按此单位重新标定.

利用自然单位，就可在所有的公式里消掉 c 和 $\hbar$ 并且将作用量简单地写为

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\,\varphi^*(x)(-\partial^2 - m^2)\varphi(x). \tag{2.56}$$

其实，由于我们在处理相对论性粒子，并没有什么原则性的原因要求我们必须假定 $\varphi(x)$ 为复场. 在非相对论性场论中，为了在作用量 (2.50) 中得到时间导数项

$$\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\,\psi^*(x,t)\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(x,t), \tag{2.57}$$

这是必须的. 而对于实场，此项将只不过是个纯粹的边界项，对系统的动力学并无影响. 然而，在式 (2.56) 中，相对论性的场的二阶时间导数确实有着实质性的影响并将导致正确的实场的场方程. 在下一章中，我们将更加清楚地看到，复标量场描述无自旋带电粒子，而实场描述中性粒子.

于是，我们也需要考虑具有如下作用量的实场：

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\phi(x)(-\partial^2 - m^2)\phi(x). \tag{2.58}$$

在此种情况下，按惯例我们在前面添加一个因子 1/2 以对场进行归一化.

无论是对于式 (2.56) 或是式 (2.58) 中的拉格朗日量，欧拉–拉格朗日方程都将给出**Klein-Gordon方程**

$$(-\partial^2 - m^2)\phi(x) = 0, \quad (-\partial^2 - m^2)\varphi(x) = 0, \quad (-\partial^2 - m^2)\varphi^*(x) = 0. \tag{2.59}$$

2.3.7　哈密顿形式

我们可以为标量场构造哈密顿形式. 为此，我们将对正则动量 (2.11) 作一个适当的推广，方程中的指标 k 现在将被替换为连续的空间指标 x，于是我们定义如下**场动量**的密度：

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi(x)} = \partial_0\phi^*(x), \quad \pi^*(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi^*(x)} = \partial_0\phi(x), \tag{2.60}$$

以及 **哈密顿密度**：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) &= \pi(x)\,\partial^0\phi(x) + \partial^0\phi(x)\,\pi^*(x) - \mathcal{L}(x)\\ &= \pi^*(x)\,\pi(x) + \boldsymbol{\nabla}\phi^*(x)\,\boldsymbol{\nabla}\phi(x) + m^2\phi^*(x)\,\phi(x).\end{aligned} \tag{2.61}$$

对于一个实场，我们只不过简单地将复共轭符号去掉即可. 对于 $\mathcal{H}(x)$ 的空间积分即给出场的哈密顿量

$$H = \int \mathrm{d}^3x\,\mathcal{H}(x). \tag{2.62}$$

2.3.8　守恒流

对于薛定谔方程 (2.49) 的解 $\psi(x,t)$，其几率密度为

$$\rho(\boldsymbol{x},t) \equiv \psi^*(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{2.63}$$

相应的粒子流密度为

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\psi^*(\boldsymbol{x},t)(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}})\psi(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\psi^*(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{2.64}$$

它们满足守恒律

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = -\partial_t\rho(\boldsymbol{x},t). \tag{2.65}$$

这点可借助于薛定谔方程 (2.49) 加以证明. 正是由于此项特性，我们可将薛定谔场 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 在任何时间上进行归一化，因为

$$\partial_t\int \mathrm{d}^3x\,\psi^*(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t) = \int \mathrm{d}^3x\,\partial_t\rho(\boldsymbol{x},t) = -\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0. \tag{2.66}$$

对于一个相对论性复场 $\varphi(x)$，存在相似的局域守恒定律. 我们定义**几率流密度**4-矢量 (现在我们采用自然单位制，$\hbar = c = 1$)

$$j_a(x) = -\mathrm{i}\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_a}\varphi, \tag{2.67}$$

它描述带电标量粒子的几率流. 导数算符上的双向箭头就如式 (2.64) 中一样定义为 $\overleftrightarrow{\partial_a} \equiv \overrightarrow{\partial_a} - \overleftarrow{\partial_a}$，即

$$\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_a}\varphi \equiv \varphi^*\partial_a\varphi - (\partial_a\varphi^*)\varphi. \tag{2.68}$$

利用式 (2.59) 中的 Klein-Gordon 方程，很容易可以验证此流密度没有 4 散度：

$$\partial_a j^a(x) = 0. \tag{2.69}$$

这个四维**流守恒律** 使得我们可以将所讨论的场与电磁理论相联系起来，并且将 $ej^a(x)$ 与带电标量粒子的电流等同起来.

守恒流存在的深层原因我们将在第 3 章中阐述，在那里我们将看到它与作用量 (2.56) 在场的相位的任意变换

$$\phi(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\phi(x) \tag{2.70}$$

下的不变性紧密相连.

$j^a(x)$ 的第零分量

$$\rho(x) = j^0(x) \tag{2.71}$$

描述荷密度. $\rho(x)$ 的空间积分量度总的几率. 在自然单位制下，它给出系统的总荷：

$$Q(t) = \int \mathrm{d}^3x\,j^0(x). \tag{2.72}$$

根据局域守恒律 (2.69)，总的荷与时间无关. 这点可以通过如下改写看出来：

$$\dot{Q}(t)=\int \mathrm{d}^3x\,\partial_0 j^0(x)=\int \mathrm{d}^3x\,\partial_a j^a(x)-\int \mathrm{d}^3x\,\partial_i j^i(x)=-\int \mathrm{d}^3x\,\partial_i j^i(x). \quad (2.73)$$

假定在无穷远处电流为零 [与式 (1.204) 比较]，由**高斯散度定理**，我们可知式 (2.73) 右边为零.

2.4　由作用量的极值导出麦克斯韦方程

前述作用量方法可以很容易地进行推广，并被用于电磁场. 通过构造合适的作用量，麦克斯韦场方程可由求极值的方法得到. 相关的场为库仑势 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 和矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$. 电场 $\boldsymbol{E}(x)$ 和磁场 $\boldsymbol{B}(x)$ 可以写为库仑势 $A^0(\boldsymbol{x},t)$ 和矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 的导数形式：

$$\boldsymbol{E}(x)=-\boldsymbol{\nabla}\phi(x)-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}(x), \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(x), \quad (2.75)$$

它们的分量为

$$E^i(x)=-\partial_i\phi(x)-\frac{1}{c}\partial_t A^i(x), \quad (2.76)$$

$$B^i(x)=\epsilon^{ijk}\partial_j A^k(x). \quad (2.77)$$

进一步回想式 (1.172) 中电场和磁场分别等于协变场张量 F^{ab} 的 F^{i0} 和 $-F^{jk}$ 分量，我们也可将之写为

$$F^{i0}(x)=\partial^i\phi(x)-\frac{1}{c}\partial_t A^i(x), \quad (2.78)$$

$$F^{jk}(x)=\partial^j A^k(x)-\partial^k A^j(x), \quad (2.79)$$

其中, $\partial^i=-\partial_i$. 这暗示着可以将库仑势和矢势统一在一个 4-分量矢势中：

$$A^a(x)=\begin{pmatrix}\phi(x,t)\\ A^i(x,t)\end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

利用该矢势，场张量则只是它的 4 维旋度：

$$F^{ab}(x)=\partial^a A^b(x)-\partial^b A^a(x). \quad (2.81)$$

而场 $A^a(x)$ 则如式 (1.209) 中矢量场 $j^a(x)$ 般变换：

$$A^a(x)\xrightarrow{\Lambda}A'^a(x)=\Lambda^a{}_b\,A^b(\Lambda^{-1}x). \quad (2.82)$$

2.4.1 电磁场作用量

麦克斯韦方程可由如下电磁场作用量得到：

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{A}} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x), \tag{2.83}$$

其中对时间的积分由 t_a 积到 t_b，就如式 (2.1) 和式 (2.25) 中那样，相应的拉格朗日密度为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) \equiv \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}\big(A^a(x), \partial^b A^a(x)\big) = -\frac{1}{4}F^{ab}(x)F_{ab}(x) - \frac{1}{c}j^a(x)A_a(x). \tag{2.84}$$

它平方依赖于场 $A^a(x)$ 和它的导数，这样就定义了局域场论 [请回顾第 2.3.1 节]. 并且其中的洛伦兹指标已完全缩并掉了.

如果利用式 (2.74) 和式 (2.75)，将式 (2.84) 分解为电场和磁场部分，则它变为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{E}^2(x) - \boldsymbol{B}^2(x)\right] - \rho(x)A^0(x) + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(x)\boldsymbol{A}(x). \tag{2.85}$$

由变换律 (1.175)、(1.209) 和 (2.82) 我们可以得出，在洛伦兹变换下式 (2.84) 的行为如同一个标量场，就像式 (2.28) 中那样. 结合式 (2.34)，这表明该作用量是洛伦兹不变的.

将 $A^0(x)$ 场用 4-矢量势 $A^a(x)$ 替换后，由欧拉–拉格朗日方程 (2.40) 我们可以得到场方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^a} - \partial_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_b\partial A^a} + \partial_b\partial_c\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\left[\partial_b\partial_c A^a(x)\right]} = 0. \tag{2.86}$$

将拉格朗日密度 (2.84) 代入，我们就得到

$$\partial_b F^{ab} = -\frac{1}{c}j^a, \tag{2.87}$$

这正是非齐次麦克斯韦方程 (1.196). 注意，由于**4-旋度** (2.81) 中的导数的反对称组合，齐次麦克斯韦方程 (1.200)

$$\partial_b \tilde{F}^{ab} = 0 \tag{2.88}$$

自动满足. 只要 4-分量矢势是光滑的并且是单值的，即它满足可积条件

$$(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)A^c(x) = 0, \tag{2.89}$$

式 (2.89) 就是正确的. 本书中，对于所有由场的单值性和相应施瓦茨可积条件而导致的恒等式，我们都将称之为**比安基恒等式**. 通过这一命名，我们意在强调它们极

其相似于黎曼几何中由比安基发现的恒等式，而该式正是黎曼几何中克里斯托夫符号单值性的结果. 对它的推导请参阅第 12.5 节，在那里我们会看到正是施瓦茨可积条件 (12.106) 导致了比安基恒等式 (12.115).

在这个意义上，可以说齐次麦克斯韦方程 (2.88) 就是一个比安基恒等式，因为它直接由式 (2.89) 中 A^c 的交换求导计算而得.

2.4.2 电磁场的另一种作用量

对于式 (2.84) 中的电磁场的拉格朗日密度，还有另外一种表示形式，按照施温格的做法，它直接将场张量作为独立变量包含进来，而仅仅将矢势用作拉格朗日乘子以确保式 (2.87) 中的非齐次麦克斯韦方程

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(A^a(x), F_{ab}(x)) = -\frac{1}{4}F^{ab}(x)F_{ab}(x) - \frac{1}{c}\left[j^a(x) + \partial_b F^{ab}(x)\right]A_a(x). \tag{2.90}$$

对此式关于 F_{ab} 取极值后可看到，正如式 (2.81) 中所示，F_{ab} 即为矢势的 4-旋度. 它的一个结果就是 F_{ab} 满足式 (1.201) 中的比安基恒等式.

如果将式 (2.90) 分解成电场部分和磁场部分，则它可表达为

$$\begin{aligned}\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}\big(A^0(x), \boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{E}(x), \boldsymbol{B}(x)\big) = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{E}^2(x) - \boldsymbol{B}^2(x)\right] \\ + \left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x) - \rho(x)\right]A^0(x) - \left[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(x) - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E}(x) - \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(x)\right]\cdot\boldsymbol{A}(x),\end{aligned} \tag{2.91}$$

其中，拉格朗日乘子 $A^0(x)$ 和 $\boldsymbol{A}(x)$ 直接保证了式 (1.187) 中的库仑定律和式 (1.188) 中的安培定律.

上述方程式只在真空中成立. 在具有非零介电常数 ε 和磁导率 μ 的均匀介质中，电位移场为 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ ，而磁场为 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu$，相应的拉格朗日密度 (2.90) 则为

$$\begin{aligned}\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{E}(x)\cdot\boldsymbol{D}(x) - \boldsymbol{B}(x)\cdot\boldsymbol{H}(x)\right] \\ + \left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(x) - \rho(x)\right]A^0(x) - \left[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(x) - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{D}(x) - \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(x)\right]\cdot\boldsymbol{A}(x).\end{aligned} \tag{2.92}$$

现在做关于拉格朗日乘子 $A^0(x)$ 和 $\boldsymbol{A}(x)$ 的变分将分别得到式 (1.192) 和式 (1.193) 中所示的介质中的库仑和安培定律：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}(x) = \rho(x), \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(x) - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{D}(x) = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}(x). \tag{2.93}$$

而作关于 $\boldsymbol{D}(x)$ 和 $\boldsymbol{H}(x)$ 的变分则得到和真空中一样的旋度方程 (2.74) 和 (2.75)，因此齐次麦克斯韦方程 (1.189) 和 (1.190)，也即比安基恒等式 (1.201) 并不受介质的影响.

2.4.3 电磁场的哈密顿量

如同在式 (2.60)～ 式 (2.62) 中那样，通过定义场动量密度

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}}{\partial \partial^0 A^a(x)} = -F_{0a}(x) \tag{2.94}$$

和哈密顿密度

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{H}}(x) = \pi_a(x)\,\partial^0 A^a(x) - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x), \tag{2.95}$$

我们可以得到电磁场的哈密顿量. 值得注意的是，由于 $\partial \overset{\text{em}}{\mathcal{L}} / \partial \dot{A}^0$ 等于零，所以 A^0 不具有共轭场动量. 因此 A^0 并不是一个合适的动力学变量. 事实上，将式 (2.84) 和式 (2.94) 代入式 (2.95)，我们得到

$$\begin{aligned}\overset{\text{em}}{\mathcal{H}} &= -F_{0a}\partial^0 A^a - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}} = -\frac{1}{c}F_{0a}F^{0a} - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}} - F_{0a}\partial^a A^0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla} A^0 + \frac{1}{c} j^a A_a.\end{aligned} \tag{2.96}$$

将它对全空间进行积分给出

$$\overset{\text{em}}{H} = c\int \mathrm{d}^3 x\, \overset{\text{em}}{\mathcal{H}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2\right) - \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\right]. \tag{2.97}$$

这个结果就是熟知的具有外在电流的电磁场的能量[6]. 为了从式 (2.96) 得到这个结果，分部积分是必不可少的，其中一个无穷远空间表面项被忽略掉，因为那里的荷密度 $\rho(x)$ 总是假定为零. 这样一来，库仑定律 (1.187) 直接就导致了式 (2.97).

乍一看，可能会奇怪为什么静电能没有明确地包含在式 (2.97) 中. 其实，它已包含在 $\boldsymbol{E}^2$ 项中. 利用库仑定律 (1.187)，我们有

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}^2 A^0 - \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{\nabla}\cdot A = \rho\,. \tag{2.98}$$

将 $\boldsymbol{E}$ 分解成横场和纵场两部分

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + \boldsymbol{E}_l, \tag{2.99}$$

它们分别满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_t = 0$ 和 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_l = 0$，于是，我们看到式 (2.98) 意味着

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_l = \rho\,. \tag{2.100}$$

因此，纵场部分可以写为某个标量势 ϕ' 的导数形式

$$\boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{\nabla}\phi', \tag{2.101}$$

依据式 (2.100)，这个标量势可由下式计算得到：

$$\phi'(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\rho(x) = -\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(\boldsymbol{x}',t). \tag{2.102}$$

利用此式，我们看到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{E}^2 &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left({\boldsymbol{E}_t}^2 + {\boldsymbol{E}_l}^2\right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[\boldsymbol{E}_t^2 + \left(\partial_i \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\phi'\right)\left(\partial_i \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\phi'\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\, {\boldsymbol{E}_t}^2 + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \mathrm{d}^3x' \rho(\boldsymbol{x},t)\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\rho(\boldsymbol{x}',t).\end{aligned} \tag{2.103}$$

最后一项正是与电荷密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ 相关的库仑能.

2.4.4 麦克斯韦理论的规范不变性

式 (2.81) 中的 4 维旋度很明显在如下的规范变换下是不变的：

$$A_a(x) \longrightarrow A'_a(x) = A_a(x) + \partial_a \Lambda(x), \tag{2.104}$$

其中, $\Lambda(x)$ 为任意一个光滑场，它满足可积条件

$$(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\Lambda(x) = 0. \tag{2.105}$$

规范不变性意味着包含在 $A^a(x)$ 内的标量场自由度并不对物理可观测电磁场 $\boldsymbol{E}(x)$ 和 $\boldsymbol{B}(x)$ 有所贡献. 这个自由度可以通过**规范固定**移除掉. 一种做法是要求矢势满足**洛伦兹规范条件**

$$\partial_a A^a(x) = 0. \tag{2.106}$$

对于这样的矢量场，场方程 (2.87) 将退耦合，并且矢势 $A^a(x)$ 的四个分量都满足无质量Klein-Gordon 方程：

$$-\partial^2 A_b(x) = 0. \tag{2.107}$$

如果一个矢势 $A^a(x)$ 不满足洛伦兹规范条件 (2.106)，我们总可以对其进行式 (2.104) 中的规范变换，使其变到一个新的没有 4 散度的场 $A'^a(x)$. 为此，我们只需在式 (2.104) 中选择一个满足非齐次方程

$$-\partial^2 \Lambda(x) = \partial_a A^a(x) \tag{2.108}$$

的规范函数 $\Lambda(x)$. 这样，所得 $A'^a(x)$ 将满足 $\partial_a A'^a(x) = 0$.

方程 (2.108) 有无穷多个解. 给定一个可导致洛伦兹规范的解 $\Lambda(x)$，我们可以将任何一个齐次 Klein-Gordon 方程的解加到它上面而不会改变 $A^a(x)$ 的 4 散度. 相关的规范变换

$$A_a(x) \longrightarrow A_a(x) + \partial_a \Lambda'(x), \quad \partial^2 \Lambda'(x) = 0, \tag{2.109}$$

称作**受限规范变换** 或**第二类规范变换**. 如果一个洛伦兹规范中的矢势 $A^a(x)$ 为方程 (2.87) 的解，则第二类规范变换可用去掉它的空间散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$. 在式 (2.109) 中的变换下，分量 $A^0(\boldsymbol{x},t)$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 变为

$$\begin{aligned}A^0(x)\to A'^0(\boldsymbol{x},t) &= A^0(\boldsymbol{x},t)+\partial_0\Lambda'(\boldsymbol{x},t),\\ \boldsymbol{A}(x)\to\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{\nabla}\Lambda'(\boldsymbol{x},t).\end{aligned} \tag{2.110}$$

这样，如果我们取规范函数为

$$\Lambda'(\boldsymbol{x},t)=-\int \mathrm{d}^3x'\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}',t), \tag{2.111}$$

则

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Lambda'(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t), \tag{2.112}$$

这使得规范变换后的场 $\boldsymbol{A}'(x,t)$ 无散度：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x},t)]=0. \tag{2.113}$$

此规范条件

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{2.114}$$

就是**库仑规范**或**辐射规范**.

微分方程 (2.112) 的解 (2.111) 其实还没有完全确定下来，还可以相差任意一个满足如下齐次泊松方程

$$\boldsymbol{\nabla}^2\Lambda''(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{2.115}$$

的函数 $\Lambda''(x)$. 不过，结合式 (2.109) 中所蕴含的特性 $\partial^2\Lambda''(\boldsymbol{x},t)=0$，我们有

$$\partial_t^2\Lambda''(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{2.116}$$

这使得 $\Lambda''(\boldsymbol{x},t)$ 只能为 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的平凡的线性函数，从而对式 (2.110) 只贡献一个常数. 而这又可进一步确定为零，因为我们总是假定无穷远处的场 $A^a(x)$ 在规范变换前和变换后都为零.

从场方程 (2.87) 中移除矢势 $A^a(x)$ 的第零分量，我们得到另一个可能的规范. 为此，我们利用下列规范函数：

$$\Lambda(\boldsymbol{x},t)=-\int^t \mathrm{d}t'\,A_0(\boldsymbol{x},t'), \tag{2.117}$$

而不是式 (2.111) 中的规范函数，进行式 (2.104) 中的规范变换. 新得到的场 $A'^a(x)$ 不具有第零分量

$$A'^0(x) = 0, \tag{2.118}$$

这被称为**轴规范**. 如此，除去一个平凡的常数外，方程 (2.117) 的解就被确定了，不再有多余的规范自由度.

对于自由场，库仑规范和轴规范是相一致的. 这正是式 (2.98) 中无荷库仑定律 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$ 的结果. 将 $\boldsymbol{E}(x)$ 显式地用矢势的空间和时间分量表达为

$$\boldsymbol{E}(x) = -\partial_0\boldsymbol{A}(x) - \boldsymbol{\nabla}A^0(x), \tag{2.119}$$

则库仑定律可写为

$$\boldsymbol{\nabla}^2 A^0(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t). \tag{2.120}$$

这表明如果 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)=0$，则我们也有 $A^0(x)=0$ (假定无穷远零边界条件), 反过来也一样.

微分方程 (2.120) 可以作如下积分：

$$A^0(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}',t). \tag{2.121}$$

在一个具有无穷远渐近消失的场的空间里，我们无法自由地在式 (2.121) 左边加进一个齐次泊松方程

$$\boldsymbol{\nabla}^2 A^0(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.122}$$

的非平凡解.

当存在电荷时，库仑定律将具有表示源的项

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x},t), \tag{2.123}$$

其中, $\rho(x,t)$ 是电荷密度. 在这种情况下，为零的 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x,t)$ 将不再意味着 $A^0(x,t)\equiv 0$. 于是我们就有了选择规范的可能性，使 $A(x,t)$ 满足库仑规范

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \equiv 0, \tag{2.124}$$

或轴规范

$$A^0(\boldsymbol{x},t) \equiv 0. \tag{2.125}$$

只有对于自由场的情况，这两种规范才是一致的.

当进行了规范固定后，矢势 $A^a(x)$ 一般来讲在洛伦兹变换下并不按照 4-矢量来变换. 只有当规范固定是洛伦兹不变的，比如说取洛伦兹规范条件 (2.106) 的时候，根据式 (1.209) 和式 (1.216)，矢势在洛伦兹变换下才会如下式般变换

$$A^a(x) \xrightarrow{\Lambda} A'_\Lambda{}^a(x) = \Lambda^a{}_b A^b(\Lambda^{-1}x) = [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{J}^{ab}} A]^a(\Lambda^{-1}x). \tag{2.126}$$

在库仑规范下，为了保证变换后的矢势同样满足库仑规范，式 (2.126) 右边需要通过额外增加一个依赖于 Λ 的规范变换项来进行修正.

2.5　带电点粒子的麦克斯韦–洛伦兹作用量

现在我们来考虑与电磁场相互作用的有质量带电相对论性粒子，并用作用量方法推导第 1.10 节中的麦克斯韦 – 洛伦兹方程. 一个携带电荷 e 的单个粒子的电流为

$$j^a(x) = ec\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \dot{q}^a(\tau)\delta^{(4)}(x - q(\tau)), \tag{2.127}$$

则在外场中的总的作用量由式 (2.83) 和式 (2.19) 的和给出：

$$\mathcal{A} = \overset{\text{em}}{\mathcal{A}} + \overset{\text{m}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\, F^{ab}(x)F_{ab}(x) - mc^2\int_{\tau_a}^{\tau_b}\mathrm{d}\tau - \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\, j^a(x)A_a(x). \tag{2.128}$$

用物理时间 t 来表示的话，后面两项可以分解成如下类空和类时分量：

$$-mc^2\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{\dot{\boldsymbol{q}}^2}{c^2}} - e\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\, A^0(\boldsymbol{q}(t),t) + \frac{e}{c}\int_{t_a}^{t_b}\mathrm{d}t\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}(t),t). \tag{2.129}$$

通过将自由粒子的作用量写为式 (2.19) 的形式，对式 (2.128) 作关于 $\delta q^a(\tau)$ 的变分 并取极值，我们就可以得到相应的运动方程. 这就给出了式 (1.170) 中的**麦克斯韦–洛伦兹方程**：

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2q^a}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{e}{c}\left[-\frac{\partial}{\partial\tau}A^a + \frac{\mathrm{d}q^b}{\mathrm{d}\tau}\partial^a A_b\right] = \frac{e}{c}\left[-\frac{\mathrm{d}q^b}{\mathrm{d}\tau}\partial_b A^a + \frac{\mathrm{d}q^b}{\mathrm{d}\tau}\partial^a A_b\right] \\ &= \frac{e}{c}F_{ab}\frac{\mathrm{d}q^b}{\mathrm{d}\tau}. \end{aligned} \tag{2.130}$$

方程右边正是式 (1.184) 中的洛伦兹力.

注意，当存在电磁场时，正则动量 (2.11) 不再如式 (2.15) 中等于物理动量，矢势将对它有额外贡献：

$$P_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\left(m\gamma\dot{q}^i + \frac{e}{c}A^i\right) = p_i + \frac{e}{c}A_i. \tag{2.131}$$

将第零分量包含进来后，正则 4- 动量为

$$P_a = p_a + \frac{e}{c} A_a. \tag{2.132}$$

P_a 的第零分量正与由勒让德变换所定义的能量 [参看式 (2.97)] 和 $1/c$ 的乘积是相一致的：

$$P_0 = \frac{1}{c}(H + eA^0) = -\frac{1}{c}(P_i \dot{q}^i - L). \tag{2.133}$$

2.6 具有电磁相互作用的标量场

如果一个粒子的几率振幅由式 (1.160) 中的平面波描述，则它的能量–动量可由对该平面波求时空导数得到

$$\mathrm{i}\hbar\partial_a \phi_p(x) = p_a \phi_p(x). \tag{2.134}$$

当存在电磁场时，该动量 4-矢量所承担的角色将由式 (2.132) 中的动量来取代. 在标量场的拉格朗日密度 (2.27) 中，这可通过所谓的**最小替代**来实现，即用**协变导数**代换掉普通导数：

$$\partial_a \phi(x) \to D_a \phi(x) \equiv \left[\partial_a + \mathrm{i}\frac{e}{c\hbar} A_a(x)\right] \phi(x). \tag{2.135}$$

于是具有电磁相互作用的标量场拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}(x) = \hbar^2 [D_a \phi(x)]^* D^a \phi(x) - m^2 c^2 \phi^*(x)\phi(x) - \frac{1}{4} F^{ab}(x) F_{ab}(x). \tag{2.136}$$

它通过**标量电动力学**定律支配着带电无自旋粒子系统的行为.

在进行式 (2.104) 中电磁场的局域规范变换的同时对标量场乘以一个依赖于 x 的相因子

$$\varphi(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}eA(x)/c} \varphi(x), \tag{2.137}$$

则上述拉格朗日密度表达式是不变的.

对自然单位下的作用量 $\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x)$ 求极值，我们就得到了欧拉–拉格朗日方程及其共轭

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi^*(x)} = (-D^2 - m^2)\varphi(x), \qquad \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi(x)} = (-D^{*2} - m^2)\varphi^*(x). \tag{2.138}$$

当存在电磁场时，式 (2.67) 中的粒子流密度就变成了电流密度

$$j_a(x) = e\,\frac{\mathrm{i}}{2}\phi^* D_a \phi + \text{c.c.} = e\,\frac{\mathrm{i}}{2}\phi^* \overleftrightarrow{\partial_a} \phi - \frac{e^2}{c} A_a(x)\phi^*\phi. \tag{2.139}$$

它满足与自由场流密度相同的守恒律 (2.69)，这可以通过以下简短计算加以验证：

$$\partial_a j^a = \partial_a \left[\frac{\mathrm{i}}{2}\phi^* D^a \phi\right] + \mathrm{c.c.} = \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_a \phi^* D^a \phi + \frac{\mathrm{i}}{2}\phi^* \partial_a D^a \phi + \mathrm{c.c.} \tag{2.140}$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_a \phi^* D^a \phi + \frac{\mathrm{i}}{2}\phi^* D^2 \phi - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{e}{c}A^a \phi^* D_a \phi + \mathrm{c.c.} = \frac{\mathrm{i}}{2}D_a^* \phi^* D^a \phi - m^2 \frac{\mathrm{i}}{2}\phi^* \phi + \mathrm{c.c.} = 0.$$

2.7 狄 拉 克 场

可以通过求极值而获得狄拉克方程 (1.218) 的作用量在自然单位下可写为

$$\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4 x \; \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}(x) \equiv \int \mathrm{d}^4 x \, \bar{\psi}(x) \left(\mathrm{i}\gamma^a \partial_a - m\right) \psi(x), \tag{2.141}$$

其中

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0, \tag{2.142}$$

并且矩阵 γ^a 满足式 (1.224) 中的反对易法则. 狄拉克方程及其共轭方程可通过极值原理得到

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}}{\delta \bar{\psi}(x)} = \big(\mathrm{i}\gamma^a \partial_a - m\big)\psi(x) = 0, \qquad \frac{\delta \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}}{\delta \psi(x)} = \bar{\psi}(x)\big(-\mathrm{i}\gamma^a \overleftarrow{\partial}_a - m\big)\psi(x) = 0. \tag{2.143}$$

在式 (1.236) 中旋量的洛伦兹变换下，作用量 (2.141) 是不变的. 质量项的不变性可由以下事实得来

$$D^\dagger(\Lambda)\gamma^0 D(\Lambda) = \gamma^0. \tag{2.144}$$

通过将式 (1.219) 和式 (1.233) 中具体的矩阵表达式代入，此式可以很容易被验证. 如我们定义

$$\bar{D} \equiv \gamma^0 D^\dagger \gamma^0, \tag{2.145}$$

则式 (2.145) 意味着

$$\bar{D}(\Lambda) D(\Lambda) = 1, \tag{2.146}$$

因此，拉格朗日密度中的质量项就像式 (1.168) 中的标量场一样作变换：

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'_\Lambda(x)\psi'_\Lambda(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x). \tag{2.147}$$

现在考虑作用量 (2.141) 中的梯度项. 它的不变性正是式 (1.235) 中得到的洛仑群旋量表示下狄拉克矩阵矢量特性的结果. 由式 (2.146) 我们推出 $D^{-1}(\Lambda) = \bar{D}(\Lambda)$，这使得我们可以将式 (2.146) 的矢量变换律写为

$$D(\Lambda)\gamma^a \bar{D}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^a{}_b \gamma^b, \quad \bar{D}(\Lambda)\gamma^a D(\Lambda) = D^{-1}(\Lambda)\gamma^a D(\Lambda) = \Lambda^a{}_b \gamma^b. \tag{2.148}$$

由此，我们立即可以得到

$$\bar{\psi}(x)\gamma^a\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'(x)\gamma^a\psi'(x) = \Lambda^a{}_b\bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^b\psi(\Lambda^{-1}x), \tag{2.149}$$

以及

$$\bar{\psi}(x)\gamma^a\partial_a\psi(x) \xrightarrow{\Lambda} \bar{\psi}'(x)\gamma^a\partial_a\psi'(x) = [\bar{\psi}\gamma^b\partial_a\psi](\Lambda^{-1}x). \tag{2.150}$$

这样，狄拉克–拉格朗日密度中的梯度项也如标量场一样变换，因此整个拉格朗日密度就如同式 (2.28) 中那样变换，根据式 (2.34)，可得作用量 (2.141) 在洛伦兹变换下是不变的.

从第 2.6 节的讨论中我们知道如何将狄拉克场与电磁场相耦合. 我们只须将拉格朗日密度中的导数用式 (2.135) 中的协变导数替换掉，这样就得到了规范不变的电动力学的拉格朗日密度

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^a D_a - m\right)\psi(x) - \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\, F^{ab}(x)F_{ab}(x). \tag{2.151}$$

如果我们在进行局域洛伦兹变换 (2.104) 的同时对狄拉克场乘以一个依赖于 x 的相因子

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\Lambda(x)/c}\psi(x), \tag{2.152}$$

则上述方程是不变的.

此拉格朗日密度中的相互作用项完全来自于协变导数，它可以更具体地写为

$$\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(x) = -\frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\, A_a(x)j^a(x), \tag{2.153}$$

其中

$$j^a(x) \equiv e\,\bar{\psi}(x)\gamma^a\psi(x) \tag{2.154}$$

是电子的流密度.

通过对作用量 $\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4x \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}(x)$ 取极值，我们可以得到相应的欧拉–拉格朗日方程及其共轭方程

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}}{\delta\bar{\psi}(x)} = \big(\mathrm{i}\gamma^a D_a - m\big)\psi(x) = 0, \qquad \frac{\delta \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{A}}}{\delta\psi(x)} = \bar{\psi}(x)\big(-\mathrm{i}\gamma^a \overleftarrow{D}_a^{*} - m\big)\psi(x) = 0. \tag{2.155}$$

对于遵循这些方程的经典场，流密度 (2.154) 满足与式 (2.140) 中标量场相同的局域守恒定律：

$$\partial_a j^a(x) = 0. \tag{2.156}$$

这可由比式 (2.140) 中更为简便的计算加以验证：

$$\partial_a j^a = e\partial_a(\bar{\psi}\gamma^a\psi) = e\bar{\psi}\gamma^a\overleftarrow{\partial}_a\psi + e\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi = e\bar{\psi}\gamma^a\overleftarrow{D}{}_a^{*}\psi + e\bar{\psi}\gamma^a D_a\psi = 0. \tag{2.157}$$

2.8 量 子 化

给定一个场的作用量，有两种途径对该理论进行量子化. 一种是基于传统的行之有效的算符的方法. 这里我们将对此不做展开. 我们所要做的是基于费恩曼的路径积分理论. 费恩曼认识到一个事件发生的物理振幅可以通过对所有可能导致该事件的经典历史路径进行求和而得到. 每条历史路径携带一个几率振幅 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{A}/\hbar}$，其中 $\mathcal{A}$ 为该系统的作用量.

对于一个场论，对历史的求和将遍历所有可能的依赖于时间的场的构型

$$\text{振幅} = \sum_{\text{场构型}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{A}/\hbar}. \tag{2.158}$$

量子理论这一形式的一个重要的优势是可以将时间 t 解析延拓到 $\tau = -\mathrm{i}t$，从而导致相应的统计理论. 由量子力学中的时间演化算符 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hat{H}/\hbar}$ 和统计物理中的玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}$ 间的相似性可以看出，这一点是十分明显的. β 通过玻尔兹曼常量与温度的倒数相联系：

$$\beta \equiv 1/k_{\mathrm{B}}T. \tag{2.159}$$

解析延拓可以直接应用在作用量 $\mathcal{A}$ 上，于是我们得到

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L}(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L}(\boldsymbol{x},-\mathrm{i}\tau) \equiv \mathrm{i}\int \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \mathrm{i}\mathcal{A}^{\mathrm{E}}. \tag{2.160}$$

所得 $\mathcal{A}^{\mathrm{E}}$ 被称作**欧几里得作用量**，而 $\mathcal{L}^{\mathrm{E}}$ 则是相应的**欧几里得拉格朗日密度**. 这种命名意味着，在 $t = -\mathrm{i}\tau$ 的延拓下，闵可夫斯基标量积 $xx' = c^2tt' - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$ 化为欧几里得形式 $xx' = -(\tau\tau' + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}') = -x^{\mathrm{E}}x'^{\mathrm{E}}$. 这里我们引入欧几里得矢量 $x^{\mathrm{E}} \equiv (c\tau, \boldsymbol{x})$. 将欧几里得时空体积元 $\mathrm{d}\tau\mathrm{d}^3x$ 记作 $\mathrm{d}^4x^{\mathrm{E}}$，我们可将欧几里得作用量写为

$$\mathcal{A}^{\mathrm{E}} = \int \mathrm{d}^4x^{\mathrm{E}}\, \mathcal{L}^{\mathrm{E}}(\tau, \boldsymbol{x}). \tag{2.161}$$

量子力学振幅因此化为

$$Z = \sum_{\text{场构型}} \mathrm{e}^{-\mathcal{A}^{\mathrm{E}}/\hbar}. \tag{2.162}$$

这正是该系统的量子统计配分函数. 通过让所有的场在 $(0, \hbar\beta)$ 区间上为周期函数，我们可以据此讨论有限温度 T 的情形. 对于费米场，由于其反对称统计特性它必须是反周期的.

文献与注记

[1] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[2] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing Co., Singapore 2004, 4th extended edition, pp. 1–1547 (`kl/b5`)，其中`kl` 为以下网址的缩写：`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert`.

[3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford, 1975.

[4] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I: *Superflow and Vortex Lines, Disorder Fields, Phase Transitions*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b1`).

[5] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II: *Stresses and Defects, Differential Geometry, Crystal Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`).

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1956, Sect. 15.2.

第 3 章　连续对称性和守恒定律、Noether 定理

As far as the laws of mathematics refer to reality,
they are not certain; and as far as they are
certain, they do not refer to reality.
ALBERT EINSTEIN (1879～1955)

在很多物理体系中，作用量在一些连续性变换下是不变的. 如果是这样，那么就存在着与电动力学中电荷守恒和电流守恒相类似的局域和整体的**守恒定律**. 利用泊松括号，这种与电荷的相似性可用来构建对称变换，并由此推导出上述守恒律. 在进行场量子化后，泊松括号就变成与之关联的算符的对易子.

3.1　连续对称性和守恒定律

首先来考虑一个简单的力学体系，它具有下面这个一般性的作用量

$$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\, L(q(t), \dot{q}(t)), \tag{3.1}$$

然后对它的动力学变量作如下的连续局域变换：

$$q(t) \to q'(t) = f(q(t), \dot{q}(t)), \tag{3.2}$$

其中，$f(q(t), \dot{q}(t))$ 是 $q(t)$ 和 $\dot{q}(t)$ 的某种函数. 一般来讲，同式 (2.1) 中所示的一样，$q(t)$ 会携带各种各样的指标. 不过，为了简便起见，我们在这里把它省略了. 如果变换后的作用量

$$\mathcal{A}' \equiv \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t\, L(q'(t), \dot{q}'(t)) \tag{3.3}$$

与 $\mathcal{A}$ 只相差一个边界项的话，则式 (3.2) 就被称为是对称变换.

3.1.1　对称变换的群结构

对于任何两个**对称变换**，我们通过依次操作变换来定义它们的乘积. 很显然，所得结果也一定是一个对称变换. 当然，所有这些变换都可以被复原，即它们具有逆. 这样，对称变换就构成了群，称作体系的**对称群**. 需要特别注意的是，一定**不要**利用运动方程来检验作用量 $\mathcal{A}'$ 与 $\mathcal{A}$ 的等价性.

3.1.2　实质变分

对无穷小对称变换 (3.2)，变换前后的差

$$\delta_{\rm s} q(t) \equiv q'(t) - q(t) \tag{3.4}$$

称为**对称变分**(symmetry variation). 它具有如下一般形式：

$$\delta_{\rm s} q(t) = \epsilon \Delta(q(t), \dot{q}(t)), \tag{3.5}$$

其中，ϵ 是一个小参量. 不要将对称变分与第 2.1 节中在推导欧拉–拉格朗日方程 (2.8) 时用到的变分 $\delta q(t)$ 相混淆. 那些变分在端点处总为零，$\delta q(t_b) = \delta q(t_a) = 0$ [参看式 (1.4)]. 然而对于对称变分 $\delta_{\rm S} q(t)$ 来说，这通常是不正确的.

对称变分 (3.5) 的另一个名称为**实质变分**(substantial variation). 对于任何一个时空函数 $f(x)$ ，它被定义为 $f(x)$ 与变换后的函数 $f'(x)$ 的差：

$$\delta_{\rm s} f(x) \equiv f'(x) - f(x). \tag{3.6}$$

注意，函数 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 是在**相同坐标值**上取值的，它们很可能对应于空间的两个**不同的点**.

3.1.3　守恒定律

现在让我们来计算在实质变分 (3.5) 下作用量的变化. 利用微分的链式法则以及分部积分，我们得到

$$\delta_{\rm s} \mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} {\rm d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right] \delta_{\rm s} q(t) + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta_{\rm s} q(t) \right|_{t_a}^{t_b}. \tag{3.7}$$

对于式 (2.8) 中欧拉–拉格朗日方程的解，式 (3.7) 第一项为零，只剩下了第二项. 对于这样的解，我们记为 $q_{\rm cl}(t)$，并称它们为**经典轨道**. 对于经典轨道，作用量的变化为

$$\delta_{\rm s} \mathcal{A} = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta_{\rm s} q(t) \right|_{t_a}^{t_b} = \epsilon \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta(q, \dot{q}) \right|_{t_b}^{t_a}, \quad 其中 \;\; q(t) = q_{\rm cl}(t). \tag{3.8}$$

由约定，$\delta_{\rm s} q(t)$ 是 $\mathcal{A}$ 的对称变换，这意味着对于**所有的**轨道 $q(t)$，$\delta_{\rm s} \mathcal{A}$ 或为零或等于一个边界项. 对于第一种情况，变量

$$Q(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varDelta(q, \dot{q}), \qquad 其中 \;\; q(t) = q_{\rm cl}(t) \tag{3.9}$$

在时刻 $t = t_a$ 和 $t = t_b$ 处是一样的. 因为 t_b 是任意的，因此 $Q(t)$ 是**不依赖于**时间 t 的：

$$Q(t) \equiv Q. \tag{3.10}$$

这样，$Q(t)$ 是沿着该轨道的一个**运动常量**，即它是一个**守恒量**，称作**Noether 荷**.

在第二种情况中，$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{A}$ 等于一个边界项，

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{A}=\epsilon\,\Lambda(q,\dot{q})\Big|_{t_a}^{t_b}, \tag{3.11}$$

守恒的 Noether 荷变为

$$Q(t)=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\Delta(q,\dot{q})-\Lambda(q,\dot{q}),\qquad 其中\ \ q(t)=q_{\mathrm{cl}}(t). \tag{3.12}$$

其实，我们可以由拉格朗日量 $L(q,\dot{q})$ 出发导出运动常量 (3.12) 而不需要借助作用量. 我们将 $L(q,\dot{q})$ 的实质变分作如下展开：

$$\delta_{\mathrm{s}}L\equiv L\left(q+\delta_{\mathrm{s}}q,\dot{q}+\delta_{\mathrm{s}}\dot{q}\right)-L(q,\dot{q})=\left[\frac{\partial L}{\partial q(t)}-\partial_t\frac{\partial L}{\partial\dot{q}(t)}\right]\delta_{\mathrm{s}}q(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}(t)}\delta_{\mathrm{s}}q(t)\right]. \tag{3.13}$$

由于欧拉–拉格朗日方程 (2.8) 的右边第一项跟前面的情形一样等于零，只剩下了最后一项. 作用量在相差一个可能的式 (3.11) 中表面项的意义上的不变性，其实等同于假定拉格朗日量的实质变分最多只是某个函数 $\Lambda(q,\dot{q})$ 的**时间全微分**：

$$\delta_{\mathrm{s}}L(q,\dot{q},t)=\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(q,\dot{q}). \tag{3.14}$$

将此代入方程 (3.13) 的左边，我们得到

$$\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\,\Delta(q,\dot{q})-\Lambda(q,\dot{q})\right]=0,\quad q(t)=q_{\mathrm{cl}}(t), \tag{3.15}$$

于是我们就再次得到了式 (3.12) 中守恒的 Noether 荷.

3.1.4　守恒定律的另外一种推导

我们对式 (3.1) 中的作用量作一个任意的变分 $\delta q(t)$，它在边界上可以是非零的. 沿着经典轨道 $q_{\mathrm{cl}}(t)$，则式 (3.7) 中的第一项为零，并且作用量最多差一个边界项：

$$\delta\mathcal{A}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q\Big|_{t_a}^{t_b},\quad q(t)=q_{\mathrm{cl}}(t). \tag{3.16}$$

这样的考虑使得我们对 Noether 定理有了另外一种推导方法. 考虑对 $q(t)$ 进行所谓的**局域对称变换**，这样就将之前式 (3.5) 中的实质变分进行了扩展，使得其中的参数变为**依赖于时间的** $\epsilon(t)$：

$$\delta_{\mathrm{s}}^{t}q(t)=\epsilon(t)\Delta(q(t),\dot{q}(t)). \tag{3.17}$$

δ_{s}^{t} 中的上标强调了 $\epsilon(t)$ 中对时间的依赖性. 如果对经典轨道 $q_{\mathrm{cl}}(t)$ 进行式 (3.17) 中的变分操作，则前后作用量将相差一个式 (3.16) 中的边界项.

这可以用一种更加合适的方法表示出来. 为此，我们引入一个经过无穷小变换的轨道

$$q^{\epsilon(t)}(t) \equiv q(t) + \delta_{\mathrm{s}}^{t} q(t) = q(t) + \epsilon(t) \varDelta(q(t), \dot{q}(t)), \tag{3.18}$$

相应的变换后的拉格朗日量为

$$L^{\epsilon(t)} \equiv L(q^{\epsilon(t)}(t), \dot{q}^{\epsilon(t)}(t)). \tag{3.19}$$

于是，作用量关于含时参量 $\epsilon(t)$ 的局域实质变分为

$$\delta_{\mathrm{s}}^{t} \mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \epsilon(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \dot{\epsilon}(t)} \right] \epsilon(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \dot{\epsilon}} \right] \epsilon(t) \bigg|_{t_a}^{t_b}. \tag{3.20}$$

由于作用量沿经典路径取极值，因此，无穷小变换后的作用量

$$\mathcal{A}^{\epsilon} \equiv \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}t \, L(q^{\epsilon(t)}(t), \dot{q}^{\epsilon(t)}(t)) \tag{3.21}$$

必满足方程

$$\frac{\delta \mathcal{A}^{\epsilon}}{\delta \epsilon(t)} = 0. \tag{3.22}$$

这对于任何依赖于时间的 $\epsilon(t)$ 都满足，尤其是对于 $\epsilon(t)$ 在端点处为零的情形. 在这种情形下，式 (3.22) 将给出欧拉–拉格朗日型的方程

$$\frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \epsilon(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \dot{\epsilon}(t)} = 0, \quad q(t) = q_{\mathrm{cl}}(t). \tag{3.23}$$

这也可以用以下方法进行明确的验证：利用微分的链式法则对式 (3.19) 进行微分运算

$$\frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \epsilon(t)} = \frac{\partial L}{\partial q(t)} \varDelta(q, \dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \dot{\varDelta}(q, \dot{q}), \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \dot{\epsilon}(t)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \varDelta(q, \dot{q}), \tag{3.25}$$

并将通常的欧拉–拉格朗日方程 (1.5) 代入方程右边. 注意式 (3.25) 也可写为

$$\frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \dot{\epsilon}(t)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{\delta_{\mathrm{s}} q(t)}{\epsilon(t)}. \tag{3.26}$$

我们现在可以利用对称性假定，即在时间无关的变换 (3.17) 下作用量是一个纯表面项. 这意味着

$$\frac{\partial L^{\epsilon}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \epsilon(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varLambda. \tag{3.27}$$

将此与式 (3.23) 结合，我们就得到了荷的守恒定律：

$$Q = \frac{\partial L^{\epsilon(t)}}{\partial \dot{\epsilon}(t)} - \Lambda, \quad q(t) = q_{\text{cl}}(t). \tag{3.28}$$

这里将式 (3.25) 代入后，我们发现它与式 (3.12) 中的荷是一样的.

3.2　时间平移不变性和能量守恒

作为一个简单而又在物理上十分重要的例子，我们来考虑拉格朗日量不显含时间的情形，即 $L(q(t), \dot{q}(t), t) \equiv L(q(t), \dot{q}(t))$. 对该系统进行一个时间变换，即将 t 时刻的事件平移到一个新的时刻

$$t' = t - \epsilon. \tag{3.29}$$

时间变换后的轨道对时间有如下依赖关系：

$$q'(t') = q(t), \tag{3.30}$$

即变换后的轨道 $q'(t)$ 在 t' 时刻具有与轨道 $q(t)$ 在原始时刻 t 相同的值. 对于拉格朗日量，这表明

$$L'(t') \equiv L(q'(t'), \dot{q}'(t')) = L(q(t), \dot{q}(t)) \equiv L(t). \tag{3.31}$$

这就使得作用量 (3.3) 等同于作用量 (3.1)，至多相差一个边界项. 因此，不显含时间的拉格朗日量具有时间平移对称性.

形如式 (3.5) 的相关的实质变分为

$$\begin{aligned} \delta_{\text{s}} q(t) &= q'(t) - q(t) = q(t' + \epsilon) - q(t) \\ &= q(t') + \epsilon \dot{q}(t') - q(t) = \epsilon \dot{q}(t). \end{aligned} \tag{3.32}$$

在此变换下，拉格朗日量变为

$$\delta_{\text{s}} L = L(q'(t), \dot{q}'(t)) - L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta_{\text{s}} q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_{\text{s}} \dot{q}(t). \tag{3.33}$$

将式 (3.32) 中的 $\delta_{\text{s}} q(t)$ 代入，我们发现

$$\delta_{\text{s}} L = \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) = \epsilon \frac{\text{d}}{\text{d}t} L. \tag{3.34}$$

当设 $\Lambda = L$，此式正好具有式 (3.14) 中的导数形式，这就证实了时间变换是对称变换.

依照式 (3.12)，我们发现 Noether 荷

$$Q = H \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L(q,\dot{q}), \quad 对于 \quad q(t) = q_{\rm cl}(t) \tag{3.35}$$

是一个运动常量. 我们发现它正是拉格朗日量的**勒让德变换**，即式 (2.10) 中体系的**哈密顿量**.

现在，我们来简要核对一下如何由式 (3.12) 中不同的形式来得到这个 Noether 荷. 式 (3.17) 中依赖于时间的实质变分在这里为

$$\delta_{\rm s}^t q(t) = \epsilon(t)\dot{q}(t) \tag{3.36}$$

在此变换下，拉格朗日量的改变量为

$$\delta_{\rm s}^t L = \frac{\partial L}{\partial q}\epsilon\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{\epsilon}\dot{q} + \epsilon\ddot{q}) = \frac{\partial L^\epsilon}{\partial \epsilon}\epsilon + \frac{\partial L^\epsilon}{\partial \dot{\epsilon}}\dot{\epsilon}, \tag{3.37}$$

其中

$$\frac{\partial L^\epsilon}{\partial \dot{\epsilon}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} \tag{3.38}$$

并且

$$\frac{\partial L^\epsilon}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\epsilon\ddot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L. \tag{3.39}$$

最后一个方程证实时间平移满足对称条件 (3.27)，并且由式 (3.38) 我们看到式 (3.28) 中的 Noether 荷与式 (3.12) 中所得到的哈密顿量是相一致的.

3.3 动量和角动量

作用量的时间平移对称性导致了能量守恒定律，而系统的动量守恒律和角动量守恒律可分别由作用量在空间平移变换和转动变换下的不变性导出.

考虑欧几里得空间中一个点粒子的拉格朗日量

$$L = L(x^i(t), \dot{x}^i(t)). \tag{3.40}$$

之前对于时间平移不变性的讨论可用于任何拉格朗日坐标 $q^i(t)$，与之不同，在式 (3.40) 中，我们用 x^i 来表示坐标，并用上标 i 来强调我们在此所处理的是笛卡儿坐标. 如果拉格朗日量只依赖于速度 $\dot{x}^i$ 而不是显式地决定于坐标 x^i 本身，则此系统为**平移不变的**. 如果进一步，它只依赖于 $\dot{x}^2 = \dot{x}^i\dot{x}^i$，则它同时也是转动不变的.

最简单的例子是欧几里得空间中具有质量 m 的质点的拉格朗日量：

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2. \tag{3.41}$$

它同时展现出了以上两种不变性，并会给出相应的动量和角动量的守恒 Noether 荷. 下面我们就对此加以证明.

3.3.1 空间中的平移不变性

在空间平移变换下，粒子的坐标 x^i 变为

$$x'^i = x^i + \epsilon^i, \tag{3.42}$$

其中，ϵ^i 是小量. 粒子轨道的无穷小平移变换为 [对比式 (3.5)]

$$\delta_{\mathrm{s}} x^i(t) = \epsilon^i. \tag{3.43}$$

在此变换下，拉格朗日量变为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}} L &= L(x'^i(t), \dot{x}'^i(t)) - L(x^i(t), \dot{x}^i(t)) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i}\delta_{\mathrm{s}} x^i = \frac{\partial L}{\partial x^i}\epsilon^i = 0.\end{aligned} \tag{3.44}$$

根据设定，拉格朗日量是不依赖于 x^i 的，因此对于任何路径 $q(t)$，式 (3.44) 右边都为零. 而我们知道，利用欧拉–拉格朗日方程，拉格朗日量围绕经典轨道的实质变分为

$$\delta_{\mathrm{s}} L = \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta_{\mathrm{s}} x^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta_{\mathrm{s}} x^i\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right]\epsilon^i\,. \tag{3.45}$$

此结果具有式 (3.8) 中的形式. 将此与前一式相等，从中我们就可导出每个坐标 x^i 所对应的 Noether 守恒荷 (3.9)，并称其为

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \tag{3.46}$$

因此，与空间平移不变性相联系的 Noether 荷只不过就是点粒子的正则动量.

3.3.2 转动不变性

在转动变换下，粒子的坐标 x^i 变为

$$x'^i = R^i{}_j x^j, \tag{3.47}$$

其中，$R^i{}_j$ 为式 (1.8) 中正交 3×3 矩阵. 对于无穷小情形，它们可以写为

$$R^i{}_j = \delta^i{}_j - \varphi_k \epsilon_{kij}, \tag{3.48}$$

其中，φ 是式 (1.57) 中的无穷小转动矢量. 相应的粒子轨道的转动为

$$\delta_{\mathrm{s}} x^i(t) = x'^i(t) - x^i(t) = -\varphi^k \epsilon_{kij} x^j(\tau). \tag{3.49}$$

利用式 (1.55) 中的反对称张量表示，即 $\omega_{ij} \equiv \varphi_k \epsilon_{kij}$，于是我们可将式 (3.49) 重新写为

$$\delta_{\mathrm{s}} x^i = -\omega_{ij} x^j. \tag{3.50}$$

在此变换下，拉格朗日量 (3.41) 的实质变分

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}L &= L(x'^i(t),\dot{x}'^i(t)) - L(x^i(t),\dot{x}^i(t)) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i}\delta_{\mathrm{s}}x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta_{\mathrm{s}}\dot{x}^i\end{aligned} \tag{3.51}$$

变为

$$\delta_{\mathrm{s}}L = -\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}x^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^j\right)\omega_{ij} = 0. \tag{3.52}$$

对于任何只依赖于转动不变量 $\boldsymbol{x}^2$、$\dot{\boldsymbol{x}}^2$ 和 $\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}$ 以及他们幂次项的拉格朗日量，由于 ω_{ij} 的反对称性，式 (3.52) 右边为零. 这就确保了拉格朗日量 (3.41) 的转动对称性.

我们现在再一次利用欧拉–拉格朗日方程来计算此拉格朗日量的实质变分

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}L &= \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta_{\mathrm{s}}x^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta_{\mathrm{s}}x^i\right] \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}x^j\right]\omega_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} - (i\leftrightarrow j)\right]\omega_{ij}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

对于每一个反对称对 i、j，式 (3.53) 右边都给出相应的 (3.9) 型 Noether 守恒荷：

$$L^{ij} = x^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} - x^j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \equiv x^i p^j - x^j p^i. \tag{3.54}$$

这就是任意维度笛卡儿系统中守恒的角动量的分量.

在三维系统中，我们更倾向于用原来的转动角 φ^k 来研究问题，在这种情形下，角动量有如下标准形式：

$$L_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}L^{ij} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})^k. \tag{3.55}$$

3.3.3 质心定理

现在，我们来讨论式 (1.11) 和式 (1.12) 中伽利略变换所描述的坐标系的匀速运动所对应的对称变换. 考虑欧几里得空间中一组自由的质点，它们由以下拉格朗日量来描述：

$$L(\dot{q}_n^i) = \sum_n \frac{m_n}{2}\dot{q}_n^{i\,2}. \tag{3.56}$$

与伽利略变换相联系的无穷小实质变换为

$$\delta_{\mathrm{s}}x_n^i(t) = x_n'^{\,i}(t) - x_n^i(t) = -v^i t, \tag{3.57}$$

其中，v^i 为沿着第 i 轴的一个小的相对速度. 这使得拉格朗日量具有如下的改变量：

$$\delta_{\mathrm{s}} L = L(x_n^i - v^i t, \dot{x}_n^i - v^i) - L(x_n^i, \dot{x}_n^i). \tag{3.58}$$

将式 (3.56) 代入，我们得到

$$\delta_{\mathrm{s}} L = \sum_n \frac{m_n}{2} \left[(\dot{x}_n^i - v^i)^2 - (\dot{x}_n{}^i)^2 \right], \tag{3.59}$$

这可以写为对时间的全微分的形式

$$\delta_{\mathrm{s}} L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Lambda = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_n m_n \left[-x_n^i v^i + \frac{v^2}{2} t \right], \tag{3.60}$$

证明了从 Noether 的意义上看伽利略变换是对称变换. 注意在后一个表示式中，v^i 的二次项被省略掉了，这是因为按照设定式 (3.57) 中的速度 v^i 是无穷小的.

利用链式法则对 $\delta_{\mathrm{s}} L$ 再次进行计算，代入欧拉–拉格朗日方程，并将所得结果与式 (3.60) 相等，就像推导式 (3.12) 那样，我们就得到了如下守恒的Noether 荷：

$$\begin{aligned} Q &= \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} \delta_{\mathrm{s}} x_n^i - \Lambda \\ &= \left(-\sum_n m_n \dot{x}_n^i \, t + \sum_n m_n x_n^i \right) v^i. \end{aligned} \tag{3.61}$$

由于速度 v^i 的方向是任意的，因此式 (3.61) 中每个分量都是一个分立的运动常量：

$$N^i = -\sum_n m_n \dot{x}^i \, t + \sum_n m_n x_n{}^i = \text{const}. \tag{3.62}$$

这就是我们所熟知的**质心定理**[1]. 事实上，通过引入质心坐标

$$x_{\mathrm{CM}}^i \equiv \frac{\sum\limits_n m_n x_n{}^i}{\sum\limits_n m_n} \tag{3.63}$$

以及质心速度

$$v_{\mathrm{CM}}^i = \frac{\sum\limits_n m_n \dot{x}_n{}^i}{\sum\limits_n m_n}, \tag{3.64}$$

式 (3.62) 中的守恒荷可写为

$$N^i = \sum_n m_n(-v^i_{\rm CM}\, t + x^i_{\rm CM}). \tag{3.65}$$

N^i 的时间无关性意味着质心将按下述规则匀速运动：

$$x^i_{\rm CM}(t) = x^i_{\rm CM,0} + v^i_{\rm CM} t, \tag{3.66}$$

其中

$$x^i_{\rm CM,0} = \frac{N^i}{\sum\limits_n m_n} \tag{3.67}$$

为质心在 $t=0$ 时刻的位置.

注意，在非相对论物理系统中，质心定理是动量守恒的结果，因为动量 $\equiv$ 质量 $\times$ 速度. 然而，在相对论物理系统中，这不再成立.

3.3.4 由洛伦兹不变性而导致的守恒律

在相对论物理中，粒子的轨道由闵可夫斯基时空中的函数 $x^a(\sigma)$ 来描述，其中 σ 是一个洛伦兹不变的长度参量. 相应作用量是某个拉格朗日量的积分：

$$\overset{\rm m}{\mathcal{A}} = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} {\rm d}\sigma\, \overset{\rm m}{L}\left(x^a(\sigma), \dot{x}^a(\sigma)\right), \tag{3.68}$$

其中，圆点代表关于 σ 的导数. 如果拉格朗日量只依赖于不变的标量积 $x^a x_a$、$x^a\dot{x}_a$ 和 $\dot{x}^a\dot{x}_a$，则它在洛伦兹变换

$$x^a \to x'^a = \Lambda^a{}_b\, x^b \tag{3.69}$$

下是不变的，其中 $\Lambda^a{}_b$ 是式 (1.28) 中的赝正交 4×4 矩阵.

时空中自由质点的拉格朗日量 [参看式 (2.19)] 为

$$\overset{\rm m}{L}\left(\dot{x}(\sigma)\right) = -mc\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}, \tag{3.70}$$

因此式 (3.68) 中的作用量在任意的再参数化 $\sigma\to f(\sigma)$ 下是不变的. 由于拉格朗日量只依赖于 $\dot{x}(\sigma)$，因此在任意的坐标平移变换

$$\delta_{\rm s} x^a(\sigma) = -\epsilon^a(\sigma) \tag{3.71}$$

下是不变的，即 $\delta_{\rm s} L = 0$. 利用欧拉–拉格朗日方程再次对此变分进行计算，我们发现

$$\delta_{\rm s}\overset{\rm m}{L} = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} {\rm d}\sigma \left(\frac{\partial \overset{\rm m}{L}}{\partial x^a}\delta_{\rm s}x^a + \frac{\partial \overset{\rm m}{L}}{\partial \dot{x}^a}\delta_{\rm s}\dot{x}^a\right) = -\epsilon^a \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} {\rm d}\sigma \frac{\rm d}{{\rm d}\sigma}\left(\frac{\partial \overset{\rm m}{L}}{\partial \dot{x}^a}\right). \tag{3.72}$$

由此我们就可以得到守恒的 Noether 荷

$$p_a \equiv -\frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{L}}{\partial \dot{x}^a} = m\frac{\dot{x}_a}{\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b/c^2}} = mu^a, \tag{3.73}$$

它满足如下守恒定律：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}p_a(\sigma) = 0. \tag{3.74}$$

Noether 荷 $p_a(\sigma)$ 正是式 (1.149) 中自由相对论性粒子的守恒 4-动量，它可通过正则形式由式 (2.20) 推导而得. 4-矢量

$$u^a \equiv \frac{\dot{x}^a}{\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b/c^2}} \tag{3.75}$$

是粒子的相对论性 4-速度. 它是式 (2.22) 和式 (1.149) 中 4-速度 $\dot{q}_a(\tau) = u_a(\tau)$ 的一种再参数化不变的表述形式. 为了与式 (2.20) 中协变动量分量的正则定义相一致，式 (3.73) 中有一个正负号的变化. 当把 σ 选为物理时间 $t = x^0/c$ 后，就像在式 (1.150) 中那样，我们就可用物理速度 $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$ 将 u^a 表示为

$$u^a = \gamma(1, v^i/c), \quad 和 \quad \gamma \equiv \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{3.76}$$

对于单位元附近的无穷小洛伦兹变换，我们可以写为

$$\Lambda^a{}_b = \delta^a{}_b + \omega^a{}_b, \tag{3.77}$$

其中

$$\omega^a{}_b = g^{ac}\omega_{cb} \tag{3.78}$$

为一任意无穷小反对称矩阵. 粒子路径的一个无穷小洛伦兹变换为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}x^a(\sigma) &= x'^a(\sigma) - x^a(\sigma)\\ &= \omega^a{}_b x^b(\sigma).\end{aligned} \tag{3.79}$$

在此变换下，任何洛伦兹不变的拉格朗日量的实质变分都为零

$$\delta_{\mathrm{s}}L = \left(\frac{\partial L}{\partial x^a}x^b + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\dot{x}^b\right)\omega^a{}_b = 0. \tag{3.80}$$

而拉格朗日量的实质变分也可通过链式法则并利用欧拉–拉格朗日方程计算而得

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}L &= \left(\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)\delta_{\mathrm{s}}x^a + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\delta_{\mathrm{s}}x^a\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\dot{x}^b\right]\omega^a{}_b\\ &= \frac{1}{2}\omega_a{}^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(x^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} - x^b\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\right).\end{aligned} \tag{3.81}$$

将之与式 (3.80) 相比较，我们就得到了守恒的转动 Noether 荷

$$L^{ab} = -x^a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} + x^b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = x^a p^b - x^b p^a. \tag{3.82}$$

它正是式 (3.54) 中角动量的四维推广.

Noether 荷 L^{ij} 与式 (3.54) 中角动量的分量是相一致的. 守恒分量

$$L^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 \equiv M_i \tag{3.83}$$

给出了式 (3.62) 中质心定理的相对论性推广：

$$M_i = \text{常数} \tag{3.84}$$

3.4 生成对称性

正如在本章的引言中所提到的，在不变量和守恒律间存在第二个重要的关系. 与连续对称变换相关联的荷可被用来**生成**那个它发源于斯的对称变换. 在经典理论中，这可以通过泊松括号

$$\delta_{\mathrm{s}} \hat{x} = \epsilon \{\hat{Q}, \hat{x}(t)\} \tag{3.85}$$

来实现. 正则量子化后，泊松括号化为 $-\mathrm{i}$ 乘以对易子，而荷则变为算符，它可通过以下操作产生对称变换

$$\delta_{\mathrm{s}} \hat{x} = -\mathrm{i}\epsilon [\hat{Q}, \hat{x}(t)]. \tag{3.86}$$

对于对称变换的量子力学生成方式的一个极其重要的例子就是第 3.2 节中由时间平移下系统的不变性推导而得式 (3.35) 中 Noether 荷这一效应. 该 Noether 荷 Q 就是**哈密顿量** H，它的算符形式可通过下面的**海森伯运动方程**：

$$\delta_{\mathrm{s}} x(t) = \epsilon \dot{\hat{x}}(t) = -\mathrm{i}\epsilon [\hat{H}, \hat{x}(t)] \tag{3.87}$$

而产生式 (3.32) 中的无穷小时间平移. 这正是式 (3.86) 中一般 Noether 关系的一个特例.

如果拉格朗日量具有如下标准形式：

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x), \tag{3.88}$$

则正则量子化将十分直接. 此时，正则动量 $p \equiv \dot{x}$ 的算符形式满足等时对易关系

$$[\hat{p}(t), \hat{x}(t)] = -\mathrm{i}, \quad [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = 0, \quad [\hat{x}(t), \hat{x}(t)] = -\mathrm{i}. \tag{3.89}$$

相应的哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\hat{x}) \tag{3.90}$$

直接变为**哈密顿算符**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{3.91}$$

如果拉格朗日量不具有式 (3.88) 中的标准形式，则其量子化将不是一个简单的问题[3].

另一个重要的例子则与第 3.3.1 节中从平移对称性导出的荷 (3.46) 有关. 进行量子化后，生成变换 (3.43) 的对易子 (3.86) 变为

$$\epsilon^j = \mathrm{i}\epsilon^i[\hat{p}^i(t), \hat{x}^j(t)]. \tag{3.92}$$

这与三维中的对易关系 (3.89) 中的那个是相一致的.

时空的相对论性荷 (3.73) 通过

$$\delta_{\mathrm{s}}\hat{x}^a = \epsilon^a = -\mathrm{i}\epsilon^b[\hat{p}_b(t), \hat{x}^a(\tau)] \tag{3.93}$$

生成平移变换，意味着有如下相对论性对易关系：

$$[\hat{p}_b(t), \hat{x}^a(\tau)] = \mathrm{i}\delta_b{}^a, \tag{3.94}$$

这正与式 (1.162) 中的相对论性正则对易法则 (在 $\hbar = 1$ 的自然单位制中) 相一致.

注意，所有根据规则 (3.86) 由 Noether 荷导出的对易法则对于海森伯绘景中的算子都成立，在海森伯绘景中它们依赖于时间. 另外，在第 3 章中纯代数讨论中的对易规则，则被应用于与时间无关的薛定谔绘景中的算子上.

类似地，我们发现式 (3.55) 中守恒荷 L_i 的量子化形式可生成无穷小转动：

$$\delta_{\mathrm{s}}\hat{x}^j = -\omega^i\epsilon_{ijk}\hat{x}^k(t) = \mathrm{i}\omega^i[\hat{L}_i, \hat{x}^j(t)], \tag{3.95}$$

而量子化的式 (3.62) 中的守恒荷 N^i 则生成了无穷小伽利略变换. 式 (3.83) 中的荷 M_i 生成纯洛伦兹变换 [对照式 (1.129)]：

$$\delta_{\mathrm{s}}\hat{x}^j = \epsilon_j\hat{x}^0 = \mathrm{i}\epsilon_i[M_i, \hat{x}^j], \quad \delta_{\mathrm{s}}\hat{x}^0 = \epsilon_i\hat{x}^i = \mathrm{i}\epsilon_i[M_i, \hat{x}^0]. \tag{3.96}$$

由于量子化的荷可生成对称变换，于是它们构成了洛伦兹群生成元的一个**表示**. 由此，它们之间必须具有与式 (1.71) 中对称群生成元或它们的简化形式 (1.72) 相同的对易规则. 事实也确实如此，因为式 (3.82) 中 Noether 荷的算符形式对应于式 (1.163) 中的算符 (在自然单位制中).

3.5 场 论

场论中也存在连续对称性和运动常量间类似的关系，其中拉格朗日坐标的角色则由场 $q_{\boldsymbol{x}}(t) = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$ 来充当.

3.5.1 连续对称性和守恒流

设 $\mathcal{A}$ 为一个任意场 $\varphi(x) \to \varphi(\boldsymbol{x}, t)$ 的局域作用量

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x), \tag{3.97}$$

并假定场的变换

$$\delta_{\mathrm{s}}\varphi(x) = \epsilon \varDelta(\varphi, \partial\varphi, x) \tag{3.98}$$

只使得拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 产生一个全散度的改变

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L} = \epsilon \partial_a \varLambda^a, \tag{3.99}$$

利用高斯散度定理，这使得作用量 $\mathcal{A}$ 的改变为一个表面积分

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{A} = \epsilon \int \mathrm{d}^4 x\, \partial_a \varLambda^a = \epsilon \int_S \mathrm{d}S_a\, \varLambda^a, \tag{3.100}$$

其中，S 为整个时空的表面. 这样，$\delta_{\mathrm{s}}\varphi$ 就被称作**对称变换**.

在对称假设下，利用讨论力学作用量 (3.1) 中同样的方法，我们可以推导出相应的局域守恒定律. 类似于式 (3.13) 中的方法，我们可以计算出在式 (3.98) 中的无穷小对称变换下 $\mathcal{L}$ 的变分，并且发现

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L} &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\right)\delta_{\mathrm{s}}\varphi + \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\delta_{\mathrm{s}}\varphi\right) \\ &= \epsilon\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\right)\varDelta + \epsilon\,\partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\varDelta\right).\end{aligned} \tag{3.101}$$

由于欧拉–拉格朗日方程，第一项为零. 将第二项与式 (3.99) 建立等式，我们发现四维流密度

$$j^a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\varDelta - \varLambda^a \tag{3.102}$$

是没有散度的：

$$\partial_a j^a(x) = 0. \tag{3.103}$$

这就是场论中的**Noether定理**. 式 (3.102) 中的表达式称为 **Noether流密度**，而式 (3.103) 则为**局域守恒律**，这就像在电磁场方程 (1.202) 中那样.

从式 (1.204) 中我们已经看到，局域守恒律 (3.103) 总是意味着形如式 (3.9) 的荷的整体守恒律，在这里这个荷就是如式 (1.205) 中那样通过对第零分量进行空间积分而定义的 Noether 荷 $Q(t)$ (这里我们取 $c=1$ 的自然单位)

$$Q(t)=\int \mathrm{d}^3x\, j^0(\boldsymbol{x},t). \tag{3.104}$$

3.5.2 另一种推导

类似于式 (3.17)∼ 式 (3.28)，这里也存在另外一种对守恒流的推导方法. 该方法基于对称变换下场的变分，并且此变分的参数 ϵ 被人为设定为是依赖于时空的 $\epsilon(x)$，即将式 (3.17) 扩展为

$$\delta_{\rm s}^x\varphi(x)=\epsilon(x)\varDelta(\varphi(x),\partial_a\varphi(x)). \tag{3.105}$$

就像之前在式 (3.19) 中那样，让我们来计算一下相应于轻微变换了的场

$$\varphi^{\epsilon(x)}(x)\equiv\varphi(x)+\delta_{\rm s}^x\varphi(x) \tag{3.106}$$

的拉格朗日密度，记之为

$$\mathcal{L}^{\epsilon(x)}\equiv\mathcal{L}(\varphi^{\epsilon(x)},\partial\varphi^{\epsilon(x)}). \tag{3.107}$$

相应的作用量与原来的相差

$$\delta_{\rm s}^x\mathcal{A}=\int \mathrm{d}x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\epsilon(x)}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\partial_a\epsilon(x)}\right]\delta\epsilon(x)+\partial_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\partial_a\epsilon(x)}\delta\epsilon(x)\right]\right\}. \tag{3.108}$$

对于满足欧拉–拉格朗日方程 (2.40) 的经典场 $\varphi(x)=\varphi_{\rm cl}(x)$，作用量的极值性意味着第一项为零，这就导致了欧拉–拉格朗日类型的方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\epsilon(x)}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\partial_a\epsilon(x)}=0. \tag{3.109}$$

依照假设，在不依赖于 x 的变换 (3.105) 下作用量有一个纯表面项的改变，也就是说

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon}}{\partial\epsilon}=\partial_a\varLambda^a. \tag{3.110}$$

将此代入式 (3.109)，我们发现

$$j^a=\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\partial_a\epsilon(x)}-\varLambda^a \tag{3.111}$$

没有 4 散度. 这与式 (3.102) 中 Noether 流密度是相符的，这点可通过将式 (3.107) 对 $\partial_a\epsilon(x)$ 进行微分而看出：

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\epsilon(x)}}{\partial\partial_a\epsilon(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\,\Delta(\varphi,\partial\varphi). \tag{3.112}$$

3.5.3　局域对称性

在第 2 章，我们看到带电粒子和与电磁性有关的场具有更加广泛的对称性. 它们在局域规范变换 (2.104) 下是不变的. 例如，式 (2.136) 中的标量拉格朗日在局域规范变换 (2.104) 和 (2.137) 下是不变的，而狄拉克拉格朗日密度 (2.151) 则在变换 (2.104) 和 (2.152) 下是不变的. 这都是一般形式 (3.98) 的表现，只不过现在参数 ϵ 依赖于时空. 因此，在如式 (3.105) 般类型的局域实质变换下，此作用量是不变的. 而该变换在上节中只是作为另一种推导 Noether 流密度 (2.136) 所需的辅助工具而引入的.

对于一个局域规范不变的拉格朗日密度，Noether 表示式 (3.111) 写为

$$j_a=\frac{\delta\mathcal{L}}{\partial\partial_a\Lambda}, \tag{3.113}$$

并且一致地为零. 但这并不意味着体系中不存在如我们在式 (2.140) 和式 (2.156) 中所见到的那样的守恒流. 只不过是 Noether 的推导方法不再适用. 为此，对于拉格朗日密度 (2.151)，让我们进一步细致地考察一下这一现象.

如果我们将规范变换 (2.154) 限制为不依赖于时空的规范变换

$$\psi(x)\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\Lambda/c}\psi(x), \tag{3.114}$$

则我们可以很轻易地得到狄拉克场的一个形如式 (3.102) 的 Noether 守恒流. 这个结果就是狄拉克流密度 (2.154)，这正是电磁场最小耦合的来源. 最小耦合使得整体规范不变的理论变得局域规范变. 此规范原则在自然界中很多情形下都存在. 由于最小耦合规范场的存在，很多整体内部对称性事实上是局域的，这些规范场中有些是非阿贝尔的. 最重要的例子包括与强、弱相互作用相关的非阿贝尔规范对称性.

我们现在来看看在这些理论中利用 Noether 方法来推导守恒定律会怎样. 流密度的表达式 (3.111) 由于局域规范不变性而恒为零，但对于不存在规范场的狄拉克场它却给出了守恒流密度 (2.154)，因此我们可以在**固定**规范场下从如下泛函导数来计算 $j^a(x)$：

$$j_a\equiv\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\Lambda}\right|_{A^a}. \tag{3.115}$$

或者，我们可以利用局域变换下完全变化量 $\delta_s^x\mathcal{L}$ 恒为零这一事实，只对规范场进行变动而保持粒子轨道不变. 这样，就可从下面这个导数得到同样的流密度

$$j_a = -\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\Lambda}\right|_\psi. \tag{3.116}$$

另外一种计算该表达式的方法是构建关于规范场 A_a 的泛函导数同时略去 $\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}$ 的贡献，即只对带电粒子拉格朗日量 $\overset{\text{e}}{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L} - \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}$ 进行求导，得

$$j^a = -\frac{\partial\overset{\text{e}}{\mathcal{L}}}{\partial\partial_a\Lambda} = -\frac{\partial\overset{\text{e}}{\mathcal{L}}}{\partial A_a}. \tag{3.117}$$

作为一种检验，我们用式 (3.117) 中的规则来计算分别具有拉格朗日密度 (2.141) 和 (2.27) 的狄拉克场和 Klein-Gordon 场的守恒流密度，并重新得到式 (2.154) 和式 (2.139) 中的表达式 (那个额外的因子 c 是惯例). 对于式 (2.50) 中的薛定谔–拉格朗日密度，我们得到守恒的电荷电流密度

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \equiv e\frac{\mathrm{i}}{2m}\psi^*(\boldsymbol{x},t)\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\nabla}}\psi(\boldsymbol{x},t) - \frac{e^2}{c}\boldsymbol{A}\,\psi^*(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{3.118}$$

这与式 (2.64) 中的粒子流密度相差一个因子 e. 而式 (2.65) 中的流守恒律现在则在右边包含了电荷密度 $\rho(x,t) \equiv e\psi^*(x,t)\psi(x,t)$.

对于规范场本身，局域规范不变性有一个重要的结果. 如果我们对纯规范场作用量作变分

$$\delta_s \overset{\text{em}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{tr}\left(\delta_s^x A_a \frac{\delta\overset{\text{em}}{\mathcal{A}}}{\delta A_a}\right), \tag{3.119}$$

并设 $\delta_s^x A$ 为一无穷小纯规范变换

$$\delta_s^x A_a = -\partial_a\Lambda(x), \tag{3.120}$$

则对于所有的 $\Lambda(x)$，方程右边都为零. 在进行分部积分后，就可发现这意味着 Noether 流

$$\overset{\text{em}}{j}{}^a(x) = -\frac{\delta\overset{\text{em}}{\mathcal{A}}}{\delta A_a} \tag{3.121}$$

满足局域守恒律 $\partial_a j^a(x) = 0$. 当把式 (2.83) 和式 (2.84) 中作用量的具体形式代入后，我们得到

$$\overset{\text{em}}{j}{}^a(x) = -\partial_b F^{ab}. \tag{3.122}$$

于是，麦克斯韦方程 (2.87) 就可写为

$$\overset{\text{em}}{j}{}^a(x) = -\overset{\text{e}}{j}{}^a(x), \tag{3.123}$$

其中，上标 e 强调流密度 $j^a(x)$ 只包含带荷粒子的场. 在式 (3.123) 的形式中，麦克斯韦方程暗示包含荷守恒流 (3.116) 和电磁场 Noether 流 (3.121) 的总的流密度是为零的

$$\overset{\text{tot}}{j}{}^a(x) = \overset{\text{e}}{j}{}^a(x) + \overset{\text{em}}{j}{}^a(x) = 0. \tag{3.124}$$

这种对于麦克斯韦方程 (2.87) 不同寻常的表述对于在以后通过类比的方法理解爱因斯坦场方程 (17.157) 将会十分有用.

在此，我们提请读者注意一个重要问题. 对于物质场而言，只有当物质场满足欧拉–拉格朗日方程时，相应的守恒律才成立；与之相反，对于规范场而言，Noether 流 (3.122) 的守恒定律

$$\partial_a \overset{\text{em}}{j}{}^a(x) = -\partial_a\partial_b F^{ab} = 0 \tag{3.125}$$

则对**所有的**场构型都成立. 方程右边恒等于零，这是因为在任何规范固定下，矢势 A^a 都是一个可观测量，因而满足式 (2.89) 中的**施瓦茨可积条件**.

3.6　正则能动张量

作为 Noether 定理场论形式的一个重要例子，我们来考虑一个不显含时空坐标 x 的拉格朗日密度：

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)). \tag{3.126}$$

然后我们沿时空的任一方向 $b = 0, 1, 2, 3$ 对坐标做一个平移

$$x'^a = x^a - \epsilon^a, \tag{3.127}$$

在此变换下，场 $\varphi(x)$ 变为

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \tag{3.128}$$

且

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x). \tag{3.129}$$

如果 ϵ^a 无穷小，则场的改变量为

$$\delta_{\text{s}}\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) = \epsilon^b\partial_b\varphi(x), \tag{3.130}$$

而拉格朗日密度的改变量则为

$$\begin{aligned}\delta_{\text{s}}\mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial\varphi'(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)}\delta_{\text{s}}\varphi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\partial_a\delta_{\text{s}}\varphi(x),\end{aligned} \tag{3.131}$$

这正是一个纯散度项

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L}(x) = \boldsymbol{\epsilon}^b\partial_b\mathcal{L}(x). \tag{3.132}$$

因此，这是满足 (3.99) 中的要求的，并且 $\delta_{\mathrm{s}}\varphi(x)$ 是一个对称变换，其中的函数 Λ 恰好与拉格朗日密度相一致

$$\Lambda = \mathcal{L}. \tag{3.133}$$

我们现在可以定义四个流密度 4-矢量 ${j_b}^a$，每一个都与 $\boldsymbol{\epsilon}^b$ 的一个分量相对应. 对于时空平移对称性，我们记之为 ${\Theta_b}^a$

$${\Theta_b}^a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\partial_b\varphi - {\delta_b}^a\mathcal{L}. \tag{3.134}$$

由于 $\boldsymbol{\epsilon}^b$ 是一个矢量，因而这个 4×4 的量是一个张量，称作标量场 $\varphi(x)$ 的**能动张量**. 根据 Noether 定理，指标 a 上的散度为零 [与式 (3.103) 比较]：

$$\partial_a{\Theta_b}^a(x) = 0. \tag{3.135}$$

与这些流密度相伴随的四个守恒荷 Q_b [请看定义式 (3.104)]

$$P_b = \int \mathrm{d}^3x\ {\Theta_b}^0(x), \tag{3.136}$$

则是这个体系**总 4-动量**的分量.

另一个推导此守恒定律的方法则是依照第 3.1.4 节中的方法，引入局域变换，

$$\delta_{\mathrm{s}}^x\varphi(x) = \epsilon^b(x)\partial_b\varphi(x), \tag{3.137}$$

在此变换下，拉格朗日密度的变化量为

$$\delta_{\mathrm{s}}^x\mathcal{L}(x) = \epsilon^b(x)\partial_b\mathcal{L}(x). \tag{3.138}$$

另外，利用链式法则我们有

$$\delta_{\mathrm{s}}^x\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)}\epsilon^b(x)\partial_b\varphi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi(x)}\left\{[\partial_a\epsilon^b(x)]\partial_b\varphi + \epsilon^b\partial_a\partial_b\varphi(x)\right\}, \tag{3.139}$$

这表明

$$\frac{\partial\mathcal{L}^\epsilon}{\partial\partial_a\epsilon^b(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\partial_b\varphi. \tag{3.140}$$

对每个 b 做式 (3.102) 中的组合，我们再一次得到了式 (3.134) 中的守恒的能动张量.

注意，类似于式 (3.26)，我们可以将式 (3.140) 写为

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\epsilon}}{\partial \partial_a \epsilon^b(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \varphi} \frac{\partial \delta_{\mathrm{s}}^x \varphi}{\partial \epsilon^b(x)}. \tag{3.141}$$

进一步注意到，**正则能动张量**的分量 $\Theta_0{}^0$

$$\Theta_0{}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi} \partial_0 \varphi - \mathcal{L} \tag{3.142}$$

和正则形式中利用勒让德变换由拉格朗日密度得到的哈密顿密度 (2.61) 是相一致的.

3.6.1 电磁学

作为场论 Noether 定理的一个重要的物理上的应用，让我们来考察具有如下作用量的自由电磁场：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{cd} F^{cd}, \tag{3.143}$$

其中，F_{cd} 为场强，其表达式为 $F_{cd} \equiv \partial_c A_d - \partial_d A_c$. 在时空坐标由 x^a 变为 $x^a - \epsilon^a$ 时，矢势则如式 (3.128) 中的标量场般变换：

$$A'^a(x') = A^a(x). \tag{3.144}$$

对于无穷小变换，这可以写为

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{s}} A^c(x) &\equiv A'^c(x) - A^c(x) \\ &= A'^c(x' + \epsilon) - A^c(x) \\ &= \boldsymbol{\epsilon}^b \partial_b A^c(x), \end{aligned} \tag{3.145}$$

而场张量的变化则为

$$\delta_{\mathrm{s}} F^{cd} = \epsilon^b \partial_b F^{cd}. \tag{3.146}$$

将此代入式 (3.143)，我们看到拉格朗日量的改变量为一个 4 维全散度：

$$\delta_{\mathrm{s}} \mathcal{L} = -\epsilon^b \frac{1}{2} \left(\partial_b F_{cd} F^{cd} + F_{cd} \partial_b F^{cd} \right) = \epsilon^b \partial_b \mathcal{L}. \tag{3.147}$$

因此，时空变换 (3.145) 是对称变换，且式 (3.102) 给出四个 Noether 流密度，每个对应于一个 ϵ^b：

$$\Theta_b{}^a = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a A^c} \partial_b A^c - \delta_b{}^a \mathcal{L} \right]. \tag{3.148}$$

这构成了电磁场的**正则能动张量**，它们满足局域守恒定律

$$\partial_a \Theta_b{}^a(x) = 0. \tag{3.149}$$

引入因子 $1/c$ 是为了使 Noether 流密度具有与式 (1.261) 中引入的能动张量相同的量纲，即动量密度. 将导数 $\partial\mathcal{L}/\partial\partial_a A^c = -F^a{}_c$ 代入到式 (3.148) 中，我们得到

$$\Theta_b{}^a = \frac{1}{c}\left[-F^a{}_c\partial_b A^c + \frac{1}{4}\delta_b{}^a F^{cd}F_{cd}\right]. \tag{3.150}$$

3.6.2 狄拉克场

我们现在来看狄拉克场，它在时空变换

$$x'^a = x^a - \epsilon^a \tag{3.151}$$

下变为

$$\psi'(x') = \psi(x). \tag{3.152}$$

由于式 (2.141) 中的拉格朗日密度并不明确依赖于 x，则如式 (3.129) 中那样，我们有

$$\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}{}'(x') = \overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}(x). \tag{3.153}$$

无穷小变换

$$\delta_{\mathrm{s}}\psi(x) = \epsilon^a\partial_a\psi(x) \tag{3.154}$$

将产生一个纯散度项

$$\delta_{\mathrm{s}}\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}(x) = \epsilon^a\partial_a\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}(x), \tag{3.155}$$

而式 (3.102) 中的组合则给出 Noether 流密度

$$\Theta_b{}^a = \frac{\partial\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}}{\partial\partial_a\psi^c}\partial_b\psi^c + \mathrm{cc} - \delta_b{}^a\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}, \tag{3.156}$$

它满足局域守恒定律

$$\partial_a\Theta_b{}^a(x) = 0. \tag{3.157}$$

由式 (2.141) 我们看到

$$\frac{\partial\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}}{\partial\partial_a\psi^c} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^a, \tag{3.158}$$

于是就得到了狄拉克场的**正则能动张量**：

$$\Theta_b{}^a = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^a\partial_b\psi^c + \mathrm{cc} - \delta_b{}^a\overset{\mathrm{D}}{\mathcal{L}}. \tag{3.159}$$

3.7 角 动 量

我们现在转向场论中的角动量. 首先考虑标量场 $\varphi(x)$ 的情况. 在坐标转动下

$$x'^i = R^i{}_j x^j, \tag{3.160}$$

空间中具有不同坐标 x^i 和 x'^i 的同一点的场量是不变的:

$$\varphi'(x'^i) = \varphi(x^i). \tag{3.161}$$

无穷小实质变分为

$$\delta_{\mathrm{s}}\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x). \tag{3.162}$$

对于式 (3.48) 中的无穷小转动

$$\delta_{\mathrm{s}} x^i = -\varphi_k \epsilon_{kij} x^j = -\omega_{ij} x^j, \tag{3.163}$$

我们看到

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}\varphi(x) &= \varphi'(x^0, x'^i - \delta x^i) - \varphi(x) \\ &= \partial_i \varphi(x) x^j \omega_{ij}.\end{aligned} \tag{3.164}$$

对于一个不显含 x 的转动洛伦兹不变的拉格朗日密度

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x)), \tag{3.165}$$

实质变分为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial\varphi'(x)) - \varphi(\varphi(x), \partial\varphi(x)) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} \delta_{\mathrm{s}}\varphi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \varphi(x)} \partial_a \delta_{\mathrm{s}}\varphi(x).\end{aligned} \tag{3.166}$$

将式 (3.164) 代入，式 (3.166) 变为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L} &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \partial_i \varphi x^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_a \varphi} \partial_a (\partial_i \varphi x^j)\right] \omega_{ij} \\ &= \left[(\partial_i \mathcal{L}) x^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_j \varphi} \partial_i \varphi\right] \omega_{ij}.\end{aligned} \tag{3.167}$$

由于我们所考察的是转动不变的局域拉格朗日密度 $\mathcal{L}(x)$，所以微分 $\partial\mathcal{L}/\partial\partial_a\varphi$ 是一个正比于 $\partial_a\varphi$ 的矢量. 因此式 (3.167) 括号中第二项是对称的，与反对称张量 ω_{ij} 的缩并将为零. 这使得我们可以将 $\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L}$ 表示为一个纯散度项

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L} = \partial_i \left(\mathcal{L}\, x^j \omega_{ij}\right). \tag{3.168}$$

利用链式法则再次对 $\delta_{\rm s}\mathcal{L}$ 进行计算，并将欧拉–拉格朗日方程代入，我们得

$$\begin{aligned}\delta_{\rm s}\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{L}}\delta_{\rm s}\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\partial_a\delta_{\rm s}\varphi \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\right)\delta_{\rm s}\varphi + \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\delta_{\rm s}\varphi\right) \\ &= \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\partial_i\varphi\, x^j\right)\omega_{ij}.\end{aligned} \tag{3.169}$$

于是我们就得到式 (3.102) 中的 Noether 流密度：

$$L^{ij,a} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\partial_i\varphi\, x^j - \delta_i{}^a\mathcal{L}\, x^j\right) - (i \leftrightarrow j), \tag{3.170}$$

它的 4 散度为零：

$$\partial_a L^{ij,a} = 0. \tag{3.171}$$

此流密度可用式 (3.134) 中的正则能动张量表示为

$$L^{ij,a} = x^i\Theta^{ja} - x^j\Theta^{ia}. \tag{3.172}$$

相应的 Noether 荷

$$L^{ij} = \int {\rm d}^3x L^{ij,a} \tag{3.173}$$

就是该场系统**总角动量**的时间不变的分量.

3.8 四维角动量

现在考虑纯洛伦兹变换 (1.27). 相应于快度 ζ^i 的无穷小推进可由坐标变换

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b = x^a - \delta^a{}_0\zeta^i x^i - \delta^a{}_i\zeta^i x^0 \tag{3.174}$$

来描述 [请回顾式 (1.34)]. 这可写为

$$\delta x^a = \omega^a{}_b x^b, \tag{3.175}$$

对于被动式推进，

$$\omega_{ij} = 0, \quad \omega_{0i} = -\omega_{i0} = \zeta^i. \tag{3.176}$$

借助于张量 $\omega^a{}_b$，我们看到，该推进可以按照式 (1.36) 中被动式转动同样的方式来处理，对此，式 (3.175) 对于以下表达式

$$\omega_{ij} = \omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\varphi^k, \quad \omega_{0i} = \omega_{i0} = 0 \tag{3.177}$$

是成立的. 对这两种变换，场的实质变分为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}\varphi(x) &= \varphi'(x'^a - \delta x^a) - \varphi(x) \\ &= -\partial_a\varphi(x)x^b\omega^a{}_b.\end{aligned} \tag{3.178}$$

对于一个洛伦兹不变的拉格朗日密度，同式 (3.168) 一样，可证明实质变分是一个全散度：

$$\delta_{\mathrm{s}}\varphi = -\partial_a(\mathcal{L}x^b)\omega^a{}_b, \tag{3.179}$$

我们也因此得到了 Noether 流密度

$$L^{ab,c} = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c\varphi}\partial^c\varphi\, x^b - \delta^{ac}\mathcal{L}\, x^b\right) - (a\leftrightarrow b). \tag{3.180}$$

利用式 (3.134) 中的正则能动张量，式 (3.180) 右边可写为

$$L^{ab,c} \quad = \quad x^a\,\Theta^{bc} - x^b\,\Theta^{ac}. \tag{3.181}$$

根据 Noether 定理 (3.103)，这些流密度是没有 4 散度的：

$$\partial_c L^{ab,c} = 0. \tag{3.182}$$

与这些流密度相应的荷

$$L^{ab} \equiv \int \mathrm{d}^3x\, L^{ab,0} \tag{3.183}$$

则是不依赖于时间的. 对于式 (3.176) 中特殊形式的 ω_{ab}，我们重新得到了角动量不依赖于时间的分量 L^{ij}.

L^{i0} 的时间无关性则是**质心定理**(3.66) 的相对论形式. 其实，由于

$$L^{i0} = \int \mathrm{d}^3x\,(x^i\,\Theta^{00} - x^0\,\Theta^{i0}), \tag{3.184}$$

我们可以定义相对论性的质心

$$x^i_{\mathrm{CM}} = \frac{\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\ \Theta^{00}x^i}{\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\ \Theta^{00}} \tag{3.185}$$

以及平均速度

$$v^i_{\mathrm{CM}} = c\frac{\mathrm{d}^3x\,\Theta^{i0}}{\displaystyle\int \mathrm{d}^3x\ \Theta^{00}} = c\frac{P^i}{P^0}. \tag{3.186}$$

由于体系的动量 $\int \mathrm{d}^3x\, \Theta^{i0} = P^i$ 是一个常数，则 v^i_{CM} 也是一个常数. 因此，L^{0i} 的恒定性意味着质心以一个恒定的速度在运动，即

$$x^i_{\mathrm{CM}}(t) = x^i_{\mathrm{CM},0} + v^i_{\mathrm{CM},0}t, \tag{3.187}$$

其中，$x^i_{\mathrm{CM},0} = L^{0i}/P^0$.

Noether 荷 L^{ab} 正是体系的四维角动量.

值得指出的是，$L^{ab,c}$ 的全散度为零使得 Θ^{ba} 必须是对称的：

$$\begin{aligned}\partial_c L^{ab,c} &= \partial_c(x^a\Theta^{bc} - x^b\Theta^{ac}) \\ &= \Theta^{ba} - \Theta^{ba} = 0.\end{aligned} \tag{3.188}$$

因此，在时空变换和洛伦兹变换下不变的场论必有对称的能动张量

$$\Theta^{ab} = \Theta^{ba}. \tag{3.189}$$

3.9 自 旋 流

如果场 $\varphi(x)$ 具有多个空间分量而不再是标量的话，则对于四维角动量的推导会变得有些复杂.

3.9.1 电磁场

首先来考虑电磁场的情况，其中相关场量为 4 矢势 $A^a(x)$. 当变换到一个新的坐标系

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b \tag{3.190}$$

后，在绝对时空中同一点的矢量场是保持不变的. 但是，由于分量 A^a 在不同的坐标系中对应于不同的基矢，因此它们必须随坐标 x^a 同时变化. 因为 $A^a(x)$ 是一个矢量，所以它如下所示般变换：

$$A'^a(x') = \Lambda^a{}_b A^b(x). \tag{3.191}$$

对于一个无穷小变换

$$\delta_{\mathrm{s}} x^a = \omega^a{}_b x^b \tag{3.192}$$

它的实质变分为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}} A^a(x) &= A'^a(x) - A^a(x) = A'^a(x - \delta x) - A^a(x) \\ &= \omega^a{}_b A^b(x) - \omega^c{}_b x^b \partial_c A^a.\end{aligned} \tag{3.193}$$

第一项为**自旋变换**，另一项为**轨道变换**. 轨道变换也可用式 (3.82) 中定义的洛伦兹群生成元 $\hat{L}_{ab}$ 写为

$$\delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{orb}} A^a(x) = -\mathrm{i}\omega^{bc}\hat{L}_{bc}A^a(x). \tag{3.194}$$

利用式 (1.51) 中的 4×4 生成元 L_{ab}，矢量场的自旋变换则可方便地重新改写. 将此两部分加在一起，我们就构造了 4 维总角动量算符

$$\hat{J}_{ab} \equiv 1\times\hat{L}_{ab} + L_{ab}\times 1, \tag{3.195}$$

并且可以将变换 (3.193) 写为

$$\delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{orb}} A^a(x) = -\mathrm{i}\omega^{ab}\hat{J}_{ab}A(x). \tag{3.196}$$

如果拉格朗日密度只包含 4-矢量 A^a 的标量组合并且不显含空间坐标 x 的话，则它在洛伦兹变换下就如同标量场那样变化：

$$\mathcal{L}'(x') \equiv \mathcal{L}(A'(x'), \partial' A'(x')) = \mathcal{L}(A(x), \partial A(x)) \equiv \mathcal{L}(x). \tag{3.197}$$

无穷小变换下，该变化量为

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L} = -(\partial_a\mathcal{L}\, x^b)\omega^a{}_b. \tag{3.198}$$

由于洛伦兹变换是对称变换，我们可以像在式 (3.170) 中那样计算 4 维总角动量的流密度：

$$J^{ab,c} = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c A_a}A^b - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c A^d}\partial^a A^d x^b - \delta^{ac}\mathcal{L}\, x^b\right) - (a\leftrightarrow b)\right]. \tag{3.199}$$

系数 $1/c$ 的选取是为了使电磁场的 Noether 流具有常规的物理量纲. 事实上，最后两项与标量场的 4 维角动量的流密度 $L^{ab,c}$ 具有相同的形式. 这里它们构成了矢势 $A^a(x)$ 的相应的物理量：

$$L^{ab,c} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c A^d}\partial^a A^d x^b - \delta^{ac}\mathcal{L}\, x^b\right) + (a\leftrightarrow b). \tag{3.200}$$

这也可以写为

$$L^{ab,c} = \frac{1}{c}\left\{-\mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c A^d}\hat{L}^{ab}A^d + \left[\delta^{ac}\mathcal{L}x^b - (a\leftrightarrow b)\right]\right\}, \tag{3.201}$$

其中，$\hat{L}^{ab}$ 是式 (1.107) 中 4 维角动量的微分算子，它满足对易法则 (1.71) 和 (1.72).

就像在式 (3.181) 中标量场情形那样，式 (3.200) 中的流密度可以用正则能动张量表示为

$$L^{ab,c} = x^a\Theta^{bc} - x^b\Theta^{ac}. \tag{3.202}$$

式 (3.199) 中的第一项，即

$$\varSigma^{ab,c} = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c A_b}A^b - (a\leftrightarrow b)\right] \tag{3.203}$$

被称为**自旋流密度**. 它可以用式 (1.51) 中洛伦兹群的 4×4 生成元写为

$$\varSigma^{ab,c} = -\frac{\mathrm{i}}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c A^d}(L^{ab})_{d\sigma}A^\sigma. \tag{3.204}$$

这两个流密度的和

$$J^{ab,c}(x) \equiv L^{ab,c}(x) + \varSigma^{ab,c}(x) \tag{3.205}$$

具有零散度

$$\partial_c J^{ab,c}(x) = 0. \tag{3.206}$$

因此，由荷

$$J^{ab} = \int \mathrm{d}^3 x\, J^{ab,0}(x) \tag{3.207}$$

所给出的总角动量是一个运动常量.

单独来看，角动量和自旋都是不守恒的. 同式 (3.188) 中一样，利用能动张量的守恒定律我们发现轨道角动量流密度满足

$$\partial_c L^{ab,c}(x) = -\left[\varTheta^{ab}(x) - \varTheta^{ba}(x)\right]. \tag{3.208}$$

由此我们得到自旋流的散度为

$$\partial_c \varSigma^{ab,c}(x) = \left[\varTheta^{ab}(x) - \varTheta^{ba}(x)\right]. \tag{3.209}$$

对于与轨道和自旋流相关的荷，有

$$L^{ab}(t) \equiv \int \mathrm{d}^3 x L^{ab,0}(x), \qquad \varSigma^{ab}(t) \equiv \int \mathrm{d}^3 x \varSigma^{ab,0}(x), \tag{3.210}$$

这意味着有如下的时间依赖关系：

$$\begin{aligned}\dot{L}^{ab}(t) &= -\int \mathrm{d}^3 x\, \left[\varTheta^{ab}(x) - \varTheta^{ba}(x)\right],\\ \dot{\varSigma}^{ab}(t) &= \int \mathrm{d}^3 x \left[\varTheta^{ab}(x) - \varTheta^{ba}(x)\right].\end{aligned} \tag{3.211}$$

具有非零自旋的场总是具有非对称的能动张量.

于是，回到自然单位制，流 $J^{ab,c}$ 变为

$$J^{ab,c}=\left(\frac{\partial\delta_{\mathrm{s}}^{x}\mathcal{L}}{\partial\partial_{c}\omega_{ab}(x)}-\delta^{ac}\mathcal{L}x^{b}\right)-(a\leftrightarrow b).\tag{3.212}$$

利用微分的链式法则，我们看到，关于 $\partial\omega_{ab}(x)$ 的微分只来源于对场的微分. 对于标量场，我们得到

$$\frac{\partial\delta_{\mathrm{s}}^{x}\mathcal{L}}{\partial\partial_{c}\omega_{ab}(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{c}\varphi}\frac{\partial\delta_{\mathrm{s}}^{x}\varphi}{\partial\omega_{ab}(x)},\tag{3.213}$$

而对于矢量场，

$$\frac{\partial\delta_{\mathrm{s}}^{x}\mathcal{L}}{\partial\partial_{c}\omega_{ab}(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{c}A^{d}}\frac{\partial\delta_{\mathrm{s}}^{x}A^{d}}{\partial\omega_{ab}}.\tag{3.214}$$

另一个计算角动量的法则是引入一个依赖于时空的变换

$$\delta^{x}x=\omega^{a}{}_{b}(x)x^{b},\tag{3.215}$$

在此变换下，标量场变为

$$\delta_{\mathrm{s}}\varphi=-\partial_{c}\varphi\omega^{c}{}_{b}(x)x^{b},\tag{3.216}$$

相应的拉格朗日密度变为

$$\delta_{\mathrm{s}}^{x}\varphi=-\partial_{c}\mathcal{L}\,\omega^{c}{}_{b}(x)x^{b}=-\partial_{c}(x^{b}\mathcal{L})\omega^{c}{}_{b}(x).\tag{3.217}$$

将 $\delta_{\mathrm{s}}^{x}A^{d}$ 的自旋和轨道变换分开，我们得到了对于总角动量流 $J^{ab,c}$ 的两个贡献 $\sigma^{ab,c}$ 和 $L^{ab,c}$，后者来源于式 (3.212) 的第二项.

3.9.2 狄拉克场

我们现在来看狄拉克场. 在式 (3.190) 中的洛伦兹变换下，它按照如下规则变换：

$$\psi(x')\xrightarrow{\Lambda}\psi'_{\Lambda}(x)=D(\Lambda)\psi(x),\tag{3.218}$$

其中，$D(\Lambda)$ 为洛伦兹群的 4×4 旋量表示矩阵. 对于无穷小变换，它们的矩阵元可以十分容易地加以确定. 对于一个无穷小洛伦兹变换

$$\Lambda_{a}{}^{b}=\delta_{a}{}^{b}+\omega_{a}{}^{b},\tag{3.219}$$

在此变换下坐标变化量为

$$\delta_{\mathrm{s}}x^{a}=\omega^{a}{}_{b}x^{b},\tag{3.220}$$

自旋在表示矩阵下的变换为

$$D(\delta_{a}{}^{b}+\omega_{a}{}^{b})=\left(1-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma^{ab}\right)\psi(x),\tag{3.221}$$

其中，σ_{ab} 是作用在由式 (1.228) 定义的旋量空间上的 4×4 矩阵. 我们在式 (1.226) 中已经证明，自旋矩阵 $\Sigma_{ab}\equiv\sigma_{ab}/2$ 同洛伦兹变换的轨道和自旋 -1 生成元 $\hat{L}_{aba}$ 和 L_{ab} 一样，满足相同的对易法则 (1.71) 和 (1.72).

该场具有如下实质变分 [对照式 (3.193)]：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{s}}\psi(x)=\psi'(x)-\psi(x)&=D(\delta_a{}^b+\omega_a{}^b)\psi(x-\delta x)-\psi(x)\\&=-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\sigma^{ab}\psi(x)-\omega^c{}_bx^b\partial_c\psi(x)\\&=-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\left[S^{ab}+\hat{L}^{ab}\right]\psi(x)\equiv-\mathrm{i}\frac{1}{2}\omega_{ab}\hat{J}^{ab}\psi(x),\end{aligned}\tag{3.222}$$

最后一行表明，对于狄拉克粒子，变换分为自旋和轨道部分.

由于狄拉克拉格朗日量是洛伦兹不变的，因此在洛伦兹变换下它如同标量场般变换：

$$\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x).\tag{3.223}$$

对于无穷小变换，此改变量为

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L}=-(\partial_a\mathcal{L}x^b)\omega^a{}_b.\tag{3.224}$$

从 Noether 的意义上讲，洛伦兹变换是对称变换，基于此，对式 (3.180) 和式 (3.205) 进行扩展，我们可以计算**4 维总角动量流密度**. 结果如下：

$$J^{ab,c}=\left(-\mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c\psi}\Sigma^{ab}\psi-\mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c\psi}\hat{L}^{ab}\psi+\mathrm{cc}\right)+\left[\delta^{ac}\mathcal{L}x^b-(a\leftrightarrow b)\right].\tag{3.225}$$

如同在式 (3.181) 和式 (3.202) 中一样，式 (3.225) 中的轨道部分可以用正则能动张量表示为

$$L^{ab,c}=x^a\Theta^{bc}-x^b\Theta^{ac}.\tag{3.226}$$

式 (3.225) 中的第一项为**自旋流密度**

$$\Sigma^{ab,c}=-\mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_c\psi}\Sigma^{ab}\psi+\mathrm{c.c.}\ .\tag{3.227}$$

将式 (3.158) 代入，这可明确地写为

$$\Sigma^{ab,c}=-\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^c\Sigma^{ab}\psi=-\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{abcd}\bar{\psi}\gamma^d\gamma_5\psi,\tag{3.228}$$

其中，$\gamma_5\equiv\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. 自旋流密度对它的三个指标是完全反对称的，这对于在有挠时空中构造恰当的量子力学是一个十分重要的特性 (参看文献 [3]).

以上这些流密度的守恒特性与那些在式 (3.206)、式 (3.208) 和式 (3.209) 中的是完全一样的.

由于自旋的存在，能动张量不再是对称的.

3.10　对称的能动张量

在式 (3.209) 中，我们看到自旋的存在是正则能动张量不对称的根源. 因此，这暗示需要利用自旋流密度来构造新的对称的能动张量

$$T^{ab} = \Theta^{ab} + \Delta\Theta^{ba}. \tag{3.229}$$

为了与它的名称相符，这个量必须仍然保持 Θ^{ab} 的基本特性，即积分

$$P^a = \int \mathrm{d}^3x\, T^{a0} \tag{3.230}$$

得给出系统的总能动矢量. 如果 $\Delta\Theta^{a0}$ 为一个空间矢量的 3 散度的话，情况确实如此. Belinfante 于 1939 年得到了此恰当的构造. 他引入如下张量[5]：

$$T^{ab} = \Theta^{ab} - \frac{1}{2}\partial_c(\Sigma^{ab,c} - \Sigma^{bc,a} + \Sigma^{ca,b}), \tag{3.231}$$

由式 (3.209) 以及最后两项关于 ab 的对称性，该张量的对称性是很显然的. 而且，正如我们在式 (3.230) 中所要求的那样，它的分量

$$T^{a0} = \Theta^{a0} - \frac{1}{2}\partial_c(\Sigma^{a0,c} - \Sigma^{0c,a} + \Sigma^{ca,0}) \tag{3.232}$$

与 Θ^{a0} 相差一个纯的 3-散度.

对称能动张量 (3.231) 的另一个重要的特性是，如果我们如下构造总角动量流密度：

$$J^{ab,c} \equiv x^a T^{bc} - x^b T^{ac}, \tag{3.233}$$

则它的第零分量的空间积分

$$J^{ab} = \int \mathrm{d}^3x\, J^{ab,0}. \tag{3.234}$$

给出与式 (3.205) 中正则表述相同的总角动量. 的确，式 (3.233) 的第零分量为

$$x^a\Theta^{b0} - x^b\Theta^{a0} - \frac{1}{2}\left[\partial_k(\Sigma^{a0,k} - \Sigma^{0k,a} + \Sigma^{ka,0})x^b - (a \leftrightarrow b)\right], \tag{3.235}$$

如果我们将括号内的项对 d^3x 进行积分，利用分部积分法，对于 $a=0, b=i$ 可得

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\left[x^0\partial_k(\Sigma^{i0,k} - \Sigma^{0k,i} + \Sigma^{ki,0}) - x^i\partial_k(\Sigma^{00,k} - \Sigma^{0k,0} + \Sigma^{k0,0})\right] = \int \mathrm{d}^3x\,\Sigma^{0i,0}. \tag{3.236}$$

对于 $a=i,b=j$，则为

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[x^i\partial_k(\varSigma^{j0,k}-\varSigma^{0k,j}+\varSigma^{kj,0})-(i\leftrightarrow j)\right]=\int \mathrm{d}^3x\,\varSigma^{ij,0}. \tag{3.237}$$

式 (3.236) 和式 (3.237) 的右边就是自旋对于总角动量的贡献.

对于电磁场，自旋流密度 (3.203) 可明确地写为

$$\varSigma^{ab,c}=-\frac{1}{c}\left[F^{ca}A^b-(a\leftrightarrow b)\right]. \tag{3.238}$$

由此我们可计算出 Belinfante 修正

$$\begin{aligned}\Delta\varTheta^{ab}&=\frac{1}{2c}[\partial_c(F^{ca}A^b-F^{cb}A^a)-\partial_c(F^{ab}A^c-F^{ac}A^b)+\partial_c(F^{bc}A^a-F^{ba}A^c)]\\&=\frac{1}{c}\partial_c(F^{bc}A^a).\end{aligned} \tag{3.239}$$

将此式叠加到式 (3.150) 中的正则能动张量上

$$\varTheta^{ab}=\frac{1}{c}\left[-F^b{}_c\partial^aA^c+\frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}\right], \tag{3.240}$$

我们就得到了对称的能动张量

$$T^{ab}=\frac{1}{c}\left[-F^b{}_cF^{ac}+\frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}+(\partial_cF^{bc})A^a\right]. \tag{3.241}$$

对于自由麦克斯韦场，由于其满足 $\partial_cF^{ab}=0$ [请回忆式 (2.87)]，因此式 (3.241) 最后一项为零，于是可以从表达式中去掉，这样，T^{ab} 就与之前在式 (1.261) 中构造的电磁场的对称能动张量相一致. T^{ab} 的对称性可以通过再次利用麦克斯韦方程 $\partial_cF^{ab}=0$ 很轻易地得到证明.

回顾之前所述，根据式 (1.258) 可知，分量 $cT^{00}(x)$ 正是我们熟知的电磁场能量密度的表达式 $\mathcal{E}(x)=\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right)/2$. 分量 $c^2T^{0i}(x)$ 则与式 (1.258) 中能流密度的**坡印亭矢量** $\boldsymbol{S}(x)=c\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 相一致，而守恒律 $c^2\partial_aT^{0a}(0)$ 则再现式 (1.268) 中的坡印亭定律 $\partial_t\mathcal{E}(x)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}(x)=0$.

在有外加电流的情况下，拉格朗日密度为式 (2.84)，其正则能动张量变为

$$\varTheta^{ab}=\frac{1}{c}\left[-F^b{}_c\partial^aA^c+\frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}+\frac{1}{c}g^{ab}j^cA_c\right], \tag{3.242}$$

这正是式 (3.240) 的推广.

自旋流密度同样由式 (3.238) 给出，于是就有了相应的 Belinfante 能动张量

$$\begin{aligned}T^{ab}&=\varTheta^{ab}+\frac{1}{c}\partial_c(F^{bc}A^a)\\&=\frac{1}{c}\left[-F^b{}_cF^{ac}+\frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}+\frac{1}{c}g^{ab}j^cA_c-\frac{1}{c}j^bA^a\right].\end{aligned} \tag{3.243}$$

最后一项使得 T^{ab} 不再是对称的，除非外加电流消失. 由于外加电流的存在，守恒定律 $\partial_b T^{ab}=0$ 被修正为

$$\partial_b T^{ab}=\frac{1}{c^2}A_c(x)\partial^a j^c(x). \tag{3.244}$$

3.11 内部对称性

在量子场论中，区分不同作用量的重任是由**内部对称性**来担纲的. 它们并不牵扯场的任何时空坐标的变换. 对于一个 N 分量实场 $\phi(x)$，它们取如下形式：

$$\phi'(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_r G_r}\phi(x), \tag{3.245}$$

其中，G_r 为某个李群的生成元，且 α_r 为相关变换参数. 生成元 G_r 为 $N\times N$ 矩阵，满足如下对易关系 [请回想式 (1.65)]：

$$[G_r,G_s]=\mathrm{i}f_{rst}\,G_t,\quad r,s,t=1,\cdots,\mathrm{rank}, \tag{3.246}$$

其中，f_{rst} 为该李群的结构常数.

无穷小变换为具有下列形式的实质变换：

$$\delta_{\mathrm{s}}\phi=-\mathrm{i}\alpha_r G_r\phi. \tag{3.247}$$

与之相联的守恒流密度为

$$j_r^a=-\mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\phi}G_r\phi. \tag{3.248}$$

这也可以写为

$$j_r^a=-\mathrm{i}\pi\,G_r\phi, \tag{3.249}$$

其中，$\pi(x)\equiv\partial\mathcal{L}(x)/\partial\partial_a\phi(x)$ 为场 $\phi(x)$ 的正则动量 [对比式 (2.60)].

一个最重要的例子是关于复场 ϕ 和生成元 $G=1$ 的，这种情形下对称变换 (3.245) 仅仅是简单地乘以一个相位因子. 人们也称之为 U(1) 对称性. 其他的重要的例子是关于场 ϕ 的三重态或八重态，相应的 G_r 分别为 SU(2) 或 SU(3) 表示的生成元. U(1) 对称性导致电磁相互作用中的电荷守恒，其他两个则给出强相互作用中的 SU(2) 同位旋和 SU(3) 不变性. 不过，后面的对称性并不严格.

3.11.1 U(1) 对称性和电荷守恒

考虑复标量场的拉格朗日密度

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(\varphi(x),\varphi^*,\partial\varphi(x),\partial\varphi^*(x),x). \tag{3.250}$$

它在如下 U(1) 变换下是不变的：

$$\delta_{\mathrm{s}}\varphi(x)=-\mathrm{i}\alpha\varphi(x),\quad \delta_{\mathrm{s}}\varphi^*(x)=\mathrm{i}\alpha\varphi^*(x), \tag{3.251}$$

即 $\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L}=0$. 利用微分的链式法则，并利用式 (2.40) 中的欧拉–拉格朗日方程，我们得到

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L}=\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_a\varphi}\right)\delta_{\mathrm{s}}\varphi+\partial_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\delta_{\mathrm{s}}\varphi\right]+\mathrm{c.c.}=\partial_a\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\delta_{\mathrm{s}}\varphi\right]+\mathrm{c.c.}. \tag{3.252}$$

根据对称性约定，令式 (3.252) 为零，并将式 (3.251) 代入，我们发现

$$j_r^a=-\mathrm{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\varphi}\varphi+\mathrm{c.c.} \tag{3.253}$$

是一个守恒流.

对于自然单位下的自由场拉格朗日密度 (2.27)

$$\mathcal{L}(x)=\partial_\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi \tag{3.254}$$

我们得到了式 (2.67) 的守恒流密度：

$$j_\mu=-\mathrm{i}\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi, \tag{3.255}$$

其中，符号 $\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi$ 表示式 (2.68) 所示右求导和左求导之差.

对于一个自由狄拉克场，流密度 (3.253) 取如下形式：

$$j^\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \tag{3.256}$$

3.11.2 内部对称性破缺

物理上很重要的 SU(2) 同位旋对称性以及 SU(3) 对称性并不是严格的，其拉格朗日对称变分不严格为零. 这种情况下，我们须利用基于式 (3.109) 的守恒定律的另一种推导方法. 我们引入依赖于时空的参量 $\alpha(x)$，从作用量的极值性得到

$$\partial_a\frac{\partial\mathcal{L}^\epsilon}{\partial\partial_a\alpha_r(x)}=\frac{\partial\mathcal{L}^\epsilon}{\partial\alpha_r(x)}. \tag{3.257}$$

这就给出了上述流的散度定律

$$\partial_a j_r^a(x)=\frac{\partial\mathcal{L}^\epsilon}{\partial\alpha_r}. \tag{3.258}$$

3.12　生成量子场的对称变换

就像在量子力学系统中一样，与 3.11 节所得到的守恒流相关联的荷可用来生成场的变换，该荷正是得自此变换. 对此，我们只须借助正则场对易规则.

对于式 (3.248) 中 N 分量实场 $\phi(x)$ 的流，相应的荷为

$$Q_r = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_a\phi} G_r\phi \tag{3.259}$$

并可写为

$$Q_r = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\, \pi\, G_r\phi, \tag{3.260}$$

其中，$\pi(x) \equiv \partial\mathcal{L}(x)/\partial\partial_a\phi(x)$ 是场 $\phi(x)$ 的正则动量. 进行量子化后，这些场满足下列正则对易关系：

$$\begin{aligned}
&[\hat{\pi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\phi}(\boldsymbol{x}',t)] = -\mathrm{i}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&[\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\phi}(\boldsymbol{x}',t)] = 0,\\
&[\hat{\pi}(\boldsymbol{x},t), \hat{\pi}(\boldsymbol{x}',t)] = 0.
\end{aligned} \tag{3.261}$$

由此我们可以直接得到量子化的荷 (3.260) 和场算符 $\hat{\phi}(x)$ 间的对易关系：

$$[\hat{Q}_r, \hat{\phi}(x)] = -\alpha_r G_r\phi(x). \tag{3.262}$$

我们也发现，量子化的荷 $\hat{Q}_r$ 间的对易关系同式 (3.246) 中生成元 G_r 间的对易关系是一样的：

$$[\hat{Q}_r, \hat{Q}_s] = f_{rst}\hat{Q}_t, \quad r,s,t = 1,\cdots,\mathrm{rank}. \tag{3.263}$$

因此，算符 $\hat{Q}_r$ 构成了由量子场 $\hat{\phi}(x)$ 张成的多粒子希尔伯特空间 (**福克空间**) 对称群的生成元的一个表示.

作为一个例子，我们来用这种方法推导与洛伦兹生成元 (3.205) 相联的守恒荷

$$J^{ab} \equiv \int \mathrm{d}^3x J^{ab,0}(x) \tag{3.264}$$

的对易关系. 显然，这与式 (1.51) 中 4×4 矩阵的对易关系是一样的，也与式 (1.107) 中的量子力学生成元的对易关系

$$[\hat{J}^{ab}, \hat{J}^{ac}] = -\mathrm{i}g^{aa}\hat{J}^{bc} \tag{3.265}$$

一致. 生成元 $J^{ab} \equiv \int \mathrm{d}^3x J^{ab,0}(x)$ 是式 (3.210) 中与轨道和自旋转动相关的两个守恒荷的和 $J^{ab} = L^{ab}(t) + \varSigma^{ab}(t)$. 根据式 (3.211)，这些独立的守恒荷各自都是依赖

于时间的，只有它们的和才是守恒的. 不过，它们都生成了洛伦兹变换：$L^{ab}(t)$ 针对场的时空自变量，而 $\Sigma^{ab}(t)$ 则作用在自旋指标上. 这样的一个结果就是，它们均满足式 (3.265) 中的对易关系：

$$[\hat{L}^{ab}, \hat{L}^{ac}] = -\mathrm{i}g^{aa}\hat{L}^{bc}, \quad [\hat{\Sigma}^{ab}, \hat{\Sigma}^{ac}] = -\mathrm{i}g^{aa}\hat{\Sigma}^{bc}. \tag{3.266}$$

值得注意的是，只要对称破缺项对于理论的正则动量无贡献的话，对易关系 (3.262) 和 (3.263) 在存在这些项的情况下也成立. 这样的项称作**软对称破缺项**(soft symmetry-breaking term). 因为荷不再是守恒的，因此我们必须在对易关系 (3.262) 和 (3.263) 中引入时间自变量. 这些关系中的量必须是同一时刻的，这样才能利用等时正则对易法则.

式 (3.263) 中的对易子在发展强作用理论中起到了十分重要的作用，在其中它最早是以弱电荷的对称破缺 SU(3) × SU(3) **荷代数**的形式出现的. 此对称性我们将在第 10 章中进行细致的讨论.

3.13 相对论性质点的能动张量

如果想要研究电磁场中带电相对论性质点系的能量和动量的话，我们需要考虑基于式 (3.70) 的拉格朗日密度的积分的作用量 (3.68)：

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x), \quad 其中 \quad \mathcal{L}(x) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \overset{\mathrm{m}}{L} (\dot{x}^a(\tau))\, \delta^{(4)}(x - x(\tau)). \tag{3.267}$$

这使得我们可以用处理场的相关问题的方法来推导点粒子系的局域守恒律. 不过，与其这样处理，我们更希望能够利用之前所推导的整体守恒律，并通过利用平凡恒等式

$$\int \mathrm{d}^4x\, \delta^{(4)}(x - x(\tau)) = 1 \tag{3.268}$$

适当插入 δ 函数将其化为局域守恒律.

作为一个例子，我们来考虑动量 (3.73) 的守恒律 (3.72). 利用式 (3.268)，这可写为

$$0 = -\int \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} p_c(\tau)\right] \delta^{(4)}(x - x(\tau)). \tag{3.269}$$

注意，在这个表示中，4 维体积的边界包含体系在初始时刻和末态时刻的信息. 然后，我们对 τ 进行分部积分，式 (3.269) 就可重写为

$$0 = -\int \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left[p_c(\tau)\delta^{(4)}(x - x(\tau))\right] + \int \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau p_c(\tau)\partial_\tau \delta^{(4)}(x - x(\tau)). \tag{3.270}$$

如果轨道是从无穷远来并消失在无穷远的话，则第一项为零. 第二项可改写为

$$0=-\int \mathrm{d}^4x\,\partial_b\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau p_c(\tau)\dot{x}^b(\tau)\delta^{(4)}(x-x(\tau))\right]. \tag{3.271}$$

这表明

$$\overset{\mathrm{m}}{\Theta}{}^{cb}(x)\equiv m\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\dot{x}^c(\tau)\dot{x}^b(\tau)\delta^{(4)}(x-x(\tau)) \tag{3.272}$$

满足局域守恒律

$$\partial_b\overset{\mathrm{m}}{\Theta}{}^{cb}(x)=0, \tag{3.273}$$

这正是质点能动张量所满足的守恒律.

总动量可通过对 Θ^{c0} 求空间积分得到

$$P^a(t)\equiv\int \mathrm{d}^3x\,\Theta^{c0}(x). \tag{3.274}$$

对于点粒子，这与正则动量 $p^a(t)$ 是相一致的. 如果拉格朗日量只依赖于速度 $\dot{x}^a$ 而与位置 $x^a(t)$ 无关，则动量 $p^a(t)$ 是运动常量：$p^a(t)\equiv p^a$.

洛伦兹不变量

$$M^2=P^2=g_{ab}P^aP^b \tag{3.275}$$

称作系统的**总质量**. 对于一个点粒子而言，它与粒子的质量相一致.

对轨道 $x^a(\tau)$ 作洛伦兹变换，依照上一节的规则，我们发现总角动量流

$$L^{ab,c}\equiv x^a\Theta^{bc}-x^b\Theta^{ac} \tag{3.276}$$

满足守恒律：

$$\partial_cL^{ab,c}=0. \tag{3.277}$$

对总角动量流 $L^{ab,c}$ 的第零分量进行空间积分，我们得到相应的守恒荷：

$$L^{ab}(t)\equiv\int \mathrm{d}^3x\,L^{ab,0}(x)=x^ap^b(t)-x^bp^a(t). \tag{3.278}$$

3.14 电磁场中带电质点的能动张量

我们来考虑一个带电点粒子和电磁场拉格朗日量的结合

$$\mathcal{A}=-mc\int_{\tau_a}^{\tau_b}\mathrm{d}\tau\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a(\tau)\dot{x}^b(\tau)}-\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4xF_{ab}F^{ab}-\frac{e}{c}\int_{\tau_a}^{\tau_b}\mathrm{d}\tau\dot{x}^a(\tau)A_a(x(\tau)). \tag{3.279}$$

对此作用量对粒子轨道进行变分，我们就得到了洛伦兹运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c}F^a{}_b\dot{x}^b(\tau). \tag{3.280}$$

对此作用量中的矢势进行变分，我们就得到了麦克斯韦 - 洛伦兹方程

$$-\partial_b F^{ab} = \frac{e}{c}\dot{x}^b(\tau). \tag{3.281}$$

作用量 (3.279) 在轨道和电磁场平移变换下是不变的. 第一项的不变性是显而易见的，因为它只依赖于轨道变量 $x^a(\tau)$ 的导数. 第二项在变换下只有一个全散度的改变量 [回顾式 (3.132)]. 相互作用项也仅仅改变一个全散度项. 的确，在无穷小时空平移变换 $x^b(\tau) \to x^b(\tau) - \boldsymbol{\epsilon}^b$ 下，速度 $\dot{x}^a(\tau)$ 是不变的：

$$\dot{x}^a(\tau) \to \dot{x}^a(\tau), \tag{3.282}$$

并且 $A_a(x^b)$ 作如下变换：

$$A_a(x^b) \to A'_a(x^b) = A_a(x^b + \epsilon^b) = A_a(x^b) + \epsilon^b\partial_a A_a(x^b). \tag{3.283}$$

对于作用量 (3.279) 中的拉格朗日密度，这意味着它的实质变分为一个纯散度项：

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{L} = \epsilon^b\partial_b\mathcal{L}. \tag{3.284}$$

现在，借助于欧拉–拉格朗日方程，我们再次来计算该变分. 计算给出

$$\delta_{\mathrm{s}}\mathcal{A} = \int \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{L}}{\partial x'^a}\delta_{\mathrm{s}}x^a + \int \mathrm{d}^4x \frac{\partial \overset{\mathrm{em}}{\mathcal{L}}}{\partial\partial_c A^a}\delta_{\mathrm{s}}A^a. \tag{3.285}$$

第一项可以进行类似于式 (3.270) 和式 (3.271) 中那样的处理，这样做之后，它具有如下形式：

$$\begin{aligned} -\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(p_a + \frac{e}{c}A_a\right) = &-\int \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\left(p_a + \frac{e}{c}A_a\right)\delta^{(4)}(x - x(\tau)\right] \\ &+ \int \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \left(p_a + \frac{e}{c}A_a\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^{(4)}(x - x(\tau)), \end{aligned} \tag{3.286}$$

当去掉边界项后就变成了

$$-\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(p_a + \frac{e}{c}A_a\right) = \partial_c \int \mathrm{d}^4x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \left(p_a + \frac{e}{c}A_a\right)\frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}\tau}\delta^{(4)}(x - x(\tau)). \tag{3.287}$$

由于式 (3.279) 中的相互作用并不包含规范场的导数，因此式中的电磁部分与之前在第 3.6.1 节中的是一样的. 这样我们就得到了正则能动张量

$$\Theta^{ab}(x) = \int \mathrm{d}\tau \left(p^a + \frac{e}{c}A^a\right)\dot{x}^b(\tau)\delta^{(4)}(x - x(\tau)) - F^b{}_c\partial^a A^c + \frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}. \tag{3.288}$$

我们现在通过计算散度来检验它的守恒性：

$$\partial_b \Theta^{ab}(x) = \int \mathrm{d}\tau \left(p + \frac{e}{c}A_a\right) \dot{x}^b(\tau)\partial_b \delta^{(4)}(x - x(\tau))$$
$$-\partial_b F^b{}_c \partial^a A^c - F^b{}_c \partial_b \partial^a A^c + \frac{1}{4}\partial^a (F^{cd}F_{cd}). \tag{3.289}$$

第一项等于

$$-\int \mathrm{d}\tau \left(p^a + \frac{e}{\tau}A^a\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^{(4)}(x - x(\tau)) = \int \mathrm{d}\tau \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(p^a + \frac{e}{c}A^a\right)\right]\delta^{(4)}(x - x(\tau)) \tag{3.290}$$

至多差一个边界项. 利用洛伦兹运动方程 (3.280)，这变为

$$\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \left(F^a{}_b \dot{x}^b(\tau) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}A^a\right)\delta^{(4)}(x - x(\tau)). \tag{3.291}$$

将麦克斯韦方程

$$\partial_b F^{ab} = -e\int \mathrm{d}\tau (\mathrm{d}x^a/\mathrm{d}\tau)\delta^{(4)}(x - x(\tau)) \tag{3.292}$$

代入，则 (3.289) 式中的第二项可重新写为

$$-\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}x_c}{\mathrm{d}\tau}\partial^a A^c \delta^{(4)}(x - x(\tau)), \tag{3.293}$$

这等同于

$$-\frac{e}{c}\int \mathrm{d}\tau \left(\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}\tau}F^{ac} + \frac{\mathrm{d}x_c}{\mathrm{d}\tau}\partial^c A^a\right)\delta^{(4)}(x - x(\tau)), \tag{3.294}$$

于是就与式 (3.291) 相互抵消. 最后，由于 F^{bc} 的反对称性，式 (3.289) 中最后一项等于

$$-F^b{}_c \partial^a F_b{}^c + \frac{1}{4}\partial^a (F^{cd}F_{cd}). \tag{3.295}$$

通过将齐次麦克斯韦方程，即比安基恒等式 (2.89)，改写为下列形式：

$$\partial_c F_{ab} + \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} = 0, \tag{3.296}$$

并将它与 F^{ab} 进行缩并，我们发现式 (3.295) 恒为零.

从式 (3.288) 可以很容易构造 Belinfante 对称能动张量. 我们注意到自旋密度完全依赖于矢势，因此与之前所得 [参看式 (3.238)] 是一样的

$$\Sigma^{ab,c} = -\left[F^{ca}A^b - (a \leftrightarrow b)\right]. \tag{3.297}$$

因此，需要添加到正则能动张量中的额外项是 [请参看式 (3.239)]

$$\Delta\Theta^{ab} \;=\; \partial_c(F^{ab}A^a) = \frac{1}{2}(\partial_c F^{bc}A^a + F^{bc}\partial_c A^a). \tag{3.298}$$

此表达式中的最后一项用来将正则能动张量中电磁部分进行对称化，这样就得到了式 (3.241) 中的 Belinfante 形式：

$$\overset{\text{em}}{T}{}^{ab} = -F^b{}_c F^{ac} + \frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}. \tag{3.299}$$

式 (3.298) 中包含 $\partial_c F^{bc}$ 的那项对于对称化 Θ^{ab} 中的物质部分是必要的，该项在没有电荷的情况下将消失. 事实上，当再次利用麦克斯韦方程，该项变为

$$-\frac{e}{c}\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^b(\tau)A^a\delta^{(4)}(x - x(\tau)), \tag{3.300}$$

于是恰好与式 (3.288) 中相应的项相抵消. 如此，我们就发现带电粒子和电磁场的总的能动张量只不过是两个对称能动张量之和：

$$\begin{aligned} T^{ab} &= \overset{\text{m}}{T}{}^{ab} + \overset{\text{em}}{T}{}^{ab} \\ &= m\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^a\dot{x}^b\delta^{(4)}(x - x(\tau)) - F^b{}_c F^{ac} + \frac{1}{4}g^{ab}F^{cd}F_{cd}. \end{aligned} \tag{3.301}$$

为完整起见，我们现在来检验它的守恒性. 考察散度 $\partial_b T^{ab}$，对比式 (3.291) 和式 (3.294)，第一项给出

$$\frac{e}{c}\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^b(\tau)F^a{}_b(x(\tau)), \tag{3.302}$$

恰好与第二项的散度

$$-\partial_b F^b{}_c F^{ac} = -\frac{e}{c}\int \mathrm{d}\tau\, \dot{x}_c(\tau)F^{ac}(x(\tau)) \tag{3.303}$$

相抵消.

文献与注记

对于经典电磁场的更多细致讨论，请参看：

L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1951;

A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, MacMillan, New York, N.Y. 1964;

J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1975.

其他所列独立文献为：

[1] S. Coleman and J.H. Van Vleck, Phys. Rev. **171**, 1370 (1968).

[2] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific, Singapore 2006, 4th extended edition, pp. 1–1546 (`kl/b5`), 其中`kl` 为网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的缩写.

[3] 此问题在我的教科书
H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* World Scientific, Singapore 2006, 4th extended edition, pp. 1–1546 (`kl/b5`) 中有论述，其中`kl` 代表网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert`.

[4] E. Noether, Nachr. d. vgl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Klasse, **2**, 235 (1918);
也请参考：
E. Bessel-Hagen, Math. Ann. **84**, 258 (1926);
L. Rosenfeld, Me. Acad. Roy. Belg. **18**, 2 (1938);
F.J. Belinfante, Physica **6**, 887 (1939).

[5] Belinfante 能动张量在以下文献中有详细讨论：
H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II *Stresses and Defects*, World Scientific Publishing, Singapore 1989, pp. 744-1443 (`kl/b2`).

第 4 章　静磁场中的多值规范变换

There are painters who transform the sun to a yellow spot,
but there are others who transform a yellow spot into the sun.
PABLO PICASSO (1881~1973)

发展一套引力理论，关键的一点是要认识到欧氏空间中的物理定律可以直接转换到具有曲率和挠率的空间中. 就像我们在前言中所介绍的，对此，我们可以通过对当年狄拉克为将磁单极子引入电磁学而发明的场论技术进行几何学上的推广来进行. 虽然到目前为止人们还没有在自然界中发现磁单极子，但是狄拉克所用的数学方法对于我们就上述问题进行几何处理有着重要的启示.

4.1　电流分布的矢势

首先，我们来回顾一下电磁学中矢势的标准表述. 由于自然界并不存在磁单极子，因此磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 满足等式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0$，这说明 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 的三个场分量只有两个是独立的. 考虑到这一点，我们通常用一个矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 来将磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 写为 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$. 于是，将磁场和电流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ 联系在一起的安培定律 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ 就变成了矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的一个二阶微分方程

$$\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}](\boldsymbol{x})=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}). \tag{4.1}$$

本章中，我们将采用自然单位制 $c=1$，这样就避免了重复书写因子 c.

这个矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 是一个**规范场** (gauge field). 对于一个给定的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$，它的任何一个局域规范变换

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

都对应于同样的磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$. 这使得规范场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的物理自由度降为二，与 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 是一致的. 为了保证这一点，变换函数必须为单值的，即加在它上面的导数必须是对易的：

$$(\partial_i\partial_j-\partial_j\partial_i)\Lambda(\boldsymbol{x})=0. \tag{4.3}$$

只有当矢势满足

$$(\partial_i\partial_j-\partial_j\partial_i)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4.4}$$

时，表示磁单极不存在的表达式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 才成立. 上述可积性使得 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 成为该磁场规范表述中的一个**比安基恒等式** [参看式 (2.88) 后的一般表达式].

为了求解式 (4.1)，我们需通过选择特定的规范来移除上述规范不确定性，例如可以选取**横场规范** $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=0$，在此规范下有 $\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]=-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$，于是得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{4.5}$$

相应的磁场为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{R}'}{R'^3},\quad \boldsymbol{R}'\equiv\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}. \tag{4.6}$$

对于磁场的表述并不只有上述标准表示这一种可能性. 其实，我们也可以用一个标量势 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 来表示磁场，不过由于磁场的物理自由度为 2，因此该标量势必须是多值的.

4.2 磁场的多值梯度表示

考虑一个沿着曲线 L 的带有电流 I 的无穷小闭合细导线. 它上面的电流密度可标示为

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=I\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L), \tag{4.7}$$

其中, $\delta(\boldsymbol{x};L)$ 为该闭合曲线上的 $\boldsymbol{\delta}$ 函数：

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L)=\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{x}'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{4.8}$$

对于一个闭合曲线 L，该函数的散度为零：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L)=0. \tag{4.9}$$

这可通过利用连接任意两点 x_1 和 x_2 开放曲线 $L_{x_1}^{x_2}$ 上 δ 函数的性质而加以证明. 这个函数定义为

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_{x_1}^{x_2})=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{4.10}$$

它满足

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_{x_1}^{x_2})=\delta(\boldsymbol{x}_1)-\delta(\boldsymbol{x}_2). \tag{4.11}$$

对于闭合曲线 L, 方程 (4.11) 的右边为零，于是有

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L)=0. \tag{4.12}$$

作为一个例子，我们取 $L_{x_1}^{x_2}$ 为沿着 z 轴正向由 z_1 到 z_2 的一条直线，因此

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L_{x_1}^{x_2}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z'\, \delta(\boldsymbol{x})\delta(y)\delta(z-z') = \delta(x)\delta(y)[\Theta(z-z_1) - \Theta(z-z_2)], \quad (4.13)$$

并且

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L_{x_1}^{x_2}) = \delta(x)\delta(y)\left[\delta(z-z_1) - \delta(z-z_2)\right] = \delta(x_1) - \delta(x_2). \quad (4.14)$$

由式 (4.5)，我们可以得到相应的矢势

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi}\int_L \mathrm{d}x' \frac{1}{|x-x'|}, \quad (4.15)$$

从而得到相应的磁场

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi}\int_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\times \boldsymbol{R}'}{R'^3}, \quad \boldsymbol{R}' \equiv \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}. \quad (4.16)$$

现在我们从多值标量场的角度来得到同样的结果. 令 $\varOmega(\boldsymbol{x};S)$ 为电流回路 L 对点 x 张成的立体角 (图 4.1). 如果用 S 来标记一个任意的以回路 L 为边界的曲面，且 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$ 为其面元，则 $\varOmega(\boldsymbol{x};S)$ 可通过下列面积分计算而得：

$$\varOmega(\boldsymbol{x};S) = \int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot \boldsymbol{R}'}{R'^3}. \quad (4.17)$$

$\varOmega(x;S)$ 中的变量 S 强调这个一计算决定于所选的曲面 S. $\varOmega(x;S)$ 的取值范围为 -2π 到 2π，如果使 L 居于 xy 平面并且选取 S 在同一平面内，这一点是很容易看出来的. 不难看出，对于 $\varOmega(x;S)$ 来说，2π 对应着点 x 刚刚好在 S 之下，而 -2π 则对应着点 x 刚刚好在它之上. 于是，我们可如下构造一个矢量场：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};S) = \frac{I}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\varOmega(\boldsymbol{x};S), \quad (4.18)$$

它等于

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};S) = \frac{I}{4\pi}\int_S \mathrm{d}S'_k \boldsymbol{\nabla}\frac{R'_k}{R'^3} = -\frac{I}{4\pi}\int_S \mathrm{d}S'_k \boldsymbol{\nabla}'\frac{R'_k}{R'^3}. \quad (4.19)$$

这可重新写为

$$B_i(\boldsymbol{x};S) = -\frac{I}{4\pi}\left[\int_S \left(\mathrm{d}S'_k\,\partial'_i \frac{R'_k}{R'^3} - \mathrm{d}S'_i\,\partial'_k \frac{R'_k}{R'^3}\right) + \int_S \mathrm{d}S'_i\,\partial'_k \frac{R'_k}{R'^3}\right]. \quad (4.20)$$

利用斯托克斯定理

$$\int_S (\mathrm{d}S_k\partial_i - \mathrm{d}S_i\partial_k) f(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{kil}\int_L \mathrm{d}x_l f(\boldsymbol{x}), \quad (4.21)$$

以及关系式 $\partial'_k(R'_k/R'^3) = 4\pi\delta^{(3)}(x-x')$，我们得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};S) = -I\left[\frac{1}{4\pi}\int_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{R}'}{R'^3} + \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}'\delta^{(3)}(x-x')\right]. \tag{4.22}$$

第一项正是电流 I 所产生的磁场 (4.16). 第二项为一个奇异磁场，它由 L 所包围的任一曲面 S 内一个无穷薄的磁偶极层所产生.

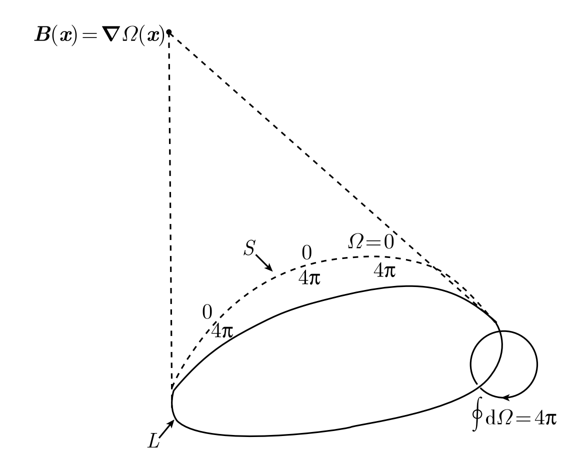


图 4.1　无穷细闭合回路 L. $\boldsymbol{x}$ 点的磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 正比于相应于 $\boldsymbol{x}$ 点该闭合回路所张的立体角 $\Omega(\boldsymbol{x})$. 在任何单值定义的 $\Omega(\boldsymbol{x})$ 中，总存在一个曲面 S，当穿过它时 $\Omega(\boldsymbol{x})$ 的值会有一个 4π 的跳跃. 而在多值定义中，这个面将不存在

第二项正是式 (4.17) 中通过表面积分而定义的立体角 $\Omega(\boldsymbol{x};S)$ 的一个直接结果. 如果 $\boldsymbol{x}$ 穿越表面 S，立体角将有一个 4π 的跃变.

其实，我们可以对式 (4.19) 用另一种稍微不同的方式进行改写. 类比于式 (4.8)，我们如下定义一个曲面上的 δ 函数：

$$\delta(\boldsymbol{x};S) = \int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{4.23}$$

于是我们发现式 (4.21) 中的斯托克斯定理可以写为下述 δ 函数的关系式：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S) = \delta(\boldsymbol{x};L), \tag{4.24}$$

其中，L 为曲面 S 的边界. 这个方程再一次证明了式 (4.9) 中的散度为零.

利用曲面 S 上的 δ 函数，我们可将式 (4.17) 重新写为

$$\Omega(\boldsymbol{x};S) = \int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';S)\cdot\frac{\boldsymbol{R}'}{R'^3}, \tag{4.25}$$

将式 (4.19) 重新写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};S) = -\frac{I}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\delta_k(\boldsymbol{x}';S)\boldsymbol{\nabla}'\frac{R'_k}{R'^3}, \tag{4.26}$$

并且通过分部积分将式 (4.20) 重新写为

$$B_i(x;S)=I\left\{\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'[\partial'_i\delta_k(\boldsymbol{x}';S)-\partial'_k\delta_i(\boldsymbol{x}';S)]\,\frac{R'_k}{R'^3}-\int \mathrm{d}^3x'\delta_i(\boldsymbol{x}';S)\boldsymbol{\nabla}'\cdot\frac{\boldsymbol{R}'}{R'^3}\right\}. \tag{4.27}$$

式 (4.27) 中最后一项的散度正是一个 $\delta^{(3)}$ 函数，于是我们得到

$$B_i(\boldsymbol{x};S)=-I\left[\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'[\nabla\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)]\times\frac{\boldsymbol{R}'}{R'^3}+\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';S)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right]. \tag{4.28}$$

利用式 (4.24) 和式 (4.23)，我们不难看出，此式就等于式 (4.22).

式 (4.24) 中斯托克斯定理的形式其实揭示一个很重要的性质. 如果我们将曲面 S 变为具有相同边界的另一个曲面 S' 的话，则 δ 函数 $\delta(x;S)$ 的改变量为一个标量函数的梯度

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)\rightarrow\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S')=\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)+\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x};V), \tag{4.29}$$

其中

$$\delta(\boldsymbol{x};V)\equiv\int \mathrm{d}^3x'\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{4.30}$$

为曲面形变所扫过的区域 V 上的 δ 函数. 在此变换下，式 (4.24) 左边的旋度是不变的. 将式 (4.29) 和式 (4.2) 进行比较，我们就可确定式 (4.29) 其实是一种特殊类型的规范变换 [1, 2]. 在此变换下，式 (4.28) 中第一项所描述的磁场是不变的，而第二项却不是. 这样一来，我们就非常明确该如何去构造一个规范不变的磁场：只需将其中依赖于曲面 S 的奇异部分减掉

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\frac{I}{4\pi}\left[\boldsymbol{\nabla}\Omega(\boldsymbol{x};S)+4\pi\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)\right]. \tag{4.31}$$

这样所构造出来的磁场与曲面 S 的选取无关，并且与式 (4.16) 中从通常的规范理论所得到的磁场相一致. 为了明确地验证这一点，我们来计算在曲面变换下式 (4.17) 中的立体角的改变量. 为此，我们将式 (4.25) 改写为如下形式：

$$\Omega(\boldsymbol{x};S)=-\int \mathrm{d}^3x'\,\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{R'}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';S)=-\frac{4\pi}{\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S). \tag{4.32}$$

对此进行式 (4.29) 中的规范变换，该立体角则变为

$$\Omega(\boldsymbol{x};S)\rightarrow\Omega(\boldsymbol{x};S')=\Omega(\boldsymbol{x};S)-\frac{4\pi}{\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x};V)=\Omega(\boldsymbol{x};S)-4\pi\delta(\boldsymbol{x};V), \tag{4.33}$$

于是我们发现式 (4.31) 确实是不变的. 因此，用 $\Omega(\boldsymbol{x};S)$ 的梯度与规范场 $4\pi\boldsymbol{\delta}(x;S)$ 所构成的磁场的表述与通常规范场理论中磁场的矢势 $\boldsymbol{A}(x)$ 的表述是完全等价的. 两者都是规范理论，却是两种截然不同的类型.

鉴于式 (4.29) 中所显示的规范自由性，于是我们可以将曲面 S 形变到一个标准的构型. 一种可能就是选取 S 以使 $\boldsymbol{\delta}(x;S)$ 的第三分量为零，我们称之为**轴规范**. 如果 $\boldsymbol{\delta}(x;S)$ 不具有这样的性质，我们总可以将此曲面 S 形变而扫过区域 V，使得

$$\delta(V) = -\int_{-\infty}^{z} \delta_z(\boldsymbol{x};S). \tag{4.34}$$

于是式 (4.29) 中的变换就会给出一个满足轴规范 $\delta_3(x;S)=0$ 的 $\delta(x;S)$.

与式 (4.34) 相联系的空间区域和曲面上的 δ 函数的一个一般性的微分关系为

$$\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x};V) = -\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S). \tag{4.35}$$

其实，对于立体角 $\varOmega(\boldsymbol{x};L)$，存在另一个定义，该定义与曲面 S 的形状无关而只决定于 S 的边界 L. 这可通过对 $\varOmega(\boldsymbol{x};S)$ 作穿过曲面 S 的解析延拓来实现. 该延拓消除了跃变而构造出了一个**多值函数** $\varOmega(\boldsymbol{x};L)$，它在从 $-\infty$ 到 ∞ 的范围内取值. 在空间中的每一点，存在无穷多个黎曼面，它们的分支线 (branch line) 为 L. $\varOmega(\boldsymbol{x};L)$ 在这些黎曼面上的值相差整数倍的 4π. 利用此多值函数，式 (4.16) 中的磁场可由下面这个简单的梯度得到：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\varOmega(\boldsymbol{x};L). \tag{4.36}$$

于是，式 (4.1) 中的安培定律说明这个多值立体角函数 $\varOmega(\boldsymbol{x};L)$ 满足下列方程：

$$(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\varOmega(\boldsymbol{x};L) = 4\pi\epsilon_{ijk}\delta_k(\boldsymbol{x};L). \tag{4.37}$$

我们发现，由于它的多值性，$\varOmega(\boldsymbol{x};L)$ 破坏了**施瓦茨可积性条件**. 这就使得它在数学处理上变得比较特殊. 不过，我们也要看到，它其实很合适去描述沿 L 的电流所产生的磁场.

现在我们来具体看一下 $\varOmega(\boldsymbol{x};L)$ 是如何满足式 (4.37) 的. 为简单起见，我们考虑二维情形，这种情况下，上述环线对应于两个点 (这两个点正是环线与平面的交点). 此外，我们将其中一个点移动到无限远处并将另外一个置于坐标原点. 此时，立体角 $\varOmega(\boldsymbol{x};L)$ 将变为 $\boldsymbol{x}$ 点相对于原点的方位角 $\varphi(\boldsymbol{x})$：

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \arctan\frac{x^2}{x^1}. \tag{4.38}$$

通常来讲，函数 $\arctan(x^2/x^1)$ 的单值性可通过以下方式构造，即将 x 平面沿着由原点出发到无穷远的一条线 C 割开，比如说沿着由原点到 $x=(-\infty,0)$ 的直线，并规定 $\varphi(x)$ 的值在穿越这个割线时由 π 跃变到 $-\pi$ ，如图 4.2(a) 所示.

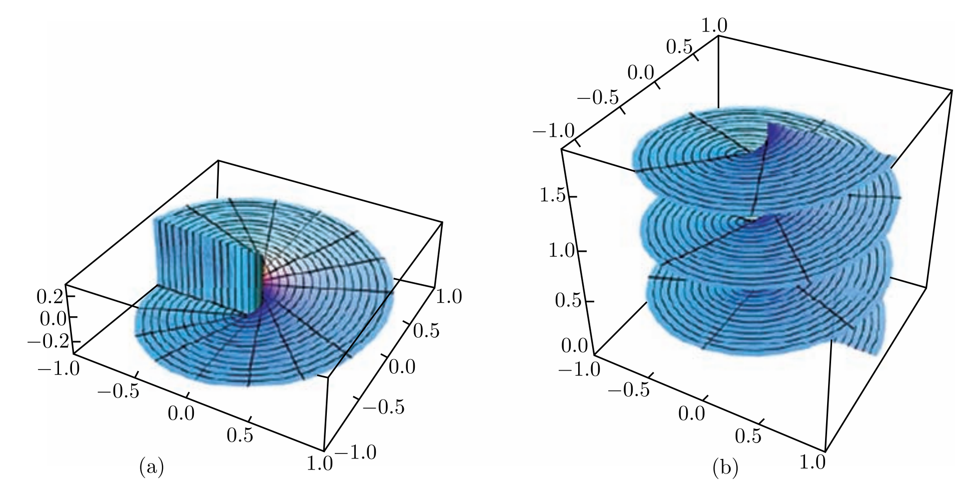


图 4.2　arctan φ 的单值和多值的定义

这个割线对应于积分 (4.17) 中的磁偶极曲面 S. 与此不同，我们将取 $\varphi(x)$ 为该函数的**多值**解析延拓. 于是，对它求导得

$$\partial_i\varphi(\boldsymbol{x}) = -\epsilon_{ij}\frac{x_j}{(x^1)^2+(x^2)^2}. \tag{4.39}$$

这与单值定义下的导数 $\partial_i\varphi(\boldsymbol{x})$ 是不同的，因为在单值定义下当穿越割线 C 时会包含一个额外的 δ 函数 $\epsilon_{ij}\delta_j(\boldsymbol{x};C)$ ，这项正对应着式 (4.22) 中的第二项. 当对式 (4.39) 中的导数的旋度在包含原点的由一个小圆 c 所包围的面 s 上作积分的话，利用斯托克斯定理，我们得到

$$\int_s \mathrm{d}^2x(\partial_i\partial_j-\partial_j\partial_i)\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_c \mathrm{d}x_i\partial_i\varphi(\boldsymbol{x}), \tag{4.40}$$

对于如图 4.2(b) 中所示的多值函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，式 (4.40) 结果为 2π. 这个结果恰显示出了对可积条件的破坏:

$$(\partial_1\partial_2-\partial_2\partial_1)\varphi(\boldsymbol{x}) = 2\pi\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}), \tag{4.41}$$

它的三维扩展就是式 (4.37). 对于单值 $\varphi(\boldsymbol{x})$，当穿越割线 C 时会有一个 2π 的跃变，在积分中这个跃变的贡献会抵消掉沿 c 的积分，于是式 (4.40) 的右边将为零. 即对于单值的 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 来说式 (4.41) 的右边为零，满足可积条件，因此是一个可积函数.

基于式 (4.41)，我们可以构造一个格林函数用以求解相应的有源微分方程，这个源由在 x_n 点穿透此二维面的无穷细线状电流叠加而成：

$$j(\boldsymbol{x}) = \sum_n I_n\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n), \tag{4.42}$$

其中，I_n 为电流. 借助于满足方程

$$(\partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1)G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{4.43}$$

的格林函数

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi}\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{4.44}$$

我们可以轻松求解下列微分方程：

$$(\partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1)f(\boldsymbol{x}) = j(\boldsymbol{x}), \tag{4.45}$$

很明显，式 (4.45) 的解为

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}'\, G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')j(\boldsymbol{x}). \tag{4.46}$$

$f(x)$ 的梯度可以给出垂直于所研究平面的任意一组线状电流所产生的磁场.

有意思的是式 (4.44) 中的格林函数正是复变函数 $(1/2\pi)\log(z-z')$ ($z=x^1+\mathrm{i}x^2$) 的虚部，而该函数的实部 $(1/2\pi)\log|z-z'|$ 恰是下述二维泊松方程：

$$(\partial_1^2+\partial_2^2)G_\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{4.47}$$

的格林函数 $G_\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$.

特别需要点明的是上述线状电流的叠加是无法延展成连续分布的. 式 (4.46) 中的积分给出多值函数的一个求和

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_n I_n \arctan\frac{x^2-x_n^2}{x^1-x_n^1}, \tag{4.48}$$

只有当它可以被解析延拓到远离割线端点 x_n 的所有黎曼面分支上时，式 (4.48) 才有严格的定义. 而如果我们将式 (4.48) 中的求和号换成积分的话，就会丧失这种可能性. 因此，坦率来讲，我们不可能将任意的连续磁场表示为矢势 $\Omega(x;L)$ 的和的梯度. 不过，这并不是这种表述的非常严重的缺陷，因为任何电流都可以在任何要求的精度下近似表示为线状电流之和，对于与之关联的磁场也是如此.

进一步更加有意思的规范结构正是源于跃变曲面形状的这种任意性，而此规范结构所引起的重要的物理结果将在第 4.6 节中详细叙述.

4.3 由多值规范变换产生磁场

在做完关于多值函数的第一个练习后，我们现在回头来看磁学中的另一个例子，这将直接给出我们所预期的几何应用. 我们之前看到，只要函数 $\Lambda(x)$ 满足式

(4.37) 式中的施瓦茨可积条件：

$$(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\Lambda(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{4.49}$$

式 (4.2) 中的局域规范变换就可产生同样的磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$. 任何不满足此条件的函数 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 都会使得磁场有如下的一个改变：

$$\Delta B_k(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{kij}(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\Lambda(\boldsymbol{x}), \tag{4.50}$$

这样就不是一个合适的规范函数. $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 的梯度

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x}) \tag{4.51}$$

就是一个**非平凡**矢势.

类似于式 (4.37) 中所述的多值坐标变换将破坏施瓦茨可积条件，$\Lambda(\boldsymbol{x})$ 函数称为**非完整规范函数** (non-holomonic gauge function).

在知道如何处理多值函数后，我们可以改变一下我们对于规范变换的看法，决定通过这样一种不恰当的规范变换 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 而从一个无场空间近似地产生出**所有的**磁场来.

例如，通过选取

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\Phi}{4\pi}\Omega(\boldsymbol{x}), \tag{4.52}$$

由式 (4.37) 不难看出，它可产生出一个磁场

$$B_k(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{kij}(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\Lambda(\boldsymbol{x}) = \Phi\delta_k(\boldsymbol{x}; L). \tag{4.53}$$

这就是一个在无穷细管中具有总磁通 Φ 的磁场. 类似于式 (4.46) 中那样，将这样的无穷细流管相加，很显然我们就可以从一个无场的空间得到任何我们想要的磁场的离散近似.

4.4 磁 单 极

多值场也可被用来描述磁单极 [4~6]. 一个磁单极荷密度 $\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ 就是如下定义的磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 的源：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}). \tag{4.54}$$

如果 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 可用矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 表示为 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$，则方程 (4.54) 意味着作用在矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 上的微分算子是非对易的：

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_i\partial_j-\partial_j\partial_i)A_k(\boldsymbol{x})=\rho_{\rm m}(\boldsymbol{x}), \tag{4.55}$$

而这正说明 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 必须是多值的.

在他著名的磁单极理论中 [7~9]，狄拉克 通过给这个粒子的世界线粘上一个跃变世界面而令场函数变为单值的，这个世界面与坐标平面在一个给定时刻的相交线就形成了**狄拉克弦**. 在此弦中，磁单极的磁场是从无穷远处注入的. 通过对该世界面适当地进行关于荷的量子化，就可使它变得物理不相关. 它在空间中的形状与图 4.1 中的跃变曲面 S 的形状一样是无关紧要的. 形状改变下的不变性再一次构筑了我们之前所谈到的第二类规范结构，而这也在文献 [2, 4, 10~12] 中反复进行了讨论.

一旦我们允许使用多值场，我们可以很轻易地再向前迈一步，就如式 (4.51) 中那样而将 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 也表示为某个标量场的梯度. 于是，上述条件就变为

$$\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\partial_k\Lambda(\boldsymbol{x})=\rho_{\rm m}(\boldsymbol{x}). \tag{4.56}$$

现在，我们来明确地构造处于 $\boldsymbol{x}_0$ 点处且带有荷 g 的磁单极的磁场，这个磁场须满足式 (4.54) 且 $\rho_{\rm m}(\boldsymbol{x})=g\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$. 我们架设一个极端细的螺线管，让它沿着一条任意的线 $L^{\boldsymbol{x}_0}$ 将磁通由无穷远某点导入 $\boldsymbol{x}_0$ 点，从那里磁通显露出来，这就是狄拉克弦的物理图景. 上标 $\boldsymbol{x}_0$ 表明这条线终结于 $\boldsymbol{x}_0$ 点. 在螺线管内，磁场无穷大，它可写为

$$\boldsymbol{B}_{\rm inside}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})=g\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0}), \tag{4.57}$$

其中，$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})$ 即是式 (4.10)，只不过换为沿 $L^{\boldsymbol{x}_0}$ 的积分：

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})=\int^{\boldsymbol{x}_0}{\rm d}^3x'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{4.58}$$

该函数的散度将聚集于螺线管的顶端 $\boldsymbol{x}_0$ 点：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})=-\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0). \tag{4.59}$$

类似地，我们可以定义沿由 $\boldsymbol{x}_0$ 到无穷远某点的线 $L_{\boldsymbol{x}_0}$ 上的 δ 函数：

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_{\boldsymbol{x}_0})=\int_{\boldsymbol{x}_0}{\rm d}x'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{4.60}$$

它满足

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_{\boldsymbol{x}_0})=\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0). \tag{4.61}$$

此种情况中磁通由 $\boldsymbol{x}_0$ 点输出到无穷远，这对应于 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的反磁单极.

作为一个例子，我们取狄拉克弦 L^0，它将磁通由正无穷远点沿 z 轴导入到原点. 令 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 标记沿 z 轴的单位矢量，则

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^0)=\hat{\boldsymbol{z}}\int_{\infty}^{0}\mathrm{d}z'\delta(x)\delta(y)\delta(z-z')=-\hat{\boldsymbol{z}}\,\delta(x)\delta(y)\Theta(z), \tag{4.62}$$

因此 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^0)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)=-\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$. 这与式 (4.11) 是相一致的，只不过是将 $\boldsymbol{x}_1$ 点移至 $(0,0,\infty)$. 如果磁通是从负无穷远处导入至原点，则 δ 函数为

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^0)=\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}z'\delta(x)\delta(y)\delta(z-z')=\hat{\boldsymbol{z}}\,\delta(x)\delta(y)\Theta(-z), \tag{4.63}$$

而它具有与式 (4.63) 相同的散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^0)=-\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$.

由式 (4.24) 中的旋度关系类推，我们可以进一步得到规范不变性. 如果我们固定端点 $\boldsymbol{x}_0$ 而将线 $L^{\boldsymbol{x}_0}$ 进行形变，则 δ 函数 (4.58) 会产生一个我们称之为**磁单极规范变换**的变化量：

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})\rightarrow\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L'^{\boldsymbol{x}_0})=\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S), \tag{4.64}$$

其中，S 为线由 $L^{\boldsymbol{x}_0}$ 变形到 $L'^{\boldsymbol{x}_0}$ 而扫过的面. 很显然，在该规范变换下方程 (4.59) 是不变的. 由此，式 (4.57) 中的磁场就是一个**磁单极规范场**，它的散度给出规范不变的单极子的磁荷密度.

注意，相对于之前在式 (4.29) 中移动曲面 S 的规范变换，这里我们将梯度换为了旋度，当然，规范不变量也相应有所改变. 在之前曲面 S 的情形下，不变量为式 (4.24) 中旋度所决定的边界线 L，而在这里不变量则是边界线 L^{x_0} 的端点 x_0，它可由式 (4.59) 中的散度确定.

相应的磁单极的通常的规范场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 可以直接加以构造. 首先考虑依赖于 L^{x_0} 的场

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})=\frac{g}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}_0})}{R'}=-\frac{g}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}_0})\times\frac{\boldsymbol{R}'}{R'^3}. \tag{4.65}$$

此式的旋度为

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})=\frac{g}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times[\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}_0})]}{R'}, \tag{4.66}$$

它包含两项

$$\frac{g}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'[\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}_0})]}{R'}-\frac{g}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'^2\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}_0})}{R'}. \tag{4.67}$$

通过分部积分，并利用式 (4.59)，第一项与 $L^{\boldsymbol{x}_0}$ 无关：

$$\frac{g}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{R'}=\frac{g}{4\pi}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3}. \tag{4.68}$$

而通过分部积分，第二项变为

$$g\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}_0}). \tag{4.69}$$

第一项就是我们想要的单极子的磁场，它的散度为 $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$，这正是我们所期望的. 第二项为螺线管中的磁场，即式 (4.57) 中的磁单极规范场. 式 (4.66) 的总的散度当然就是零.

类比于式 (4.31)，我们将后面一项去掉，就得到了单极子不依赖于 L^{x_0} 的磁场

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})-g\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0}), \tag{4.70}$$

它只依赖于 $\boldsymbol{x}_0$，并且满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=g\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$.

对于狄拉克弦沿 L^0 将磁通由正无穷远某点沿 z 轴导入至原点的情形，我们来明确计算该磁单极的矢势. 将式 (4.62) 代入到式 (4.65) 的右边，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(g)}(\boldsymbol{x};L^0)&=\frac{g}{4\pi}\int_{\infty}^{0}\mathrm{d}z'\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2+y^2+(z'-z)^2}^{3/2}}\\&=-\frac{g}{4\pi}\,\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{x}}{R(R-z)}=\frac{g}{4\pi}\,\frac{(y,-x,0)}{R(R-z)}.\end{aligned} \tag{4.71}$$

而对于式 (4.63) 中的另一条弦，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(g)}(\boldsymbol{x};L^0)&=\frac{g}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}z'\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2+y^2+(z'-z)^2}^{3/2}}\\&=\frac{g}{4\pi}\,\frac{\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{x}}{R(R+z)}=-\frac{g}{4\pi}\,\frac{(y,-x,0)}{R(R+z)}.\end{aligned} \tag{4.72}$$

该矢势只具有方位角分量. 这点可由如下方法看出：如果我们用球坐标将 (x,y,z) 表示为 $r(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$，则上述两个矢势就可分别写为

$$A_{\varphi}^{(g)}(\boldsymbol{x};L^0)=\frac{g\sin\theta}{4\pi R(1+\cos\theta)}\quad \text{或}\quad A_{\varphi}^{(g)}(\boldsymbol{x};L^0)=-\frac{g\sin\theta}{4\pi R(1-\cos\theta)}. \tag{4.73}$$

一般来讲，$L^{\boldsymbol{x}_0}$（或者 $L_{\boldsymbol{x}_0}$）的形状可取标准形态，这就好比是对规范场 $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_0})$ 或 $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_{\boldsymbol{x}_0})$ 进行了规范固定. 例如，我们总可以选择 $L^{\boldsymbol{x}_0}$ 沿着 z 轴正半轴.

一个很有趣的现象是：如果将 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 看成是在一个假象的晶体维度上的非完整位移，则类似式 (4.53) 中那样由一个沿着一条线而具有非对易导数的规范变换 $\Lambda(x)$ 而引发的磁场将提供一个沿该线的磁通流管. 在第 9.8 节中我们将证明这类比于晶体中的位错平移缺陷，在几何中对应于挠率 [式 (14.3)]. 另外，式 (4.56) 中的非对易导数 $(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\partial_k\Lambda(\boldsymbol{x}) \neq 0$ 则给出磁单极. 我们会看到，这类比于一种叫做旋错的转动缺陷，并在晶体几何中对应于以磁单极点为中心的曲率 [参看式 (14.4)].

4.5 多值规范变换导致的粒子间最小磁耦合

多值规范变换可以说是将任何形态的物质与电磁场最小耦合起来的完美工具. 例如，考虑一个非相对论性自由质点，它具有如下拉格朗日：

$$L = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2. \tag{4.74}$$

在规范变换

$$L \to L' = L + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x})\,\dot{\boldsymbol{x}} \tag{4.75}$$

下它的运动方程是不变的，因为这仅仅将作用量 $\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}tL$ 改变了一个表面项：

$$\mathcal{A}' \to \mathcal{A} = \mathcal{A} + \Lambda(\boldsymbol{x}_b) - \Lambda(\boldsymbol{x}_a). \tag{4.76}$$

如果我们令 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 为一个多值规范场的话，这种不变性就消失了. 在此种情况下，我们可以在无场空间构造一个非平凡矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x})$ (取自然单位 $e = 1$)，则相应于式 (4.75) 的非完整规范变换的拉格朗日

$$L' = \frac{M}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\,\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{4.77}$$

就可正确地描述外磁场中自由粒子的动力学.

这个由多值规范变换所获得的耦合在通常的矢势的单值规范变换下自动是不变的：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x}), \tag{4.78}$$

因为这只不过再一次给式 (4.77) 中的拉格朗日量加入同样的全微分项，这同式 (4.76) 中所描述的是一样的. 只不过使作用量多了一个无关要紧的表面项而已.

在量子力学中，同样的步骤会给出薛定谔场 $\psi(\boldsymbol{x})$ 的最小耦合. 其作用量为 $\mathcal{A}=\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3xL$，相应的拉格朗日密度 (采用自然单位 $\hbar=1$) 为

$$L=\psi^*(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{i}\partial_t+\frac{1}{2M}\boldsymbol{\nabla}^2\right)\psi(\boldsymbol{x}). \tag{4.79}$$

由薛定谔波函数 $\psi(\boldsymbol{x})$ 描述的物理应该在下述任意的局域相位变换 (也即局域 U(1) 变换) 下是不变的：

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\to\psi'(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda(\boldsymbol{x})}\psi(\boldsymbol{x},t). \tag{4.80}$$

这就要求式 (4.79) 中的拉格朗日密度也同样要替换为

$$L=\psi^*(\boldsymbol{x},t)\left(\mathrm{i}\partial_t+\frac{1}{2M}\boldsymbol{D}^2\right)\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{4.81}$$

其中，$-\mathrm{i}\boldsymbol{D}\equiv-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x})$ 为物理的动量算符.

现在，在允许多值规范变换的情形下，我们回过头来考虑非零磁场的情况. 此情形下，就如式 (4.51) 中所示，多值规范变换函数 $\Lambda(\boldsymbol{x})$ 的梯度就是非平凡矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$. 于是 $-\mathrm{i}\boldsymbol{D}$ 变为协变动量算符

$$\hat{\boldsymbol{P}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{D}=-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \tag{4.82}$$

且式 (4.81) 中的拉格朗日密度可以正确地描述量子力学中的磁耦合.

与经典情况类似，由多值规范变换给出的耦合在通常的单值规范变换下自动是规范不变的，在此单值规范变换下矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的变换关系如式 (4.78) 所示，而薛定谔波函数则经历 (4.80) 中的局域 U(1) 变换. 这个不变性正是 $\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{x},t)$ 在式 (4.78) 和式 (4.80) 的规范变换下的简单变换行为

$$\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{x},t)\to\boldsymbol{D}\psi'(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda(x)}\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{x},t) \tag{4.83}$$

的一个直接结果. 可以看出，$\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的变换关系同 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ 的是一样的，也正是因为这个原因，$\boldsymbol{D}$ 被称作**协变导数**. 由多值规范变换产生磁场只是强有力的不完整映射原则的一个最简单的例证.

通过这个讨论，我们发现一个很诱人的想法是在微分几何中引入同样的数学结构，而在微分几何中空间坐标的再参数化就起着类似于规范变换的作用.

4.6　多值标量场与单值矢量场的等价性

在前几节中，我们给出了几个运用多值场来描述磁现象的例子. 以上讨论显示出导致线状非零场构型的多值规范变换可自然给出经典作用量中的最小耦合，对

薛定谔方程也是一样. 因此，值得建立关于一个多值标量理论与磁学的普通矢势理论之间的完整等价关系. 这可以通过对跃变曲面 S 的自由度进行适当的操作来实现. 为此目的，我们构造一个作用量形式以计算在磁场的梯度表示下一个电流回路的磁能. 在欧几里得场论中，作用量由场能量构成

$$H=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x}). \tag{4.84}$$

将式 (4.36) 中的磁场的梯度表述代入，我们就可将此写为

$$H=\frac{I^2}{2(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^3x\,[\boldsymbol{\nabla}\varOmega(\boldsymbol{x})]^2. \tag{4.85}$$

这对于多值立体角是成立的，它并不依赖于 S. 为了能够进行场论计算，我们必须转向式 (4.31) 中磁场的单值表示形式，而此时能量为

$$H=\frac{I^2}{2(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^3x\,[\boldsymbol{\nabla}\varOmega(\boldsymbol{x};S)+4\pi\delta(\boldsymbol{x};S)]^2, \tag{4.86}$$

其中的 δ 函数抵消了 S 上人为引入的磁偶极层的非物理的场能量.

式 (4.25) 中的标量场可使此哈密顿量取极值. 此外，由于在表面上场强无穷大，因此所有具有与 S 不同的跃变曲面 S' 的 $\varOmega(\boldsymbol{x};S')$ 都会给出无穷大能量. 因此，我们可以将 $\varOmega(\boldsymbol{x};S)$ 中的自变量 S 省去并且允许哈密顿量 (4.86) 中的 $\varOmega(\boldsymbol{x})$ 为任意一个场. 不过，只有式 (4.25) 会给出有限的贡献.

我们现在利用式 (4.86) 来计算电流环的磁场能量. 为此，我们用**独立辅助矢量场** $\boldsymbol{B}(x)$ 将能量 (4.86) 改写为

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x})+\frac{I}{4\pi}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\cdot[\boldsymbol{\nabla}\varOmega(\boldsymbol{x})+4\pi\delta(\boldsymbol{x};S)]\right\}. \tag{4.87}$$

利用分部积分，第二项可变为

$$\int \mathrm{d}^3x\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,\varOmega(\boldsymbol{x}).$$

将此式对 $\varOmega(\boldsymbol{x})$ 求极限就得方程

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0, \tag{4.88}$$

这意味着 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 的场线构成一个闭合的回路. 为了确保本式恒成立 (就像比安基恒等式一样)，我们可将 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ 表示为一个辅助矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的旋度：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \tag{4.89}$$

这一假设使得式 (4.87) 中的能量具有如下形式：

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]^2-I[\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]\cdot \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)\right\}, \tag{4.90}$$

对第二项进行分部积分，我们得到

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]^2-I\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)]\right\}, \tag{4.91}$$

其中，线性项中 $\boldsymbol{A}(x)$ 的系数被称为**辅助电流**

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\equiv I\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)=I\,\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L). \tag{4.92}$$

最后一步中我们用到了式 (4.24) 中的斯托克斯法则. 根据式 (4.9)，我们知道这个电流对于环路 L 是守恒的.

我们称式 (4.91) 中能量的表述为式 (4.86) 中原先能量的**对偶变换表述**.

对式 (4.90) 中的能量求极值，我们就得到了式 (4.1) 中的安培定律. 因此，我们发现这些辅助量 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ 与通常磁学中具有相同名称的物理量是相吻合的. 如果我们将式 (4.5) 中明确的安培定律的解代入到此能量表达式中，我们就得到了任意电流分布的**毕奥–萨伐尔** (Biot-Savart) 或**安培** (Ampère) 能量

$$H=\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}'). \tag{4.93}$$

如果将细导线中两条平行的细电流代入的话，式 (4.93) 中的能量将随着两电流线的距离增加而降低，这似乎说明两者之间的作用力应该是排斥力. 然而，实验中所观测到的却是吸引力. 这两者之间正负号的改变是因为当增加距离时，我们必须克服感应力做工来保持其电流的稳定. 而这部分功在上式中并没有计算在内. 这一部分能量恰恰被证明是式 (4.93) 中的两倍.

当考虑电流分布中的作用力时，起作用的应该是**自由磁能**

$$F=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2(\boldsymbol{x})-\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \tag{4.94}$$

对此式关于 $\boldsymbol{A}(x)$ 求极值就给出了式 (4.5) 中的矢势，然后将其重新代回到式 (4.94) 中，我们就发现**自由毕奥–萨法尔能量**确实与式 (4.93) 相差一个负号：

$$F|_{\text{ext}}=-\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}'). \tag{4.95}$$

这一结果说明具有恒定电流的平行导线相互吸引而不相互排斥.

请注意，式 (4.90) 中的能量在以下两个相互对偶的规范变换下是不变的：一个是式 (4.2) 中通常的规范变换，再次变换下矢势多了一个任意标量场的梯度；另

一个则是式 (4.29) 中的规范变换，在此变换下，只不过是那个无关紧要的曲面由 S 移动到了 S'.

这样，我们就证明了磁场的梯度表述 与通常的规范场表述之间的完全等价性. 在梯度表述中会出现一种新的规范不变性，用来描写立体角单值取值时所出现的跃变曲面的物理无关性.

式 (4.91) 中的能量是用**双规范理论**来描述磁学的 [13]，在此理论中，无论是 $\boldsymbol{A}(x)$ 的规范还是 S 的形状都可以进行任意的变换. 通过构造起伏曲面的巨正则配分函数，这个理论就有可能描述一大类相变，这些相变的发生都是由某种线状缺陷的激增作为媒介的. 这方面的例子有下一章将要介绍的液氦超流相变中的涡旋线、后面所要讲到的晶体熔解相变中的位错和旋错 [2, 4, 10~12] 等.

4.7　电流和磁单极的多值场论

现在，我们来对由处于 x_n 点且沿 L^{x_n} 从无穷远导入磁通的磁单极所构成的磁单极气体以及闭合回路 $L_{n'}$ 上的电流进行类似上面的分析. 就如方程 (4.94) 中所示，恒定电流的自由能由与之耦合的磁场能量给出：

$$F=\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}-g\sum_n\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{x_n})\right]^2-I\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\cdot\sum_{n'}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},L_{n'})\right\}. \tag{4.96}$$

对此关于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 求极限，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\left[g\sum_n\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_n})+I\sum_{n'}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},L_{n'})\right]. \tag{4.97}$$

将此 $\boldsymbol{A}(x)$ 重新代入式 (4.96) 会得到三项. 第一，电流线间的相互作用

$$H_{II}=-\frac{I^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\sum_{n,n'}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_n)\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L_{n'})=-\frac{I^2}{2}\sum_{n,n'}\int_{L_n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n\int_{L_{n'}}\mathrm{d}x_{n'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_{n'}|}, \tag{4.98}$$

着对应于式 (4.95). 第二，磁单极弦之间的相互作用

$$\frac{g^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\left\{\left[\sum_n\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_n})\right]^2+\left[\sum_n\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_n})\right]\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\left[\sum_n\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_n})\right]\right\}, \tag{4.99}$$

而这可变形为

$$\begin{aligned}H_{gg}&=\frac{g^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\left[\sum_n\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}_n})\right]^2=\frac{g^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\left[\sum_n\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\right]^2\\&=\frac{g^2}{8\pi}\sum_{n,n'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_{n'}|}.\end{aligned} \tag{4.100}$$

最后，还有磁单极与电流之间的相互作用

$$H_{gI} = -gI \int \mathrm{d}^3x \sum_{n,n'} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L^{\boldsymbol{x}_n}) \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L_{n'}). \tag{4.101}$$

对此进行分部积分可得

$$\begin{aligned} H_{gI} = & -gI \int \mathrm{d}^3x \sum_{n,n'} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L^{\boldsymbol{x}_n}) \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L_{n'}) \\ = & -gI \int \mathrm{d}^3x \sum_{n,n'} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L^{\boldsymbol{x}_n}) \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2} \boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; S_{n'})], \end{aligned} \tag{4.102}$$

而这又等于

$$H_{gI} = H'_{gI} + \Delta H_{gI}, \tag{4.103}$$

其中

$$H'_{gI} = -gI \int \mathrm{d}^3x \sum_{n,n'} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L^{\boldsymbol{x}_n}) \boldsymbol{\nabla} \frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2} [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; S_{n'})], \tag{4.104}$$

而

$$\Delta H_{gI} = gI \int \mathrm{d}^3x \sum_{n,n'} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L^{x_n}) \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; S_{n'}). \tag{4.105}$$

求和式中的每一个积分都会给出一个整数，该整数记录了 L_n 洞穿曲面 $S_{n'}$ 的次数，因此

$$\Delta H_{gI} = gIk, \quad k = \text{整数}. \tag{4.106}$$

参考式 (4.32)，我们就知道式 (4.104) 中的相互作用可以重新写为

$$H_{gI} = -\frac{gI}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x \sum_{n,n'} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L^{x_n}) \boldsymbol{\nabla} \Omega(\boldsymbol{x}; S_{n'}). \tag{4.107}$$

利用分部积分和式 (4.59) 中的关系，这个式子可进一步变为

$$H_{gI} = \frac{gI}{4\pi} \sum_{n,n'} \Omega(\boldsymbol{x}_n; S_{n'}). \tag{4.108}$$

它正比于电流环 $L_{n'}$ 对处于 $\boldsymbol{x}_n$ 点的磁单极所张成的立体角 $\Omega(\boldsymbol{x}_n; S_{n'})$ 的和. 该结果与曲面 S_n 无关，而只依赖于电流所流经的环线 L_n.

很明显，除了式 (4.106) 中的那一项，整个相互作用在 S 的形变下保持不变. 不过，如果电流中的电荷 Q 满足如下量子化规则：

$$Qg = 2\pi k, \quad k = \text{整数}, \tag{4.109}$$

则式 (4.106) 中的那一项就是物理无关的. 这一量子化规则最初由狄拉克发现 [7]，我们在第 8.2 节中还要对此进行重新推导.

文献与注记

[1] 这个规范自由与电磁的那个规范自由是相**独立**的. 参看：
H. Kleinert, Phys. Lett. B **246**, 127 (1990) (`kl/205`); Int. J. Mod. Phys. A **7**, 4693 (1992) (`kl/203`); Phys. Lett. B **293**, 168 (1992) (`kl/211`), 其中`kl`为网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的缩写.

[2] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I, *Superflow and Vortex Lines*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b1`).

[3] 多值场论最初是在专著 [2] 中详细发展起来的，场论专家对此并不熟悉，而 Physical Review Letters 发现它可引起广泛的兴趣，于是发表了由 C. Hagen 撰写的关于 (4.41) 的评论
Phys. Rev. Lett. **66**, 2681 (1991),
连同如下迅捷而明了的回应：
R. Jackiw and S.-Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **66**, 2682 (1991).

[4] H. Kleinert, Int. J. Mod. Phys. **A 7**, 4693 (1992) (`kl/203`).

[5] H. Kleinert, Phys. Lett. **B 246**, 127 (1990) (`kl/205`).

[6] H. Kleinert, Phys. Lett. **B 293**, 168 (1992) (`kl/211`).

[7] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **133**, 60 (1931); Phys. Rev. **74**, 817 (1948), Phys. Rev. **74**, 817 (1948).

[8] J. Schwinger, Phys. Rev. **144**, 1087 (1966).

[9] M.N. Saha, Ind. J. Phys. **10**, 145 (1936);
J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, Vols. 1 and 2, Addison Wesley, Reading, Mass., 1970 and 1973;
G. Wentzel, Progr. Theor. Phys. Suppl. **37**, 163 (1966);
E. Amaldi, in *Old and New Problems in Elementary Particles*, ed. by G. Puppi, Academic Press, New York (1968);
D. Villaroel, Phys. Rev. D **14**, 3350 (1972);
Yu.D. Usachev, Sov. J. Particles & Nuclei **4**, 92 (1973);
A.O. Barut, J. Phys. A **11**, 2037 (1978);
J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1975, Sects. 6.12-6.13.

[10] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (kl/b2).

[11] H. Kleinert, *Nonholonomic Mapping Principle for Classical and Quantum Mechanics in Spaces with Curvature and Torsion*, Gen. Rel. Grav. **32**, 769 (2000) (kl/258); Act. Phys. Pol. B **29**, 1033 (1998) (gr-qc/9801003).

[12] H. Kleinert, *Theory of Fluctuating Nonholonomic Fields and Applications: Statistical Mechanics of Vortices and Defects and New Physical Laws in Spaces with Curvature and Torsion*, in: Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Formation and Interaction of Topological Defects, Plenum Press, New York, 1995, pp. 201–232 (kl/227).

[13] H. Kleinert, *Double Gauge Theory of Stresses and Defects,* Phys. Lett. A **97**, 51 (1983) (kl/107).

第 5 章　超流和超导中的多值场论

Actions lie louder than words.

ARISTOTLE (384~322BC)

多值场论对于理解各种各样的相变起着相当重要的作用. 在本章中，我们将讨论两个简单但重要的实例.

5.1　超 流 相 变

一个最简单的可以用多值场论来解释的相变是液氦的超流相变，即 λ 相变. 起这样一个名称是因为在临界温度 $T_c \approx 2.18$ K 时所测到的系统比热峰值曲线的形状如同希腊字母 λ，如图 5.1 所示.

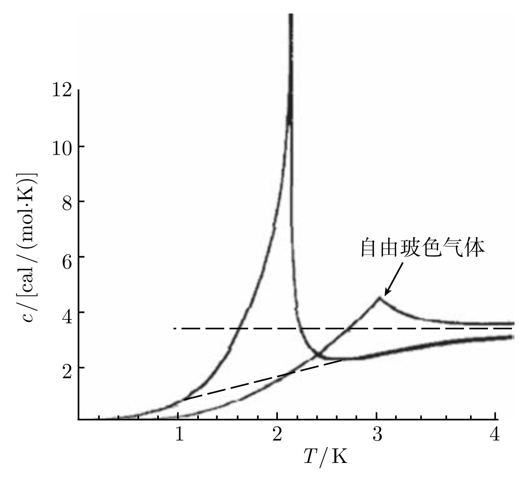


图 5.1　^{4}He 超流的比热. 对于很低的温度 T，它展示出德拜理论里三维系统中无质量激发元的比热的典型的幂律行为特征 $\propto T^3$. 本系统中的元激发为第二声的声子. 图中的峰是由于在超流–常流体相变点处涡旋环的激增而引起的

当温度 T 低于 T_c 时，流体没有黏滞性 [1] 并且只具有无质量元激发. 这些激发是**第二声**的量子，成为声子. 这些激发使得 D 维系统的比热在极低温度范围内呈现出如下所示的典型的随温度变化的行为：

$$C \sim T^D. \tag{5.1}$$

这首先由德拜在 1912 年在他的比热理论 [2] 中加以了解释，在他的理论中，他将普朗克的黑体辐射理论推广到了固体系统.

随着温度的升高，超流中出现另一类元激发. 这就是著名的**旋子**，它们的存在是由朗道在 1947 年从超流的热力学特性推断出来的 [3, 4]. 旋子是波矢在 2/Å附近的激发，在该点附近声子的色散曲线有一个极小值. 整条色散曲线可以通过中子散射而加以测定，如图 5.2 所示.

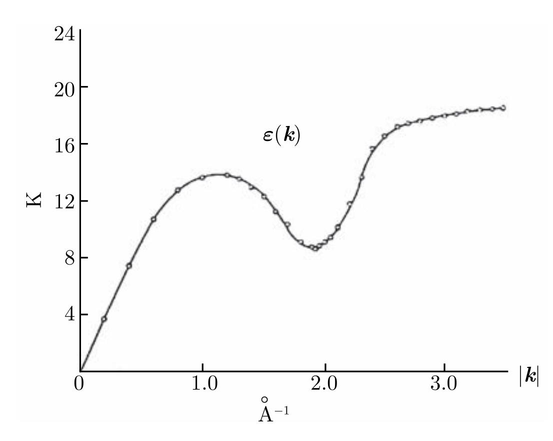


图 5.2　中子散射所测量到的 ^{4}He 超流中的元激发能谱. 数据显示旋子出现在 $k \approx 2/$Å 附近 (数据从参考文献 [5] 中获得)

只要当 T 处于远离 T_c 的足够低地区域，超流的热力学性质就由声子和旋子决定. 但是，当温度接近 T_c 时，这些旋子将一个一个紧挨着而构成一个很大的曲面，如图 5.3 所示. 邻的旋子的边界相互抵消，因此系统对于这些曲面的记忆就会消失，也即它们的形状变得无关要紧，只有曲面的边界是有物理意义的对象，称作**涡旋环**. 在 T_c 处，这些涡旋环会变得越来越长以至无穷，并且个数也会激增. 在此时刻，长涡旋环所带来的系统构型的高熵值远远盖过了产生一个旋子所需的激活能.

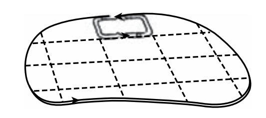


图 5.3　在 T_c 附近，出现越来越多的旋子，并且它们肩并肩构成一些曲面，这些曲面的边界就形成涡旋环. 相邻两个旋子的边界相互抵消

在涡旋线内部是包含有正常流体的，因为高转速会破坏超流性. 正是由于这个原因，涡旋环的激增会使得系统充满正常流体，然后系统就丧失了它的超流特性. 这种相变机制的存在是 50 多年前由昂萨格 (Onsager) 在 1949 年首先注意到的 [6].

之后由费曼 (Feynman) 在 1955 年再次对此作出强调 [7]，并在 20 世纪 80 年代由本书作者 (H. Kleinert) 将它发展完善为无序场论 [8]. 肖克利 (Shockley) 在 1952 年在他的工作中也提出了相同的观点 [9]，他提出固体中线状缺陷的激增应该是导致熔解相变的主要原因，他的工作激励本书的作者在自己的教科书 [10] 中发展了一套完备的熔解相变理论.

超流和超导的无序场论会在第 5.1.10 节中加以论述，而熔解理论则会放在第 10 章.

5.1.1 构型熵

基于线状激发，有一个很简单的关于相变温度的估算方法. 我们知道，一个长为 l 且具有单位长度能量 ϵ 的长线会由于其玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\epsilon l/T}$ 而被抑制. 然而，这种抑制却会被它的构型熵所抵消. 假设这根线在与体系相干长度等量级的长度尺度 ξ 上可以很轻易地被弯折，则它在 D 维空间中大致有 $(2D)^{l/\xi}$ 种可能的构型 [11]. 对于一个具有任意长度的环的配分函数的一个粗略的估算可以由下面这个积分得到：

$$Z_1 \approx \oint \frac{\mathrm{d}l}{l}\,(2D)^{l/\xi}\mathrm{e}^{-\epsilon l/T}. \tag{5.2}$$

被积函数中的 $1/l$ 已经将环线的周期不变性考虑在内. 将此单环表示式指数化，我们就得到了任意长环线的巨正则系综的配分函数，相应的自由能为 $F = -Z_1/\beta$.

只有当温度低于临界温度时

$$T < T_\mathrm{c} = \epsilon\xi/\log(2D), \tag{5.3}$$

式 (5.2) 中的积分才是收敛的. 当温度高于 T_c 时，积分发散，环线将会激增并且变得无限长，体系因此经历一个相变. 这个过程被称作环线的**凝聚**. 图 5.4 给出了这一过程的蒙特卡罗模拟.

由方程 (5.3) 我们立刻可以导出超流中临界温度和旋子能量之间的关系. 旋子的大小可近似认为是 $\pi\xi$. 而它的能量大约为 $E_\mathrm{roton} \approx \pi\xi\epsilon$. 将此代入方程 (5.3)，我们就可以估算出环线系综的临界温度大致为

$$T_\mathrm{c} = c_\mathrm{lines}E_\mathrm{rot}. \tag{5.4}$$

它与旋子的能量成正比，在三维空间中正比系数为

$$c_\mathrm{lines} \approx 1/\pi\log 6 \approx 1/5.6. \tag{5.5}$$

该理论预测最近已被实验所验证 [12].

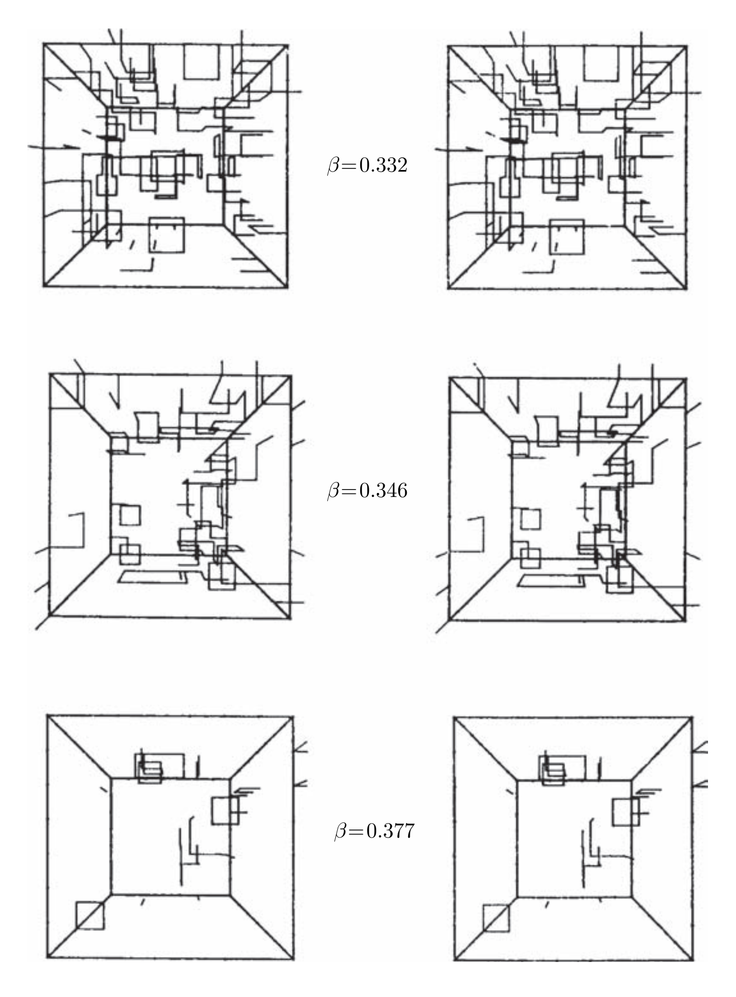


图 5.4　周期边界条件下 XY- 模型中不同 $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ 下的涡旋环. 在 $T_{\mathrm{c}} \equiv 3$ 附近，涡旋环的数目会激增，并且有些会变得无限长 (参看文献 [13]). 上图分别给出了左右眼的视图. 如要观察到它的三维立体景象，请将一片纸垂直放置于上图中间位置和双眼中间位置之间，使得每只眼只能看到一侧的图

5.1.2　无质量激发的起源

液氦超流中的无质量激发是体系哈密顿量连续对称性自发破缺的结果. 此无质量激发称为**南部–戈德斯通模** (Nambu-Goldstone modes). 它是这样产生的. 我们知道，^{4}He 超流可由一个复**序参数场** $\phi(\boldsymbol{x})$ 来描述，这个序参数场其实就是凝聚体波函数. 在相变点附近，对于平滑的空间变化，体系的能量由下述朗道 (Landau)、金

兹堡 (Ginzburg) 和皮塔耶夫斯基 (Pitaevskii) 哈密顿量 [14] 给出

$$H[\phi] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left\{|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2 + \tau|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}|\phi|^4\right\}, \tag{5.6}$$

其中，参数 τ 正比于同临界温度的相对温差

$$\tau \equiv \frac{1}{\xi_0^2}\left(\frac{T}{T_\mathrm{c}} - 1\right). \tag{5.7}$$

参数 ξ_0 为一个长度参量，它决定了下面式 (5.14) 中的相干长度. 考虑系统温度低于临界温度时，即 $\tau < 0$，系统的基态处于

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi_0 = \sqrt{\frac{-\tau}{\lambda}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}. \tag{5.8}$$

这个场量被称作是超流的**序参量**.

系统的基态不是唯一的，而是无限简并的. 它的序参量只有绝对值 $|\phi_0|$ 是确定的，而相位 α 则是任意的. 正是由于这个原因，当温度趋于零温时，系统的熵并不趋于零. 相位 α 的简并性是因为系统的哈密顿密度 (5.6) 在下述整体 U(1) 变换下不变：

$$\phi(\boldsymbol{x}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi(\boldsymbol{x}). \tag{5.9}$$

根据南部–戈德斯通定理，这样一个简并的基态一定具有零质量激发，除非有另一种零质量激发与戈德斯通激发混合. 在具有式 (5.6) 中哈密顿量的场论中，为了理解零质量激发的出现，我们可以将序参数场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 分解成模和相角的表示形式：

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \rho(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}, \tag{5.10}$$

并将式 (5.6) 重新写为

$$H[\rho,\theta] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 + \rho^2(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 + \tau\rho^2 + \frac{\lambda}{2}\rho^4\right]. \tag{5.11}$$

如果 τ 是负的，则序参数场的涨落幅度会处在式 (5.8) 中的极小值附近，也即在极值点

$$\rho_0 = \sqrt{-\tau/\lambda}. \tag{5.12}$$

通过将哈密顿量 (5.11) 展成涨落 $\delta\rho \equiv \rho - \rho_0$ 的幂级数，我们发现 ρ 涨落具有一个二次型的能量

$$H_{\delta\rho} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[(\boldsymbol{\nabla}\delta\rho)^2 - 2\tau(\delta\rho)^2\right], \tag{5.13}$$

这说明它们有有限的**相干长度**

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{-2\tau}}=\frac{\xi_0}{\sqrt{2(1-T/T_{\rm c})}}. \tag{5.14}$$

如果忽略掉涨落，则哈密顿量 (5.6) 可以用它的**流体力学极限** (hydrodynamic limit) 来近似，也称作**伦敦极限** (London limit)(第 7.2 节中会更详细地讨论)：

$$H^{\rm hy}[\theta]=\frac{\rho_0^2}{2}\int {\rm d}^3x\,(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2\,. \tag{5.15}$$

这里，我们已经省略了一个作为常数的**凝聚能**

$$E_{\rm c}=-\int {\rm d}^3x\frac{\tau^2}{4\lambda}. \tag{5.16}$$

式 (5.15) 中的哈密顿密度显示相位的平面波激发 $\theta(x)\propto {\rm e}^{{\rm i}kx}$ 的能量随着波矢 $\boldsymbol{k}$ 的平方而增加，并且当 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时趋于零. 这就是 U(1) 对称性自发破缺所导致的零质量南部–戈德斯通模. 将式 (5.15) 改写为

$$H^{\rm hy}[\theta]=\frac{\rho_{\rm s}\hbar^2}{2M}\int {\rm d}^3x\,(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2\,, \tag{5.17}$$

我们就得到了通常的流体力学动能，并且

$$\rho_{\rm s}=M\rho_0^2/\hbar^2 \tag{5.18}$$

为**超流密度**，而

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\equiv\frac{\hbar}{M}\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) \tag{5.19}$$

为**超流速度**.

当把式 (5.10) 中的场的分解式代入到哈密顿 (5.6) 相应的流密度表达式 [参照式 (2.64)]

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\hbar{\rm i}}\phi^*(\boldsymbol{x})\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\phi(\boldsymbol{x}) \tag{5.20}$$

中，并取伦敦极限，得

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=\rho_0^2\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}), \tag{5.21}$$

于是，我们就得到了上面所述的关于密度和速度的表达式.

除了恒场 $\phi(x)=\phi_0$ 外，还存在非平凡场构型可使式 (5.6) 中的哈密顿量取极值. 这些非平凡场构型就表征涡旋线，这些涡旋线在液氦超流中的许多现象中起着极其重要的作用. 在第 5.5 节中有涡旋线相关性质的讨论. 而在这里我们只需点明，在这些线的中心序参数场的模 $\rho(x)$ 为零. 这就有个问题：在 $\rho(x)$ 处处均为常数的流体力学极限下，这些解会怎样？

其实，式 (5.11) 中发生在 $\tau = 0$ 处的相变并不能看作液氦超流中发生在 2.18 K 点的著名的 λ 相变. 事实上，式 (5.11) 中相变同大家熟知的**伊辛模型** (Ising model) 中的相变同属一个普适类. 而这与所观测到的 λ 相变的临界指数是不一样的. 例如，由式 (5.11) 可导出的比热 $C \propto |1 - T/T_{\mathrm{c}}|^{-\alpha}$ 发散的临界指数 $\alpha \equiv 2 - D\nu$ 大约是 $\alpha \approx 0.112$[15]. 然而，对由具有原始哈密顿量 (5.6) 的复场论所描述的相变进行计算，表明它的临界指数为 $\alpha \approx -0.0129$[15, 16]，而这与近地轨道微重力实验测量到的 λ 相变的临界指数 $\alpha \approx -0.0127$[17] 相吻合. 在此实验中，需要尽力将样品中的压力差减到最小，因为这样的压力差会在几个微开尔文的量级上将相变温度抹平. 而在卫星上，温度的精度可达几个纳开尔文.

上述分歧的起因在于对式 (5.22) 中的莱布尼茨法则的不恰当的运用. 在从式 (5.6) 到式 (5.11) 的计算过程中我们其实有一个重要的失误，这个失误对于讨论南部–戈德斯通机制来说是无关紧要的，然而对于理解 λ 相变却是至关重要. 在计算中我们曾经利用微分的链式法则给出

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = \{\mathrm{i}[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})]\rho + \boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{x})\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}. \tag{5.22}$$

然而，我们在这里其实是不能这样做的. 因为 $\theta(x)$ 是复序参数场 $\phi(x)$ 的相角，是一个**多值场**. 在任何一点 x 我们都可以在其相角上加一个整数倍 2π 而不改变 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$.

正确的链式法则应该是 [18]

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) = \{\mathrm{i}\,[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) - 2\pi\delta(\boldsymbol{x};S)]\,\rho(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{x})\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}, \tag{5.23}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x};S)$ 是曲面 S 上的 δ 函数，当穿越此曲面时 $\theta(\boldsymbol{x})$ 有一个 2π 的跃变 [参看式 (4.23) 中的定义]. 这就使得哈密顿量 (5.6) 中的梯度项变为

$$|\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})|^2 = [\boldsymbol{\nabla}\rho(\boldsymbol{x})]^2 + \rho^2\,[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})]^2\,, \tag{5.24}$$

其中，我们引入了新的场

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) \equiv 2\pi\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},S). \tag{5.25}$$

于是，哈密顿量 (5.11) 的正确表示应为

$$H[\rho,\theta] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 + \rho^2\,(\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})^2 + \tau\rho^2 + \frac{\lambda}{2}\rho^4\right]. \tag{5.26}$$

在伦敦极限下，该哈密顿量为

$$H_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}[\theta] = \frac{\rho^2}{2}\int \mathrm{d}^3x\,(\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})^2\,, \tag{5.27}$$

并且，当我们取自然单位 $\rho_{\mathrm{s}}/M = 1$ 后，式 (5.19) 中超流速度相应的正确表达式为

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}). \tag{5.28}$$

现在，这个哈密顿量就可以描述超流中**所有的**重要激发，包括声子和旋子.

超流速度 (5.28)、哈密顿量 (5.26) 以及它的伦敦极限 (5.27) 有一个重要的性质，就是它们在**涡旋规范变换**下是不变的. 该规范变换是伴随 $\theta(x)$ 场的变化

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla} \Lambda_{\delta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}), \quad \theta(\boldsymbol{x}) \to \theta(\boldsymbol{x}) + \Lambda_{\delta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) \tag{5.29}$$

而出现的跃变曲面的形变 $S \to S'$. 其中 $\Lambda_{\delta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$ 为相应的规范函数

$$\Lambda_{\delta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) = 2\pi\delta(\boldsymbol{x}; V). \tag{5.30}$$

这样，我们就再一次碰到了与磁场梯度表示式 (4.31) 的规范变换 (4.29) 和 (4.33) 类似的情形. 场量 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$ 因此被称作超流的**涡旋规范场**.

在接下来的后续部分我们会看到，具有哈密顿量 (5.6) 的复场论中所有的核心物理特性均可通过具有流体力学涡旋规范不变哈密顿量 (5.27) 的 $\theta(\boldsymbol{x})$ 多值场论来得到.

5.1.3 涡旋密度

就像第 4.2 节中讨论磁学一样，当我们对涡旋规范场 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$ 取旋度后就会看到它所蕴含的物理内涵. 利用式 (4.24) 中的斯托克斯定理我们就得到了**涡旋密度**

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) = 2\pi\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; L). \tag{5.31}$$

式 (4.9) 的一个结果就是涡旋密度满足守恒律

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{5.32}$$

这就意味着涡旋线是闭合的.

这个守恒律其实是一个自然的结果，因为 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 是 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}$ 的旋度. 因此与此涡旋规范场结构相联就会有一个比安基恒等式.

一般来讲，式 (5.27) 并不是涡旋构型的完整的能量表示式. 我们可以在其中增加一个规范场的旋度项而引入一个额外的涡旋线的**内核能量** (core energy). 这样扩展后的流体力学极限下的金兹堡–朗道哈密顿量包含了声子以及连同内核能量在内的涡旋线：

$$H_{\mathrm{vc}}^{\mathrm{hy}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{\rho_0^2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}\right)^2 + \frac{\epsilon_c}{2}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})^2\right]. \tag{5.33}$$

所增加的这个内核能量项并不破坏哈密顿量在涡旋规范变换 (5.29) 下的不变性.

由于内核能量项与一个 δ 函数的平方成正比，这就使得它高度奇异. 而这个奇异性则是流体力学极限的结果，因为在此极限下式 (5.11) 中的 $\rho(x)$ 场被完全冻结在式 (5.26) 中极小值上. 另外，ρ 场的相干长度 为零，这也是上述 δ 函数的起因.

考虑到了这些，我们就可以将内核能量中的这个 δ 函数物理地正规化，即把这个 δ 函数在超流的实际相干长度 ξ 的尺度上抹匀，而这个相干长度的尺度大约为几个埃. 当然，不论 ξ 的尺度有多大，这个正规化后的最后一项总是正比于涡旋线的总长度.

5.1.4 配分函数

南部–戈德斯通模与所有的震荡涡旋线构成的系统的配分函数可以写为以下泛函积分的形式：

$$Z_{\rm vc}^{\rm hy} = \sum_{\{S\}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}\theta \mathrm{e}^{-\beta H_{\rm vc}^{\rm hy}}, \tag{5.34}$$

其中，β 与温度成反比，在自然单位制下，即玻尔兹曼常数 $k_{\rm B}$ 等于 1 时，$\beta \equiv 1/T$. 积分测度 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}\theta$ 定义为将空间离散化为晶格常数为 a 的细颗粒的简单立方晶格并在每一个格点 x 上对 $\theta(\boldsymbol{x})$ 在区间 $\theta(\boldsymbol{x}) \in (-\pi, \pi)$ 上进行积分. 式 (5.34) 中的求和 $\displaystyle\sum_{\{S\}}$ 是针对所有可能的曲面构型，而这些曲面构型是通过下式定义在晶格上的：

$$\theta_i^{\rm v}(\boldsymbol{x}; S) \equiv 2\pi n_i(\boldsymbol{x}), \tag{5.35}$$

其中，$n_i(\boldsymbol{x})$ 为涡旋规范场 $\theta_i^{\rm v}(\boldsymbol{x}; S)$ 的整数形式，并且通过对所有整数 $n_i(x)$ 求和，我们得到以下对应关系：

$$\sum_{\{S\}} \equiv \sum_{\{n_i(\boldsymbol{x})\}}. \tag{5.36}$$

式 (5.34) 中的配分函数其实就是格点配分函数

$$Z_{\rm V} = \sum_{\{n_i(\boldsymbol{x})\}} \left[\prod_x \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})\right] \mathrm{e}^{-\beta H_{\rm V}}, \tag{5.37}$$

的连续统极限，其中 $H_{\rm V}$ 为式 (5.33) 中哈密顿量的离散形式：

$$H_{\rm V} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{x}} [a\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) - 2\pi \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]^2 + \frac{1}{2}\epsilon_c a^2 [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]^2, \tag{5.38}$$

而且

$$\beta = \rho_0^2 a. \tag{5.39}$$

这里符号 $\boldsymbol{\nabla}$ 表示**格点微商** (lattice derivative)，它作用在任意一个函数 $f(x)$ 上时的计算规则为

$$\nabla_i f(\boldsymbol{x}) \equiv a^{-1}[f(\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x})], \tag{5.40}$$

其中，$\boldsymbol{e}_i$ 为最近邻单位矢量，a 为晶格常数. 还存在共轭格点微商

$$\overline{\nabla}_i f(\boldsymbol{x}) \equiv a^{-1}[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e}_i)]. \tag{5.41}$$

很自然，我们有分部积分的格点形式

$$\sum_x f(\boldsymbol{x})\nabla_i g(\boldsymbol{x}) = -\sum_x [\overline{\nabla}_i f(\boldsymbol{x})]g(\boldsymbol{x}), \tag{5.42}$$

此结果只当函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 在系统表面为零或满足周期边界条件时成立. 在后续讨论中我们总采用这样的假定. 在傅里叶空间，∇_i 和 $\overline{\nabla}_i$ 的本征值分别是 $K_i = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i a} - 1)/a$ 和 $\overline{K}_i = (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i a})/a$，其中 k_i 为 i 方向的波数.

拉普拉斯算子的格点形式称为**格点拉普拉斯算子** $\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}$，在 D 维空间中它的本征值为 [19]

$$\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K} = \frac{2}{a^2}\sum_{i=1}^{D}(1 - \cos k_i a), \tag{5.43}$$

其中，$k_i \in (-\pi/a, \pi/a)$ 为晶格布里渊区中的波数 [19]. 在连续统极限下，即 $a \to 0$，两类格点微商将退化到通常的偏微商 ∂_i，而 $\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}$ 则化为 k^2. 在哈密顿量 (5.38) 中，为了简便起见，晶格常数 a 可设为 1.

在配分函数 (5.37) 中，对于整数涡旋规范场 $n_i(x)$ 的求和并没有作限制. 或者，我们也可通过某个泛函 $\varPhi[n]$ 将 $n_i(x)$ 的规范固定下来，而将配分函数写为 [8]

$$Z_V = \sum_{\{n_i(x)\}} \varPhi[n]\left[\prod_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\theta(x)\right]\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathrm{V}}}. \tag{5.44}$$

在晶格上，我们总可以选取轴规范 [20]：

$$n_3(x) = 0. \tag{5.45}$$

注意，与连续规范场不同，在这里我们无法选取洛仑兹规范 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0$.

类似于格点形式，在含式 (5.27) 或式 (5.33) 中哈密顿量的连续统配分函数 (5.34) 中，我们同样可以通过插入规范固定泛函 $\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}]$ 来固定规范. 轴规范可通过如下 δ 函数来固定：

$$\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}] = \delta[\theta_3^{\mathrm{v}}]. \tag{5.46}$$

值得指出的是，鉴于式 (5.34) 中的配分函数是对所有涡旋规范场 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}$ 求和，因此该配分函数不仅描述接近零温状态时由南部–戈德斯通模所主导的 ^{4}He 超流态，也同时描述了所有温度不太高的情形，特别是包含了我们最感兴趣的超流相变温度附近的区域.

就如同序参数场 ψ 的模在相变的朗道表述中所表现的那样，涡旋规范场同样扩展了涨落的南部戈德斯通模的配分函数. 其实，很容易证明在相变点附近，式 (5.34) 中的配分函数可以化成一个朗道型的 $|\psi|^4$ 理论 [8].

在格点表示式 (5.44) 中，规范自由度已经被吸收到 $\theta(x)$ 场中，现在对它的积分不再局限于式 (5.37) 中的从 $-\pi$ 到 π，而是在每个点 x 上从 $\theta=-\infty$ 积到 ∞. 这有一个好处，就是我们可以将所有的关于 $\theta(x)$ 的积分计算出来，得

$$Z_{\rm V}=\operatorname{Det}^{1/2}[-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}^{-1}]\sum_{\{n_i(x)\}}\varPhi[\boldsymbol{n}]\mathrm{e}^{-\beta H'_{\rm V}},\tag{5.47}$$

最多相差一个无关紧要的常数，其中

$$\beta H'_{\rm V}=\sum_x\left[\frac{4\pi^2}{2}\left\{\boldsymbol{n}^2(\boldsymbol{x})-[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]\frac{1}{-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}}[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]\right\}+\frac{1}{2}\epsilon_c[a\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]^2\right].\tag{5.48}$$

在计算配分函数时，我们总是将那些平凡的整体因子省略掉. 如果我们对于整数跃变场 (5.35) 引入格点旋度：

$$\boldsymbol{l}(x)\equiv a\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}),\tag{5.49}$$

则我们可将式 (5.48) 中的哈密顿量改写为

$$\beta H'_{\rm V}=\sum_x\left[\frac{4\pi^2}{2}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})\frac{1}{-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})+\frac{\epsilon_c}{2}\boldsymbol{l}^2(\boldsymbol{x})\right].\tag{5.50}$$

作为格点旋度，场 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$ 满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})=0$. 很显然，它们是式 (5.31) 中所定义的涡旋密度的 $\boldsymbol{j}^{\rm v}(\boldsymbol{x})/2\pi$ 格点整数形式. 式 (5.50) 中的能量为涡旋环线间的相互作用能.

式 (5.47) 和式 (5.50) 中的格点逆反拉普拉斯算子 $-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}^{-1}$ 正是逆反拉普拉斯算子 $-\boldsymbol{\nabla}^{-2}$ 的格点表述. 后者的局域矩阵元 $\langle x_2|-\boldsymbol{\nabla}^{-2}|x_1\rangle$ 给出相应于坐标差 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ 的库仑势：

$$V_0(\boldsymbol{x})\equiv\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\boldsymbol{k}^2}=\frac{1}{4\pi r},\qquad r\equiv|\boldsymbol{x}|.\tag{5.51}$$

而相对应的格点算子的矩阵元 $\langle\boldsymbol{x}_2|-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}^{-1}|\boldsymbol{x}_1\rangle$ 则由下式给出：

$$v_0(\boldsymbol{x})=\int_{\rm BZ}\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}}=\frac{1}{a}\left[\prod_{i=1}^3\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}^3(ak_i)}{(2\pi)^3}\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{i=1}^3 k_ix_i}}{2\sum\limits_{i=1}^3(1-\cos ak_i)},\tag{5.52}$$

其中，动量积分的脚标 BZ 表示积分限于布里渊区内.

式 (5.52) 中的格点库仑势正是**格点汤川势** (lattice Yukawa potential)

$$v_m(\boldsymbol{x})=\frac{1}{a}\left[\prod_{i=1}^3\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}^3(ak_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix_i}}{(2\pi)^3}\right]\frac{1}{2\sum\limits_{i=1}^3(1-\cos ak_i)+m^2a^2}\tag{5.53}$$

的零质量极限. 格点汤川势的连续统极限就是通常的汤川势

$$V_m(r) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \frac{1}{\boldsymbol{k}^2+m^2} = \frac{\mathrm{e}^{-mr}}{4\pi r}, \quad r \equiv |\boldsymbol{x}|. \tag{5.54}$$

利用格点库仑势，当设内核能量为零时，我们可以将式 (5.47) 中的配分函数写为

$$Z_{\mathrm{V}} = \mathrm{Det}^{1/2}[\hat{v}_0] \sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}=0} \mathrm{e}^{-(4\pi^2\beta a/2)\Sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}')}, \tag{5.55}$$

其中，$\hat{v}_0$ 是 $-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}^{-1}$ 的缩写.

对不同晶格方向上的动量积分，我们可以分别通过施温格 (Schwinger) 技巧将分母表示成一个对指数函数的积分

$$\frac{1}{a} = \int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-sa}, \tag{5.56}$$

这样一来就有

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\limits_{i=1}^{3}k_ix_i}}{2\sum\limits_{i=1}^{3}(1-\cos ak_i)+m^2a^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-s(6+m^2a^2)} \prod_{i=1}^{3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_ia)(x_i/a)+s\cos k_ia}. \tag{5.57}$$

比值 x_i/a 为整数，于是我们可以利用第一类变形贝塞尔函数的积分表达

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z+z\cos\theta}, \quad n = \text{ 整数}, \tag{5.58}$$

得

$$v_m(x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-(6+m^2a^2)s} I_{x_1/a}(2s)I_{x_2/a}(2s)I_{x_3/a}(2s). \tag{5.59}$$

与连续统形式 (5.54) 不同，晶格势函数 $v_m(\boldsymbol{x})$ 在原点处是有限的. 图 5.5 给出了作为 m^2a^2 的函数的 $v_m(\boldsymbol{0})$ 的取值. 而库仑势取值为 $v_0(\boldsymbol{0}) \approx 0.2527/a$[21].

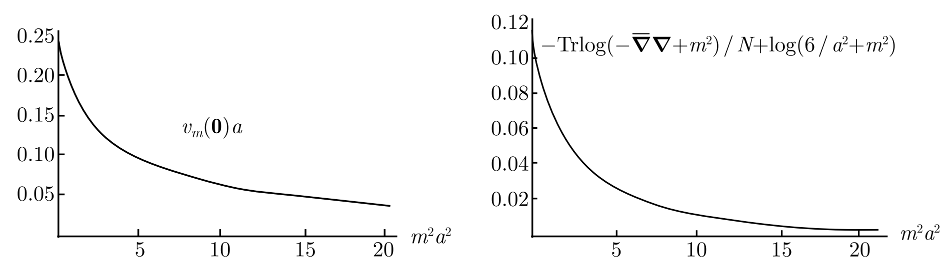


图 5.5 原点处的格点汤川势和相应的 Tracelog. 图中给出了 $\mathrm{Tr}\log(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)/N$ 剪除后的表达式，其中 N 为晶格格点数目

对于在式 (5.47) 和式 (5.55) 中作为前乘因子而出现的格点拉普拉斯算子的泛函行列式，我们可以通过式 (5.59) 中 $m=0$ 的汤川势计算得到. 我们只需运用下列关系式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}^{-1/2}(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)=\mathrm{Det}^{1/2}(\hat{v}_m)&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{a^3}{2}\Sigma_{\boldsymbol{x}}\langle\boldsymbol{x}|\log(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)|\boldsymbol{x}\rangle},\end{aligned}\tag{5.60}$$

然后计算

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\log(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)&=a^3\langle\boldsymbol{x}|\int\mathrm{d}m^2\sum_{\boldsymbol{x}}(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)^{-1}|\boldsymbol{x}\rangle\\&=Na^3\int\mathrm{d}m^2\langle\mathbf{0}|(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)^{-1}|\mathbf{0}\rangle=Na^3\int\mathrm{d}m^2v_m(\mathbf{0}),\end{aligned}\tag{5.61}$$

其中，N 为总的格点数. 计算中，我们已经省略了一个积分常数，而这个常数可以通过 D 维系统在小 m 下的主导行为来确定

$$\mathrm{Tr}\log(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)\underset{\text{small }m}{\approx}\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\log(\boldsymbol{k}^2+m^2)\underset{\text{small }m}{\approx}-\frac{\Gamma(-D/2)}{(4\pi)^{D/2}}m^D,\tag{5.62}$$

$$v_m(\mathbf{0})\underset{\text{small }m}{\approx}\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+m^2}\underset{\text{small }m}{\approx}\frac{\Gamma(1-D/2)m^{D-2}}{(4\pi)^{D/2}}.\tag{5.63}$$

在式 (5.59) 中对 m^2 进行积分，我们得

$$a^3\int\mathrm{d}m^2v_m(\mathbf{0})=-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-(6+m^2a^2)s}I_0^2(2s).\tag{5.64}$$

在 $s=0$ 点的发散可通过减掉一个相似的积分表达

$$a^2\int\mathrm{d}m^2\,(6+m^2a^2)^{-1}=-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-(6+m^2a^2)s}\tag{5.65}$$

而消除. 这样就给出了有限结果

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\log(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)-\log(6/a^2+m^2)=-\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-(6+m^2a^2)s}\left[I_0^3(2s)-1\right].\tag{5.66}$$

此式关于 m^2 的行为如图 5.5 所示.

式 (5.55) 中的格点表述使得我们比较容易对配分函数进行图形展开. 它其实就变成了与那些越来越长的环线相关的项的求和，而每一项都带有一个玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\beta\mathrm{const}/2}$. 这一展开在低温下会很快收敛. 当温度升高，涨落会产生更多更长的环线. 如果没有那个额外的内核能量 ϵ_c，则环线在临界点 $T_\mathrm{c}=1/\beta_\mathrm{c}\approx1/0.33\approx3$ 处变得无限长并且无限密集，并且式 (5.47) 中的求和会发散，因为长线所带来的

构型熵会压倒玻尔兹曼抑制因子，这就同在式 (5.2) 中那个简单模型积分的情形是一样的. 于是，在那个点系统会充满涡旋环线. 由于每个涡旋内部由普通流体构成，因此涡旋环线的凝聚就使得整个系统变为常流体. 图 5.4 中给出了这一凝聚过程的图像. 图 5.6 中画出了相关比热的图.

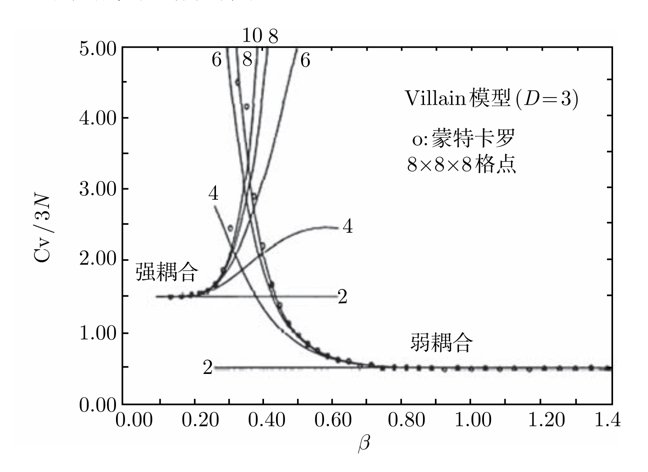


图 5.6　三维 Villain 模型中比热关于 $\beta = 1/T$ 在自然单位下的曲线图. 那个尖锐的峰即为 λ 相变，它在 T_{c} 附近的性质与如图 5.1 中所示实验曲线相类似. 图中实线来源于解析展开，其中一组按 $T \equiv 1/\beta$ 的幂次展开 (低温或弱耦合展开)，另一组则是以 $T^{-1} = \beta$ 的幂次展开 (高温或强耦合展开)，并不断升高展开的阶数 (参考文献 [23])

现在，我们理解了为什么式 (5.11) 中的哈密顿量所描述的平均场相变与哈密顿量 (5.6) 中所观测到的 λ 相变毫无关系，或者，换句话说，恰当的形式应该是式 (5.26) 而不是式 (5.11). 当加热超流体时，由式 (5.26) 中第二项涡旋规范场的涨落所引起的涡旋激增在 ρ_0 消失前就开始了，即此过程大约开始于 $\rho_0^2 a = \beta \approx 1/3$. 将式 (5.12) 中的 $\rho_0^2 = -\tau/g$ 以及式 (5.14) 中的 $a = \xi = \sqrt{-2\tau}$ 代入，就得到 τ 的临界值小于零，也即涡旋激增是发生在伊辛类型相变前的，这个临界值为

$$-\tau_{\mathrm{c}} \approx (g/3\sqrt{2})^{2/3}. \tag{5.67}$$

在不考虑额外的内核能量时，Z_{V} 就定义了著名的**Villain 模型**[22]，它其实是具有下述哈密顿量的**XY-模型**的一个高斯型近似

$$H_{XY} = \sum_{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^{3} \cos[\nabla_i \theta(\boldsymbol{x})]. \tag{5.68}$$

XY-模型和具有式 (5.38) 中哈密顿量的 Villain 模型都可以利用蒙特卡罗方法在计算机上加以模拟. 二者都显示出一个二级相变. 在 XY-模型中，该相变发生在

$\beta_c \approx 0.45$ (自然单位) 时，而具有零内核能量 ϵ_c 的 Villain 模型，它的相变则发生在 $\beta_c \approx 0.33$ [8]. 两个模型的临界值数是相吻合的. 图 5.6 给出了 Villain 模型的比热曲线. 它具有图 5.1 中实验观测到的 ^{4}He 比热的典型的 λ 形状. 并且 λ 相变的临界指数与 Villain 模型和 XY- 模型是相一致的，它们全都属于 XY- 普适类.

5.1.5 相互作用能的连续统推导

现在，我们在连续统情形下对式 (5.50) 中的涡旋环线间的相互作用能再一次进行计算. 为了简便起见，我们略去内核能量，这样带有涡旋规范固定的配分函数可写为

$$Z_{\rm v}^{\rm hy} = \sum_{\{S\}} \varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\rm v}] \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\theta {\rm e}^{-\beta H_{\rm v}^{\rm hy}}, \tag{5.69}$$

其中

$$H_{\rm v}^{\rm hy} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^3x \ (\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\rm v})^2 \tag{5.70}$$

就是式 (5.33) 中的能量，只不过不带有内核能量. 现在，我们将它展成两部分

$$H_{\rm v}^{\rm hy} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^3x \left[(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 + 2\theta\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}^{\rm v} + \boldsymbol{\theta}^{{\rm v}\,2}\right] = H_{{\rm v}\,1}^{\rm hy} + H_{{\rm v}\,2}^{\rm hy}, \tag{5.71}$$

其中

$$H_{{\rm v}\,1}^{\rm hy} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^3x \left(\theta + \frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right)(-\boldsymbol{\nabla}^2)\left(\theta + \frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right) \tag{5.72}$$

并且

$$H_{{\rm v}\,2}^{\rm hy} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^3x \left(\boldsymbol{\theta}^{{\rm v}\,2} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right). \tag{5.73}$$

将此代入式 (5.69) 中，并运用高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{\rm d}\theta}{2\pi}{\rm e}^{-a(\theta-c)^2/2} = a^{-1/2} \tag{5.74}$$

相应于场函数 $\theta(\boldsymbol{x})$ 及 x 空间中微分算符 $\hat{\mathcal{O}}$ 的推广

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\theta{\rm e}^{-\int {\rm d}^3x[\theta(\boldsymbol{x})-c(\boldsymbol{x})]\,\hat{\mathcal{O}}\,[\theta(\boldsymbol{x})-c(\boldsymbol{x})]/2} = [{\rm Det}\hat{\mathcal{O}}]^{-1/2}, \tag{5.75}$$

我们就可在每个 x 处作关于 $\theta(\boldsymbol{x})$ 的高斯积分. 对式 (5.69) 运用上述公式，我们得

$$Z_{\rm v}^{\rm hy} = \left[{\rm Det}(-\boldsymbol{\nabla}^2)\right]^{-1/2}\sum_{\{S\}}\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\rm v}]{\rm e}^{-\beta H_{\rm v}}, \tag{5.76}$$

其中，$H_{\rm v}$ 为相对应于式 (5.50) 的涡旋环线间的相互作用能：

$$H_{\rm v} = \frac{1}{2}\int d^3x(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v}) = \frac{1}{2}\int d^3x\boldsymbol{j}^{\rm v}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{j}^{\rm v} = \frac{1}{8\pi}\int d^3x d^3x'\boldsymbol{j}^{\rm v}(\boldsymbol{x})\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{j}^{\rm v}(\boldsymbol{x}'). \tag{5.77}$$

这与式 (4.93) 中电流环间毕奥–萨伐尔能量的形式完全一样，说明涡旋线间是相互排斥的 [这就同电流线在不要求外力做功以保持电流恒定情形下所表现出来的行为是一样的，而为保持电流恒定所作的功会使其反号，参看关于式 (4.95) 中自由磁能的讨论]. 在格点上，式 (5.76) 中的配分函数则再次取式 (5.47) 中的形式.

通过积分而将配分函数中的某些变量去除的过程会在以后的章节中不断地碰到，我们将用**“积掉”**这个词来特指这一过程. 我们也会用它来讨论哈密顿量而不总是写出相应的需作积分操作的配分函数.

5.1.6 物理跃变曲面

式 (5.33) 中能量在涡旋规范变换下的不变性保证了跃变曲面 S 的物理无关性. 但是，如果我们破坏了这一不变性，此类曲面就成为了实在的物理对象. 这可以通过破坏其原有的 U(1) 对称性来实现. 这一对称性破坏会为南部–戈德斯通模提供一个质量. 在最低阶近似下，这会在不包含内核能量的系统能量表达式 (5.33) 中增加一个质量项 $m^2\theta(x)^2$ 而得

$$H^{\rm hy}_{{\rm v}m} = \frac{1}{2}\int d^3x\left\{[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(\boldsymbol{x})]^2+m^2\theta(\boldsymbol{x})^2\right\}. \tag{5.78}$$

这个质量项就为曲面 S 提供了一个能量. 为了看清楚这点，我们将能量写为

$$H^{\rm hy}_{{\rm v}m} = \frac{1}{2}\int d^3x\left\{\left[(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2+m^2\theta^2\right]+2\theta\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}+\boldsymbol{\theta}^{{\rm v}2}\right]\}, \tag{5.79}$$

并类似于式 (5.71) 那样将它分解成两部分：

$$H^{\rm hy}_{{\rm v}m1} = \frac{1}{2}\int d^3x\left(\theta+\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right)(-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2)\left(\theta+\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right) \tag{5.80}$$

和

$$H^{\rm hy}_{{\rm v}m2} = \frac{1}{2}\int d^3x\left(\boldsymbol{\theta}^{{\rm v}2}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right). \tag{5.81}$$

同样可以对 $\theta(x)$ 进行高斯积分，于是式 (5.76) 中的配分函数变为

$$Z^{\rm hy}_{{\rm v}m} = {\rm Det}^{-1/2}[-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2]\sum_{\{S\}}\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\rm v}]{\rm e}^{-\beta H^{\rm hy}_{{\rm v}m2}}. \tag{5.82}$$

指数中的能量 $H^{\rm hy}_{{\rm v}m2}$ 可写为

$$H^{\rm hy}_{{\rm v}m2}=\frac{1}{2}\int {\rm d}^3x\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v})+m^2\,\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}\,\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\right]. \tag{5.83}$$

第一项为式 (5.77) 中毕奥–萨伐尔类型能量的一个修正

$$\begin{aligned}H^{\rm hy}_{{\rm v}m}&=\frac{1}{2}\int {\rm d}^3x\,(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v})=\frac{1}{2}\int {\rm d}^3x\boldsymbol{j}^{\rm v}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}\boldsymbol{j}^{\rm v}\\&=\frac{1}{8\pi}\int {\rm d}^3x{\rm d}^3x'\boldsymbol{j}^{\rm v}(\boldsymbol{x})\frac{{\rm e}^{-m|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{j}^{\rm v}(\boldsymbol{x}').\end{aligned} \tag{5.84}$$

质量 m 的出现使得式 (5.77) 中的库仑型长程相互作用 $1/R$ 变成了汤川型的有限距离相互作用 ${\rm e}^{-mR}/R$.

式 (5.83) 中的第二项

$$H_{S\,m}=\frac{m^2}{2}\int {\rm d}^3x\boldsymbol{\theta}^{\rm v}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2}\boldsymbol{\theta}^{\rm v}=\frac{m^2}{8\pi}\int {\rm d}^3x{\rm d}^3x'\;\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(\boldsymbol{x})\frac{{\rm e}^{-m|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(\boldsymbol{x}') \tag{5.85}$$

则实实在在是一个全新的项. 它描述了面元法矢间汤川型相互作用，该相互作用在曲面 S 上下 $1/m$ 的厚度内给出了这个场能量. 它的一个结果就是曲面由此获得**张力**. 此时它们的形状不再是无关紧要的了，当把一组给定的涡旋环线 L 作为边界的话，它们将张成最小曲面. 而对于 $m=0$，曲面的张力消失，曲面的形状再次变得无关紧要，系统恢复涡旋规范不变性.

这种获得曲面张力的机制会在第 8 章中建立一个简单的夸克禁闭模型时用到.

5.1.7 超流的正则表述

对于超流的配分函数，我们可以构造另外一种表述，在此新的表述中涡旋环线会更加直接地由它们的物理的涡旋密度来描述，而不是通过它们的跃变曲面 S. 通过借助于一个新的规范场将南部–戈德斯通模去除，上述想法是可以得到实现的. 这个新的规范场就是角量场函数 θ 的正则共轭，通常称为**应力规范场**[8]. 对于我们现在所讨论的超流体这个具体情形，此规范场称为**超流规范场**.

为了理解这个新的规范场是如何出现的，我们来回顾一下通常的路径积分. 在路径积分

$$\int \mathcal{D}x\exp\left(-\frac{M}{2}\int_{t_a}^{t_b}{\rm d}t\dot{x}^2\right) \tag{5.86}$$

中正则共轭动量变量 $p(t)$[24] 是通过二次型配平而引入的，即将式 (5.86) 重写为

$$\int \mathcal{D}\boldsymbol{x}\mathcal{D}\boldsymbol{p}\exp\left[\int_{t_a}^{t_b}{\rm d}t\left({\rm i}\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2M}\right)\right]. \tag{5.87}$$

以此类推，我们可以引入正则共轭矢量场 $\boldsymbol{b}(x)$ 从而将式 (5.69) 中的配分函数改写为

$$Z_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\boldsymbol{b}\sum_{\{S\}}\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}]\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\theta\mathrm{e}^{-\beta\bar{H}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}},\tag{5.88}$$

其中 [25]

$$\beta\bar{H}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2\beta}\boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{x})-\mathrm{i}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})\right]\right\}.\tag{5.89}$$

原则上来讲，梯度能量可以包含高阶导数项以及 $\partial_i\theta$ 的高幂次项. 那样的话，式 (5.89) 中的正则表述会包含 $b_i(\boldsymbol{x})$ 的更加复杂的函数.

此时，值得注意的是，如果我们转向闵可夫斯基表述，即在其中 $x^0=-\mathrm{i}x^3$ 扮演着时间的角色，则积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}b_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_0(\boldsymbol{x})\partial_0\theta(\boldsymbol{x})}\tag{5.90}$$

会在离散的时间轴上给出一个 δ 函数的乘积

$$\langle\theta_{n+1}|\theta_n\rangle\langle\theta_n|\theta_{n-1}\rangle\langle\theta_{n-1}|\theta_{n-2}\rangle,\tag{5.91}$$

其中

$$\langle\theta_n|\theta_{n-1}\rangle=\delta_n(\theta_n-\theta_{n-1}).\tag{5.92}$$

这可看作该系统希尔伯特空间上的狄拉克标量积. 在此希尔伯特空间上，存在一个算符 $\hat{b}_i(x)$，它的第零分量由下式给出：

$$\hat{b}_0=-\mathrm{i}\partial_\theta\tag{5.93}$$

并且满足以下等时正则对易关系：

$$\left[\hat{b}_0(\boldsymbol{x}_\perp,\boldsymbol{x}_0),\theta(\boldsymbol{x}'_\perp,\boldsymbol{x}_0)\right]=-\mathrm{i}\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_\perp-\boldsymbol{x}'_\perp),\tag{5.94}$$

其中，$\boldsymbol{x}_\perp=(x^1,x^2)$ 表示矢量 (x^0,x^1,x^2) 的空间分量. 与 $\hat{b}_0(x)$ 相对应的荷为

$$\hat{Q}(\boldsymbol{x}_0)=\int\mathrm{d}^2x\hat{b}_0(\boldsymbol{x}_\perp,x_0),\tag{5.95}$$

它可引起 θ 的一个整体平移

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\hat{Q}(x_0)}\theta(\boldsymbol{x}_\perp,x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{Q}(x_0)}=\theta(\boldsymbol{x}_\perp,x_0)+\alpha.\tag{5.96}$$

于是这就在最初的场 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ 上乘了一个相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. 此荷 $\hat{Q}(\boldsymbol{x}_0)$ 就是 U(1) 对称变换的生成元，该对称变换的自发破缺则给出了 $\theta(\boldsymbol{x})$ 涨落的南部–戈德斯通特性. 由

于原先的理论在变换 $\phi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi$ 下是不变的，因此式 (5.89) 中的能量并不依赖于 θ 本身，而只依赖于 $\partial_i\theta$.

在式 (5.88) 的配分函数中我们可以运用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x f(x)\theta(x)} = \delta[f(\boldsymbol{x})], \tag{5.97}$$

并结合 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 而得到

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{5.98}$$

这表明 $\hat{Q}(x_0)$ 与时间无关，并且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\hat{Q}}$ 是一个对称变换.

如果能量 (5.89) 依赖于 θ 本身的话，则荷 $\hat{Q}(\boldsymbol{x}_0)$ 将不再是与时间无关的. 不过，它仍然会生成上述 U(1) 变换.

一般来讲，复场相角的共轭变量为粒子数 (请参考第 3.5.3 节). 此处，该角色由 $\hat{Q}(\boldsymbol{x}_0)$ 来承担，它给出了超流中的粒子数. 于是，我们可以将此矢量场 $\boldsymbol{b}(x)$ 看成超流凝聚体的粒子流密度：

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), \tag{5.99}$$

也称作超流体的**超流密度**.

将配分函数 (5.88) 中的 θ 场积掉后，我们还可以对涡旋规范场 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$ 所有的曲面构型进行求和. 为此，我们将利用下式中对任何满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = 0$ 条件的函数 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 都适用的公式：

$$\sum_{\{S\}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})} = \sum_{\{L\}} \delta\left[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L)\right]. \tag{5.100}$$

对此公式的证明很简单：将式 (5.100) 放到某个晶格上后它就可写为 [参考式 (5.36)]

$$\sum_{\{n_i\}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\Sigma_x n_i(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x})} = \sum_{\{m_i\}} \prod_{\boldsymbol{x},i} \delta\left(f_i(\boldsymbol{x}) - m_i(\boldsymbol{x})\right), \tag{5.101}$$

然后对每一点 x, i 运用泊松公式 [24]

$$\sum_n \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nf} = \sum_m \delta(f-m), \tag{5.102}$$

我们就可对上式加以证明了. 利用这些公式，我们就可得到式 (5.88) 的另一种表示形式

$$Z_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}} = \sum_{\{L\}} \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{b}^2/2\beta}, \tag{5.103}$$

其中，$\boldsymbol{b}=\delta(x;L)$. 在格点上，此配分函数变为

$$Z_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}=\sum_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}=0}\mathrm{e}^{-\sum_{\boldsymbol{x}}b^2/2\beta},\tag{5.104}$$

其中，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 现在为一个整数取值的无源场，代表超流闭合线.

配分函数 (5.104) 可以通过加入越来越长的环线项这种图解方式加以求解，这些项每项都携带一个玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{const}/2\beta}$. 这个展开式在高温时收敛得很快. 通过这种方式得到的比热的最低阶近似结果已在图 5.6 中给出. 对于极高温度的情况，不存在超流环线. 当温度降低时，涨落会产生越来越多越来越长的环线. 最终在临界点

$$T_{\mathrm{c}}\equiv 1/\beta_{\mathrm{c}}\approx 1/0.33\approx 3,\tag{5.105}$$

这些环线变得无限长，于是式 (5.104) 中的求和发散了，这个系统就变成了超流体.

注意，超流配分函数 (5.104) 看起来与涡旋环线配分函数 (5.55) 是极其相似的. 二者都包含同样类型的对非自身回溯环线的求和. 二者主要的不同点在于它们环线间的长程库仑相互作用. 假定我们暂时忽略库仑相互作用中的非局域部分，对涡旋环线配分函数 (5.55) 做近似而只保留库仑相互作用的自能部分：

$$Z_{V\mathrm{app}}=\mathrm{Det}^{1/2}[\hat{v}_0]\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}=0}\mathrm{e}^{-(4\pi^2\beta a/2)v_0(0)\Sigma_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{l}^2(\boldsymbol{x})}.\tag{5.106}$$

除去一个整体的常数因子，这个近似与超流配分函数 (5.104) 是一致的. 通过比较此式与式 (5.104) 配分函数中能量的前乘因子，并注意到式 (5.104) 中配分函数的临界温度由式 (5.105) 决定，我们不难看出，式 (5.106) 在

$$4\pi^2 a\beta v_0(\mathbf{0})\approx T_{\mathrm{c}}\approx 3\tag{5.107}$$

处有一个二级相变，即 $\beta\approx 3/4\pi^2 av_0(\mathbf{0})\approx 0.30$, 对应于临界温度的一个近似值

$$T_{\mathrm{c}}^{\mathrm{appr}}\approx\frac{4\pi^2 av_0(\mathbf{0})}{3}\approx 3.3.\tag{5.108}$$

而这个值只比精确值 $T_{\mathrm{c}}=1/\beta_{\mathrm{c}}\approx 3$ 大了 10%. 因此，我们可以得出结论，式 (5.55) 中库仑相互作用的非局域部分对相变温度并没有什么影响.

5.1.8 汤川环线气体

有了上述讨论，我们现在可以来估计一下具有与式 (5.55) 密切相关的配分函数

$$Z_V^Y=\mathrm{Det}^{1/2}[\hat{v}_m]\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}=0}\mathrm{e}^{-(4\pi^2\beta a/2)\Sigma_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})v_m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}')},\tag{5.109}$$

的系统中的相变温度，其中 $v_m(x)$ 为汤川势 (5.54) 在晶格下的表述，而 $\hat{v}_m$ 为相关算符 $(-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\nabla}+m^2)^{-1}$.

这里，我们同样作与式 (5.106) 中相同类型的局域近似，得

$$Z_{V\text{app}}^Y = \text{Det}^{1/2}[\hat{v}_m]\sum_{\boldsymbol{l},\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}=0} \mathrm{e}^{-(4\pi^2\beta a/2)v_m(\mathbf{0})\Sigma_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{l}^2(\boldsymbol{x})}, \tag{5.110}$$

相应于式 (5.107)，我们通过以下方程来估算汤川环线气体的临界值 $\beta_{m,\text{c}}$：

$$4\pi^2 a\beta_{m,\text{c}}v_m(\mathbf{0}) \approx T_\text{c} \approx 3. \tag{5.111}$$

由于随着 m 的增大汤川势变得越来越局域，因此局域近似式 (5.110) 也就变得精确了. 于是，我们得出如下结论：由式 (5.111) 所近似得到的临界温度 $T_{m,\text{c}} = 1/\beta_{m,\text{c}}$ 的误差会随着 m 的增大而由 $m=0$ 时的 10% 减小至 m 无穷大时的零. 在图 5.7 中我们给出了所求得的临界温度 $T_{m,\text{c}} = 1/\beta_{m,\text{c}}$ 的曲线.

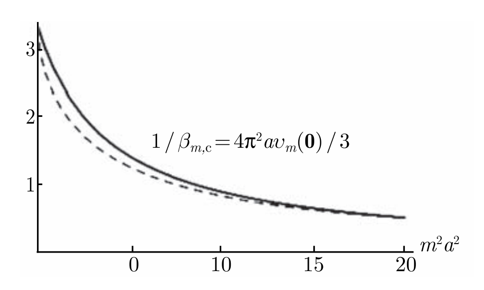


图 5.7　由方程 (5.111) 所估算的线元间具有汤川相互作用的环线气体的临界温度. 相应的误差由 $m=0$ 时的 10% 随着 m 的增大而逐步降为零. 虚线是式 (5.115) 中的解析结果

因此，我们可以得出结论，式 (5.109) 中的汤川环线气体具有一个与 Villain 模型和 XY 模型相同的二级相变. 汤川环线气体的临界指数与 Villain 模型和 XY 模型的是完全一样的. 用临界理论的术语来说，就是对于任何 m，汤川环线气体都与 XY 模型同处于一个普适类.

对于图 5.7 中的临界温度曲线，我们可以找到一种解析近似结果. 为此，我们将对式 (5.59) 中的格点汤川势采用**跃迁展开** (hopping expansion)[8] 方法. 而这是通过对方程 (5.59) 中的变形贝塞尔函数 $I_{x_i/a}(2s)$ 作关于 s 的幂级数展开

$$I_n(2s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} \tag{5.112}$$

来得到的. 在原点 $x=0$ 处，式 (5.59) 对 s 的积分给出展开式

$$v_m(\mathbf{0}) = \frac{1}{a}\sum_{n=0,2,4}\frac{H_n}{(m^2a^2+6)^{n+1}}, \quad H_0=1, H_2=6, \cdots. \tag{5.113}$$

当取最低阶近似时，此式给出的近似比率为 $v_m(\mathbf{0})/v_0(\mathbf{0}) \equiv 1/(m^2a^2/6+1)$. 对此比率更精确的拟合为

$$\frac{v_m(\mathbf{0})}{v_0(\mathbf{0})} \approx \frac{1}{\sigma\, m^2a^2/6+1}, \quad \text{和} \quad \sigma \approx 1.6. \tag{5.114}$$

结合式 (5.108)，这就给出了临界温度的解析近似结果

$$T_{m,\mathrm{c}} = \frac{1}{\beta_{m,\mathrm{c}}} \approx \frac{4\pi^2 a v_m(\mathbf{0})}{3} \approx \frac{4\pi^2 a v_0(\mathbf{0})}{3}\frac{1}{\sigma\, m^2a^2/6+1}. \tag{5.115}$$

图 5.7 中给出了该解析结果与式 (5.111) 中数值计算结果之间的对比. 该拟合在 $m=0$ 时仅有 10% 的误差，而对于大 m 则变得精确.

5.1.9　超流规范场

如果我们将 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 表示为一个涡旋规范场的旋度的话，即

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \tag{5.116}$$

则流守恒律 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})=0$ 作为一个比安基等式可自动得以成立.

这样一来，将内核能量重新载入后，式 (5.89) 中的能量就可转而写为所谓的**对偶表述**：

$$\beta H_{\mathrm{avc}} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2\beta}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^2 + i\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}) + \frac{\beta\epsilon_{\mathrm{c}}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})^2\right]. \tag{5.117}$$

第二项是通过对 $\int \mathrm{d}^3x\, i(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}$ 进行分部积分得到的.

现在，这个能量的形式就是双规范不变的. 在原本的涡旋规范变换 (5.29) 下的不变性以外，现在多了一个在超流规范变换

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\varLambda(\boldsymbol{x}) \tag{5.118}$$

下的不变性，其中 $\varLambda(\boldsymbol{x})$ 为任意函数.

式 (5.117) 中的能量可以用方程式 (5.31) 中的涡旋密度表示为

$$\beta H'_{\mathrm{avc}} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2\beta}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^2 + i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}} + \frac{\beta\epsilon_{\mathrm{c}}}{2}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}2}\right]. \tag{5.119}$$

在此表示式中，可以任意变形的跃变曲面消失了，而能量则仅仅取决于涡旋线. 对于沿 L 的一组确定的涡旋线，能量 (5.119) 具有与方程式 (4.94) 中给定电流分布的自由磁场能量相类似的形式. 唯一的区别就是因子 i. 除去这个因子 i，在涡旋线周围，场 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 看起来就完全类似于一根电流线周围的磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$.

将此能量对 $\boldsymbol{a}$ 求极值并将此极值重新代入，就会再次得到类似于方程 (5.77) 的毕奥–萨伐尔相互作用能 [由于这个因子 i，它的形式取 (4.93) 式而不是式 (4.95)].

如果我们希望将配分函数 (5.88) 用超流规范场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 来表述的话，我们必须对它进行规范固定. 这里我们可以选取横场规范：

$$\Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}] = \delta[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}], \tag{5.120}$$

于是式 (5.88) 中的配分函数变为

$$Z_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\boldsymbol{a}\,\Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}] \sum_{\{S\}} \Phi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}] \mathrm{e}^{-\beta H_{\mathrm{avc}}}. \tag{5.121}$$

而对于哈密顿量 (5.119) 而言，配分函数变为对涡旋线 L 的求和：

$$Z_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\boldsymbol{a}\,\Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}] \sum_{\{L\}} \Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}] \mathrm{e}^{-\beta H'_{\mathrm{avc}}}, \tag{5.122}$$

其中

$$\Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}] = \delta[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}] \tag{5.123}$$

保证了涡旋线的闭合性.

注意，如果式 (5.33) 和式 (5.70) 中的能量 $H_{\mathrm{vc}}^{\mathrm{hy}}$ 或 $H_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}$ 明显地包含有依赖于 θ 的项的话，如哈密顿量 (5.78) 中的质量项，则无法再对 θ 涨落用一个规范场 $\boldsymbol{a}$ 来重新表述. 对于质量项，式 (5.97) 将变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\theta \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3x\left[\beta m^2\theta^2(\boldsymbol{x})/2 - if(x)\theta(\boldsymbol{x})\right]} = \delta_m[f(\boldsymbol{x})], \tag{5.124}$$

其中，$\delta_m[f(\boldsymbol{x})]$ 表示弱化的 δ 函数

$$\delta_m[f(\boldsymbol{x})] \propto \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}^3x\, f^2(\boldsymbol{x})/2\beta m^2}. \tag{5.125}$$

对于 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$，这说明 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 不再是一个像式 (5.98) 中那样的纯横场，因此也就不再具有式 (5.116) 中的旋度表示.

5.1.10 无序场论

为了理解配分函数 (5.122) 的热学行为，需要专门来讨论一下它在一个固定矢势 $\boldsymbol{a}$ 下对所有涡旋构型的求和. 因此，我们来考虑依赖于 $\boldsymbol{a}$ 的涡旋配分函数

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}] = \sum_{\{L\}} \delta[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}] \exp\left[-\int \mathrm{d}^3x \left(\frac{\beta\epsilon_{\mathrm{c}}}{2}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}^2} - \mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}\right)\right]. \tag{5.126}$$

利用一个在辅助曲面 $\tilde{S}$ 上奇异的辅助涡旋规范场 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}(x)$，可以进一步将上式写为下述对辅助曲面构型 $\tilde{S}$ 求和的形式：

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]=\sum_{\{\tilde{S}\}} \Phi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}] \int \mathcal{D}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}} \delta[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}] \exp\left\{-\int \mathrm{d}^3 x\left[\frac{\beta\epsilon_{\mathrm{c}}}{2}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}2}-\mathrm{i}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}\cdot\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}+\boldsymbol{a}\right)\right]\right\}. \quad (5.127)$$

在此表达式中，$\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 是一个普通的场函数. 借助式 (5.101)，对所有 $\tilde{S}$ 构型的求和可以保证对 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 的泛函积分确实给出对线 $\tilde{L}$ 上 δ 函数的求和. 由于 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}=0$，这说明线 $\tilde{L}$ 是闭合的，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}$ 的规范是可以被固定下来的. 因此式 (5.127) 与式 (5.126) 是一样的，最多有一个无关紧要的整体因子的差异.

由于对 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}$ 取了规范固定，因此曲面 $\{\tilde{S}\}$ 与它们的边界 $\{\tilde{L}\}$ 的关系确定且唯一. 于是，我们在式中就可将 $\sum_{\{\tilde{S}\}}\Phi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}]$ 换为 $\sum_{\{\tilde{L}\}}$.

接下来，我们引入辅助场 $\tilde{\theta}$，并且将 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 的散度的 δ 泛函改写为一个泛函傅里叶积分，于是我们得到

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]=\sum_{\{\tilde{L}\}} \int \mathcal{D}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\tilde{\theta} \exp\left\{-\int \mathrm{d}^3 x\left[\frac{\beta\epsilon_c}{2}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}2}+i\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-\boldsymbol{a}\right)\right]\right\}. \quad (5.128)$$

到此，$\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 已是一个完全没有约束的普通的场函数. 这样它就可被积掉，于是给出

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]=\sum_{\{\tilde{L}\}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\tilde{\theta} \exp\left[-\frac{1}{2\beta\epsilon_{\mathrm{c}}}\int \mathrm{d}^3 x(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-\boldsymbol{a})^2\right]. \quad (5.129)$$

回顾一下由式 (5.6) 中金兹堡–朗道 $|\phi|^4$ 理论的流体力学极限导出哈密顿量 (5.27) 的过程， 我们可以将式 (5.129) 看成是另一个 U(1) 不变金兹堡–朗道理论的流体力学极限下的配分函数，该金兹堡–朗道理论的配分函数由下述泛函积分给出：

$$\tilde{Z}^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]=\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^* \exp\left\{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x\left[|(\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}\boldsymbol{a})\psi|^2+m^2|\psi|^2+\frac{g}{2}|\psi|^4\right]\right\}, \quad (5.130)$$

其中，$\psi(x)$ 为一个具有 $|\psi|^4$ 相互作用的复场. 将此代入式 (5.122) 我们就得到了下述联合配分函数：

$$Z_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}=\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\boldsymbol{a}\Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}]\tilde{Z}^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}] \exp\left\{-\int \mathrm{d}^3 x\left[\frac{1}{2\beta}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^2\right]\right\}, \quad (5.131)$$

而这个配分函数就定义了我们想要的**无序场论** (disorder field theory).

线状物系综 (essembles of lines) 的这种由单一无序场给出的表述正是量子多体系统**二次量子化** 的欧几里得形式

在高温时，ψ 场的质量项 m^2 是负的，无序场因此获得一个非零的期待值 $\psi_0=\sqrt{-m^2/g}$. 如式 (5.10) 中那样，设

$$\psi(\boldsymbol{x})=\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})} \quad (5.132)$$

并且将 ρ 的涨落冻结掉，就直接得到了式 (5.129) 中的配分函数.

这个无序场论与最初的哈密顿量 (5.6) 所给出的金兹堡–朗道理论或者其流体力学极限 (5.33) 有着相似的涡旋线结构. 但与之相反，无序场的涨落在高温时反倒被“冻结掉”了，这点我们可以从式 (5.129) 和式 (5.130) 中指数函数项中的因子 $1/\beta$ 看出，在流体力学极限下配分函数 (5.130) 可约化为式 (5.129). 就如前面在式 (5.69) 中那样，我们可以对 $\tilde{\theta}$ 进行泛函积分. 这样就去掉了 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-\boldsymbol{a}$ 的纵向部分，于是式 (5.129) 变为

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]=\exp\left[-\frac{m_a^2}{2\beta}\int \mathrm{d}^3x\left(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-\boldsymbol{a}\right)_{\mathrm{T}}^2\right], \tag{5.133}$$

其中

$$m_a^2=\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{c}}}, \tag{5.134}$$

v_{T} 为速度场 v 的横向部分. 这个量与速度的纵向部分 v_{L} 分别定义为

$$v_{\mathrm{T}_i}\equiv\left(\delta_{ij}-\frac{\nabla_i\nabla_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)v_j,\quad v_{\mathrm{L}_i}\equiv\frac{\nabla_i\nabla_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}v_j. \tag{5.135}$$

在高温时，无序场 ψ 不具有涡旋线 $\tilde{L}$ (但对于序参数场 ϕ 而言，它有很多的涡旋线 L)，配分函数 (5.133) 也就变成

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]\approx\exp\left(-\frac{m_a^2}{2\beta}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}^2\right), \tag{5.136}$$

其中，指数部分对超流规范场横向部分 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$ 赋予了一个质量. 回顾式 (5.131) 中 $\boldsymbol{a}$ 场的导数项 $(1/\beta)(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^2$，我们看到这个质量为 m_a.

得到这个结果后，我们回头再看看式 (5.126) 中的表达式，发现只要忽略 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})=2\pi\delta(\boldsymbol{x},L)$ 的 δ 函数性质并利用高斯公式 (5.75) 将 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$ 积掉，我们就可以从 $Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]$ 得到同样的质量. 利用此近似处理方法，式 (5.126) 中的配分函数可以给出涡旋密度简单的关联函数

$$\langle {j_i}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}){j_j}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}')\rangle=\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{c}}}\left(\delta_{ij}-\frac{\nabla_i\nabla_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \tag{5.137}$$

在高温相中这个简化操作的可行性是很好理解的. 在一个晶格上，式 (5.126) 中关于 L 的求和对应于每个 x_i 点处的高斯求和形式 $\displaystyle\sum_{n_i=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta\epsilon_{\mathrm{c}}4\pi n_i^2/2}$. 在高温区域，$\beta$ 很小，因此对 n_i 的求和很显然可以替换为 $1/\sqrt{\beta}$ 乘以一个对准连续变量 $\nu_i\equiv\sqrt{\beta}n_i$ 的积分. 一般来讲，如果一个体系内的线或者曲面或者区域块的数量及其庞大的话，则与相应的 $\boldsymbol{\delta}$ 函数 $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};L)$、$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)$ 以及 $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};V)$ 成正比的场的统计

力学就可以将这个场当作是普通场来处理. 这样，对于几何构型的求和就转化为了相应的泛函积分.

同样的质量产生当然也可在式 (5.130) 中的复无序场论中观察到. 在高温时，ψ 场的质量项 m^2 是负的，于是无序场就获得了一个非零的期待值 $\psi_0=\sqrt{-m^2/g}$. 这再一次给出了质量项 (5.133)，且相应的质量为 $m_a^2=\psi_0^2$.

现在我们来看看低温相的情形. 此时，在配分函数 (5.126) 中密度 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}(x)=2\pi\delta(x;L)$ 的 δ 函数特性就不可以再忽略了. 在低温区域，涡旋线只表现为很小的环线. 一个无穷小的环线只简单地给出一个旋度贡献 [26]

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]\sim\exp\left[-\frac{1}{2\beta}\int\mathrm{d}^3x(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^2\right], \tag{5.138}$$

而大些的环会给出

$$Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]\sim\exp\left[-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^3x(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})f(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\right], \tag{5.139}$$

其中，$f(\boldsymbol{k})$ 为由某个常数出发的 $\boldsymbol{k}$ 的某个光滑函数，其中的常数为 $\boldsymbol{a}$ 场的**刚度**. 因此小涡旋环的贡献仅仅是改变了超流规范场的**色散**. $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}$ 中无穷长涡旋线才是产生质量项所必需的. 而这只能在温度升高到临界点以上才出现，尤其是在高温的时候，此时涡旋密度关联函数近似地由式 (5.137) 给出，于是式 (5.126) 就直接给出了式 (5.136) 中的质量项.

利用无序配分函数 $Z^{\mathrm{v}}[\boldsymbol{a}]$，式 (5.34) 中的配分函数可用完全等价的对偶配分函数

$$\tilde{Z}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\boldsymbol{a}\,\varPhi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}]\sum_{\{\tilde{S}\}}\varPhi[\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}]\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\tilde{\theta}\mathrm{e}^{-\beta\tilde{H}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}} \tag{5.140}$$

来替换掉，其中

$$\beta\tilde{H}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{hy}}=\frac{1}{2\beta}\int\mathrm{d}^3x\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})^2+m_a^2\left(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-\boldsymbol{a}\right)^2\right]. \tag{5.141}$$

这个能量在下述两种规范变换下是不变的. 第一，在超流规范变换 (5.118) 以及与之相伴的角量场 $\tilde{\theta}$ 的补偿变换

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\varLambda(\boldsymbol{x}),\quad\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})\to\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})+\varLambda(\boldsymbol{x}) \tag{5.142}$$

下不变. 第二，它在形如式 (5.29) 中的涡旋规范变换下不变，只不过这里是用在无序场中：

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})\to\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\tilde{\varLambda}_{\delta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}),\quad\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})\to\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})+\tilde{\varLambda}_{\delta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}), \tag{5.143}$$

其中，规范变换函数为

$$\tilde{\varLambda}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})=2\pi\delta(\boldsymbol{x};\tilde{V}). \tag{5.144}$$

在高温时，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{V}}$ 中的涡旋线被冻结掉，于是能量 (5.141) 再一次给出了式 (5.133) 中的质量项.

此质量项表明，在高温时超流规范场是短程的. 在某个临界温度时超流性已经被破坏了. 这正是超导中著名的迈斯纳效应 (Meissner effect)[27] 在无序场论中的类比，我们将在 5.2.1 节中讨论此效应. 如果没有超流规范场 $\boldsymbol{a}$，则场 $\tilde{\theta}$ 将是长程的，即无质量的. 超流规范场会将此无质量模吸收掉，从而系统只有短程激发. 更精确地说，在高温相中，我们可以证明所有包含局域规范不变客观测量的关联函数必定是短程的.

例如，我们取无序场的局域规范不变流为

$$\boldsymbol{j}_s \equiv \boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta} - \boldsymbol{a}. \tag{5.145}$$

当选取 $\tilde{\theta}$ 以吸收掉 $\boldsymbol{a}$ 的纵向部分后，式 (5.145) 将只留下 $\boldsymbol{a}$ 的横场部分，即 $\boldsymbol{j}^s = -\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$[28]. 由哈密顿量 (5.141) 我们立即可以得到超流的自由关联函数为

$$\langle {j_i}^s(\boldsymbol{x}_1){j_j}^s(\boldsymbol{x}_2)\rangle \propto \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\delta_{ij}-k_ik_j/m_a^2}{\boldsymbol{k}^2+m_a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1-x_2)}, \tag{5.146}$$

它并不具有零质量极点.

5.2　超导体中的相变

图 5.8 给出了超导体的比热曲线. 它看起来与第 121 页中氦的比热很不一样. 该曲线起步带有典型的激活过程行为，该行为受控于玻尔兹曼因子 $c_{\mathrm{s}} \propto \mathrm{e}^{-\varDelta(0)/k_{\mathrm{B}}T}$，其中 k_{B} 为玻尔兹曼常量. 激活能 $\varDelta(0)$ 显示出在 $T=0$ 时系统电子能谱存在**能隙**. 这正是超导体中费米面附近两个动量相反的电子结成的**库珀对**的结合能. 在临界温度 T_{c} 时，该比热降为自由电子气体的比热

$$c_{\mathrm{n}} = \frac{2}{3}\pi^2\mathcal{N}(0)T, \tag{5.147}$$

其中 [29]

$$\mathcal{N}(0) = \frac{3n_{\mathrm{e}}}{4\epsilon_{\mathrm{F}}} = \frac{3mn_{\mathrm{e}}}{2p_{\mathrm{F}}^2} = \frac{3n_{\mathrm{e}}}{2mv_{\mathrm{F}}^2} \tag{5.148}$$

为具有能量 ϵ_{F} 和动量 p_{F} 的费米球表面处质量为 m 的电子密度，其速度为 $v_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}/m$，而 n_{e} 为电子密度. 费米速度 v_{F} 的量级通常为 10^8 (cm/s)($\sim c/300$).

根据 BCS(Bardeen、Cooper 和 Schrieffer) 理论 [30]，该跃变由以下普适律 [我们将在式 (7A.24) 中进行详细推导] 给出：

$$\frac{c_{\mathrm{s}}-c_{\mathrm{n}}}{c_{\mathrm{n}}} \equiv \frac{\Delta c}{c_{\mathrm{n}}} = \frac{3}{2}\,\frac{8}{7\zeta(3)} \equiv 1.4261\cdots, \tag{5.149}$$

其中，$\zeta(3)$ 为黎曼 zeta 函数 $\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$，且 $\zeta(3) = 1.202057\cdots$. 这一跃变与实验完全吻合.

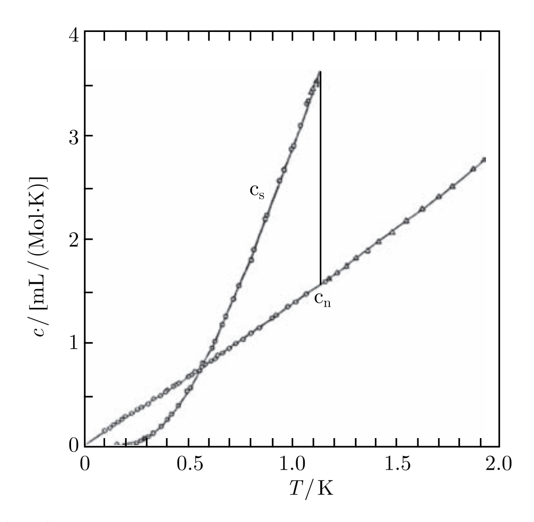


图 5.8　超导态下铝的比热 [N.E. Phillips, Phys. Rev. **114**, 676 (1959)]. 当 T 非常小时，它表现出典型的 $\mathrm{e}^{-\varDelta(0)/k_\mathrm{B}T}$ 型的指数行为而不是液氦超流那样的指数行为. 从这个曲线我们可以得出 $\varDelta(0) \equiv 2.04\,\mathrm{K}$. 在临界温度 $T_\mathrm{c} \approx 1.2\mathrm{K}$ 处，有一个向下到标志自由电子气体的线性行为的跃变. 图中的比值 $\Delta c/c_\mathrm{n} = 1.43$ 和 $T_\mathrm{c} \approx \varDelta(0)/1.76$ 同式 (5.149) 和式 (5.150)[30] 中的 BCS 结果吻合得很好. 而一个一般的金属则只表现出 c_n 所标记的线性行为

在 BCS 理论中，能隙 $\varDelta(0)$ 与 T_c 的比值为一个普适常数

$$\frac{\varDelta(0)}{T_\mathrm{c}} = \pi \mathrm{e}^{-\gamma} \approx 1.76, \tag{5.150}$$

其中，$\gamma \approx 0.577\cdots$ 为 Euler-Mascheroni **常数**. 这一比值我们也可从图 5.8 中看到.

5.2.1　金兹堡–朗道理论

由 BCS 理论，我们可以推导出用以描述超导相变的**金兹堡–朗道哈密顿量**[5, 31]

$$H_\mathrm{HL}[\psi, \psi^*, \boldsymbol{A}] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \left\{ |(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A})\psi|^2 + \tau|\psi|^2 + \frac{g}{2}|\psi|^4 + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})^2 \right\}, \tag{5.151}$$

它描述了系统在临界点附近的行为. 参量 q 为 ψ 场电荷. τ 等于 $\tilde{T}/\tilde{T}_\mathrm{c}^\mathrm{MF} - 1$，即与临界点的相对温差，在正常态时该相对温差为正而在超导态时为负. 场 $\psi(\boldsymbol{x})$ 称为**集体场** (collective field)，它描述费米面附近两个具有相反动量的电子所构成的库珀对 [32]. 库珀对所携带的电荷电量为电子电荷的两倍，即 $q = 2e$. 在式 (5.151) 中，

它们与矢势 $\boldsymbol{A}(x)$ 最小耦合在一起. 为简便起见，我们设光速 c 为 1. ψ 的模等于电子能谱的能隙，也即等于电子组成库珀对的结合能.

通过将能量形式地展开成能隙的幂级数，并将能隙看作序参数，金兹堡和朗道 [33] 就得到了式 (5.151) 中的哈密顿量. 他们认为当 τ 很小时只需保留到 ψ^4 项. 在此截断展开式上他们又增加了一个导数项以允许序参量具有空间变化，这就使得序参量变为了**序参数场**，用 $\psi(x)$ 来标记. 为完整起见，我们在 7A 节中简明扼要地给出了一种利用泛函积分方法由 BCS 理论而得式 (5.151) 中金兹堡–朗道哈密顿量的优美的推导过程 (也可参看文献 [32]).

在临界区域内，超导体的很多特性都可简单地用金兹堡–朗道理论来解释. 在很多情况中，金兹堡–朗道序参数场 $\phi(x)$ 的涨落是可以忽略的，这正是我们谈及平均场结果的原因，也正是我们在上面 τ 的定义中给临界温度 $\tilde{T}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{MF}}$ 加上这个上标的原因. 在相变点附近，超导体的特性更可以很好地由金兹堡–朗道哈密顿量来描述 [请与式 (5.130) 进行对比].

金兹堡–朗道哈密顿量 (5.151) 含有一个守恒的超导电流，这可通过将式 (3.116) 中的 Noether 规则运用于式 (5.151) 而得到. 此电流密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}(x,t) &\equiv \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)[\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)]\psi(\boldsymbol{x},t)-\{[\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)]\,\psi(\boldsymbol{x},t)\}^{\dagger}\,\psi\right)\\ &=\frac{\mathrm{i}}{2}\psi^{*}(\boldsymbol{x},t)\overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\psi(\boldsymbol{x},t)-q\boldsymbol{A}\,\psi^{*}(\boldsymbol{x},t)\psi(\boldsymbol{x},t).\end{aligned} \tag{5.152}$$

此电流密度在以下几点上区别于式 (3.118) 中的薛定谔电流密度：它采用自然单位制 $m=1$，$c=1$，并且它的电荷电量为库珀对的电荷电量 $2e$.

类似于式 (5.10) 和式 (5.132)，我们将场函数 ψ 分解为

$$\psi(\boldsymbol{x})=\tilde{\rho}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}(\mathbf{x})}. \tag{5.153}$$

将此代入式 (5.151) 并考虑到式 (5.23)，我们得到

$$H_{\mathrm{GL}}[\tilde{\rho},\tilde{\theta},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}},\boldsymbol{A}]=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\tilde{\rho}^2}{2}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-q\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\rho})^2+V(\tilde{\rho})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\right], \tag{5.154}$$

其中，$V(\tilde{\rho})$ 为 $\tilde{\rho}$ 场的势函数：

$$V(\tilde{\rho})=\frac{\tau}{2}\tilde{\rho}^2+\frac{g}{4}\tilde{\rho}^4. \tag{5.155}$$

在低温相，通过将 $\tilde{\rho}(x)$ 设为它在能量 (5.151) 最小值处所取的值 $\tilde{\rho}_0=\sqrt{-\tau/g}$，我们就得到了流体力学极限. 相应的超导体的流体力学能量或伦敦能量为

$$H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}[\tilde{\theta},\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}},\boldsymbol{A}]=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{m_A^2}{2q^2}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-q\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\right], \tag{5.156}$$

其中，我们引入了一个质量参数

$$m_A^2 = n_0 q^2, \tag{5.157}$$

它正比于超流粒子的密度

$$n_0 = \tilde{\rho}_0^2. \tag{5.158}$$

在温度极低的情况下，系统不存在涡旋，式 (5.156) 中的第一项使得矢势的横场部分的质量不为零. 这就导致了磁场在超导体内的**穿透深度**是有限的，即 $\lambda = 1/m_A$，而这就解释了超导中著名的迈斯纳效应 [34].

人们将此机制移植到电弱相互作用的标准模型中以使 矢量介子 $W^{+,0,-}$ 和 Z 获得质量，从而解释了对电磁作用而言对弱作用强烈的抑制. 在此处，迈斯纳效应被称为是**希格斯效应**.

在同样的极限下，超流粒子的流密度

$$\boldsymbol{j}_{\rm s} = n_0(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm v} - q\boldsymbol{A}). \tag{5.159}$$

相应的配分函数为

$$Z_{\rm SC}^{\rm hy} = \int \mathcal{D}\boldsymbol{A}\ \varPhi_{\rm T}[\boldsymbol{A}] \sum_{\{\tilde{S}\}} \varPhi[\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm v}] \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\tilde{\theta}\ {\rm e}^{-\tilde{\beta} H_{\rm SC}^{\rm hy}[\tilde{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm v}, \boldsymbol{A}]}. \tag{5.160}$$

为了区别于之前所讨论的液氦超流中的相关量，我们这里将超导的温度记为 $\tilde{T}$ 而将它的逆记为 $\tilde{\beta}$.

式 (5.156) 中的能量具有与式 (5.141) 中无序场表示中 ^{4}He 超流能量相同的形式. 超流规范场所起的作用现在由电磁学矢势 $\boldsymbol{A}$ 来承担. 该能量具有如下两类规范对称性：磁性不变性

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + q^{-1}\boldsymbol{\nabla}\varLambda(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{\theta}(\boldsymbol{x}) \to \tilde{\theta}(\boldsymbol{x}) + \varLambda(\boldsymbol{x}), \tag{5.161}$$

以及涡旋规范不变性

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm v}(\boldsymbol{x}) \to \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\tilde{\varLambda}_\delta(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{\theta}(\boldsymbol{x}) \to \tilde{\theta}(\boldsymbol{x}) + \tilde{\varLambda}_\delta(\boldsymbol{x}), \tag{5.162}$$

相应的规范函数为

$$\tilde{\varLambda}_\delta(\boldsymbol{x}) = 2\pi\delta(\boldsymbol{x}; \tilde{V}). \tag{5.163}$$

和利用式 (5.34) 中的配分函数来描述 ^{4}He 超流一样，式 (5.160) 中的配分函数不仅仅给出了零温时超导的统计行为，在此温度下能量由式 (5.156) 给定，同时也描述了所有温度不太高的情形. 涨落的涡旋规范场 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm v}$ 保证了该理论在穿越相变点时的有效性.

5.2.2 超导的无序场论

我们现在来推导该配分函数的无序场表述，在此表示中超导涡旋线对描述相变起到了关键性作用 [27].

在低温时，涡旋被冻结，因此配分函数 (5.160) 中的 $\tilde{\theta}$ 涨落可以被积掉. 这就将能量 (5.156) 简化为

$$H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}[\boldsymbol{A}] \approx \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{m_A^2}{2}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\right]. \tag{5.164}$$

即可用带横场质量项的自由矢势 $\boldsymbol{A}$ 来表示. 这就是超导中著名的迈斯纳效应，它将磁场的穿透深度限定为 $\lambda = 1/m_A$. 此效应完全类似于我们之前在超流的无序场表示中所观察到的，即在正常相中超流被限定在一个有限的范围.

为了推导配分函数 (5.160) 的无序理论，我们给式 (5.156) 中的能量增加一个涡旋线的内核能量

$$H_{\mathrm{c}} = \frac{\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}}{2}\int \mathrm{d}^3x\,(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}})^2. \tag{5.165}$$

如同在配分函数 (5.88) 中那样，我们可以引入一个辅助场 $\tilde{b}_i$ 而将式 (5.156) 中的指数部分写为如下正则形式：

$$\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{q^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}\tilde{\boldsymbol{b}}^2+i\tilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}-q\boldsymbol{A})+\frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2+\frac{\tilde{\beta}\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}})^2\right]. \tag{5.166}$$

通过在相应的配分函数中将 $\tilde{\theta}$ 场积掉，我们就得到如下守恒律：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{b}} = 0, \tag{5.167}$$

此守恒律可以通过将 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 表示为超导体重超流规范场 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 的旋度

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}, \tag{5.168}$$

而加以满足. 这就使得能量取如下形式：

$$\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{q^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2 - \mathrm{i}q\,\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}} + \frac{\tilde{\beta}\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}}{2}\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}\,2}\right], \tag{5.169}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}} = \boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}} \tag{5.170}$$

为超导中的涡旋密度. 在低温时 $\tilde{\beta}$ 很大，涡旋线被冻结掉，则哈密顿量中的后两项可以忽略. 将 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 场积掉，我们又重新得到了式 (5.164) 中迈斯纳效应的横场质量项. 另外，在高温时涡旋线激增，此时涡旋密度 $\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}}$ 可以像普通函数那样从相关配分函数中积掉. 这就给出了横场质量项

$$\frac{q^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}\int \mathrm{d}^3x\, m_{\tilde{a}}^2\, \tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{T}}^2, \tag{5.171}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{T}}$ 场的质量 $m_{\tilde{a}}$ 为

$$m_{\tilde{a}}^2 = m_A^2/q^2\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}. \tag{5.172}$$

可以看出，这样一个质量项在高温时破坏了超导体的迈斯纳效应. 的确，当把旋度 (5.168) 代入式 (5.166) 中的能量表达式，并利用式 (5.171) 中的结果，我们就得到在高温 $\tilde{T}$ 时有

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{q^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2 + m_{\tilde{a}}^2\,\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{T}}^2\right] - \mathrm{i}q\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\right]. \tag{5.173}$$

如果我们从配分函数中将带质量的 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 场积掉，则矢势的哈密顿量变为

$$H_{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\left(1 + \frac{m_{\boldsymbol{A}}^2}{-\boldsymbol{\nabla}^2 + m_{\tilde{a}}^2}\right)\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}. \tag{5.174}$$

将式 (5.174) 分母按 $-\boldsymbol{\nabla}^2$ 的幂律展开，我们看到只有梯度能量而没有质量项. 于是矢势 $\boldsymbol{A}$ 就保持了它的长程性并且在大尺度上给出了库仑型的力，只是它的色散关系被修正而以一种更加复杂的形式依赖于 $\boldsymbol{k}$.

另外，在低温项中质量 $m_{\tilde{a}}$ 为零，而式 (5.174) 中的 m_A^2 项再次给出具有横场质量项的哈密顿量 (5.164)，而这将给出迈斯纳效应.

通过重复方程 (5.126)~(5.129) 中的变换，利用我们之前讨论超流中涡旋同样的方法，我们可以用无序场论来描述超导中波动的涡旋线. 无序场中的角变量记为 $\theta(x)$，而无序场论中的涡旋线则记为 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$. 于是无序作用量为

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}} = \int \mathrm{d}^3x\Big[&\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2 - \mathrm{i}q\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\\ &+\frac{m_{\tilde{a}}^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}} - \tilde{\boldsymbol{a}})^2\Big].\end{aligned} \tag{5.175}$$

在相变点附近，这等同于如下无序场能量：

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}} \sim \int \mathrm{d}^2x\Big[&\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2 - \mathrm{i}q\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + \frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\\ &+\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}})\,\phi\right]^2 + \frac{\tau}{2}|\phi|^2 + \frac{g}{4}|\phi|^4\Big].\end{aligned} \tag{5.176}$$

此复无序场 $\phi(x)$ 的位相为 $\theta(x)$，而它的大小 $|\phi(\boldsymbol{x})|$ 则由 $\tau < 0$ 和 g 固定而为 $|\phi(\boldsymbol{x})|^2 = m_{\tilde{a}}^2/\tilde{\beta}m_A^2$. 矢势 $\boldsymbol{A}$ 以一种使得相应的磁场平均等于 $q\tilde{\boldsymbol{a}}/\tilde{\beta}$ 的方式简谐地震荡. 将 $\boldsymbol{A}$ 积掉后，我们就从式 (5.176) 中得到

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}} \sim \int \mathrm{d}^2 x \left[\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2 + m_{\tilde{a}}^2\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{T}}^2] + \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}})\,\phi\right]^2 + \frac{\tau}{2}|\phi|^2 + \frac{g}{4}|\phi|^4\right]. \tag{5.177}$$

该哈密顿量在如下规范变换下是不变的：

$$\phi(\boldsymbol{x}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\varLambda}(\boldsymbol{x})}\phi(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \to \tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\tilde{\varLambda}(\boldsymbol{x}). \tag{5.178}$$

相应的配分函数为

$$Z_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{dual}} = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\tilde{\boldsymbol{a}}\,\varPhi[\tilde{\boldsymbol{a}}]\mathrm{e}^{-\beta\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}}, \tag{5.179}$$

其中，$\varPhi[\tilde{\boldsymbol{a}}]$ 为某个规范固定泛函.

这个配分函数可以通过展开成 g 的幂级数的微扰方法进行计算. g^n 项包含有**费曼积分** (Feynman integrals)，且可用包含 $n+1$ 个圈的**费曼图** (Feynman diagrams)[35] 来表示. 这些圈给出了超导中涡旋环线的拓扑形状.

超导体的无序场论在很长一段时间都是确定超导相变的临界和三重临界特性的唯一的理论形式 [27, 36]. 只是到了最近，人们才得到了一种基于金兹堡–朗道理论的描述 [37].

在流体力学哈密顿量 (5.175) 中，将 $\boldsymbol{A}(x)$ 消掉后就得到

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2 + m_a^2\tilde{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{T}}^2] + \frac{m_a^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}} - \tilde{\boldsymbol{a}})^2\right], \tag{5.180}$$

此哈密顿量在下面这个规范变换下是不变的：

$$\theta(\boldsymbol{x}) \to \theta(\boldsymbol{x}) + \tilde{\varLambda}(\boldsymbol{x}), \quad \tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \to \tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\tilde{\varLambda}(\boldsymbol{x}). \tag{5.181}$$

5.3 序参量与无序参量的对比

自朗道 1947 年的工作后 [3]，相变通常都用序参量来表征，在低温有序相，序参量不为零，而在高温无序相中相应序参量为零. 到了 20 世纪 80 年代后，这一对相变的刻画才由关于几种相变的对偶无序场论加以了丰富 [8]. 无序场的期待值给出系统的无序参量，它随温度变化的行为刚好与序参量相反，在高温区域不为零，反倒是在低温相中为零. 接下来，我们将确定超流和超导体中的序参量和无序参量，并研究它们在这两个系统的流体力学理论下的期待值.

5.3.1 ^{4}He 超流

在朗道利用哈密顿量 (5.6) 研究超流相变的原始描述中，序参量 $\mathcal{O}$ 是由复序场 $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$ 的期待值来确定的:

$$\mathcal{O} \equiv \langle\mathcal{O}(\boldsymbol{x})\rangle = \langle\phi(\boldsymbol{x})\rangle. \tag{5.182}$$

由序参数场 $\mathcal{O}(x)$ 的两点关联函数

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\equiv\langle\mathcal{O}(\boldsymbol{x}_2)\mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}_1)\rangle=\langle\phi(\boldsymbol{x}_2)\phi^*(\boldsymbol{x}_1)\rangle \tag{5.183}$$

的大尺度极限，我们可以析取出序参量的行为特性. 这可通过利用任意两个局域算子关联函数的下述团簇特性来计算得到

$$\langle O_1(\boldsymbol{x}_2)O_2(\boldsymbol{x}_1)\rangle\underset{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\to\infty}{\longrightarrow}\langle O_1(\boldsymbol{x}_2)\rangle\langle O_2(\boldsymbol{x}_1)\rangle. \tag{5.184}$$

于是，我们得到了关联函数 (5.183) 的大尺度极限

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\underset{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\to\infty}{\longrightarrow}|\mathcal{O}|^2. \tag{5.185}$$

如我们对此理论取流体力学极限，也即 $\phi(x)$ 的大小被冻结，则序参数场约化为 $O(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$，相应的序参量则变为

$$\mathcal{O}\equiv\langle O(\boldsymbol{x})\rangle=\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}\rangle. \tag{5.186}$$

这是从下述关联函数的大尺度极限得到的：

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}_1)}\rangle. \tag{5.187}$$

如果我们希望将 (5.186) 作为序参量来替换掉式 (5.182) 的话，很重要的一点是关联函数 (5.187) 在变换 (5.29) 下是涡旋规范不变的. 这一点并不很明显. 一个很明显具有规范不变性的量为以下这个期待值：

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\left\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}\mathrm{d}x[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})]}\right\rangle. \tag{5.188}$$

式 (5.29) 中的变换并不会改变它的指数部分. 然而，我们得到此涡旋规范不变性的代价是式 (5.188) 有赖于从 x_1 到 x_2 的路径的形状. 幸运的是，这种形状依赖性可能在此处并不真的存在，这样，此涡旋规范不变的关联函数就是唯一地确定的，式 (5.187) 同样也是如此，这就保证了式 (5.187) 的涡旋规范不变性.

为了证明这一点，首先将式 (5.188) 改写为

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\left\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})]}\right\rangle, \tag{5.189}$$

其中

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}) \tag{5.190}$$

为从 $\boldsymbol{x}_1$ 到 $\boldsymbol{x}_2$ 的任意一条线 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 上的 δ 函数. 它满足 [参看式 (4.10) 和式 (4.11)]

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x}), \tag{5.191}$$

其中

$$q(\boldsymbol{x}) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2). \tag{5.192}$$

现在不难看出式 (5.189) 中的表达式在 $\tilde{L}_{x_1}^{x_2}$ 的形变下是不变的. 可令 $\tilde{L}_{x_1}^{\prime x_2}$ 为另一个由 x_1 到 x_2 的路径，则这两个路径的差为一个闭合路径 $\tilde{L}$，而相应的式 (5.189) 中的指数部分则相差一个积分

$$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};\tilde{L})\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})\right]. \tag{5.193}$$

利用式 (4.9)，第一项在分部积分后为零. 而将式 (5.25) 代入后，第二项变为

$$-2\pi i\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};\tilde{L})\,\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S) = -2\pi\mathrm{i}k, \qquad k = \text{整数}. \tag{5.194}$$

整数 k 计量 $\tilde{L}$ 穿透曲面 S 的次数. 由于 $-2\pi\mathrm{i}k$ 出现在指数中，它对于关联函数 (5.189) 并无贡献. 这样，我们就证明了式 (5.188) 中的期待值确实不依赖于由 $\boldsymbol{x}_1$ 到 $\boldsymbol{x}_2$ 的积分路径.

我们注意到以上讨论可与第 4.4 节中讨论磁单极的过程相类比. 因此，我们称 $q(x)$ 为位于 x_2 和 x_1 的**单极子–反单极子对的荷密度**. 在第 4.4 节关于磁单极的描述中我们知道，一个位于 $\boldsymbol{x}_2$ 的磁单极与一个狄拉克弦 $L^{\boldsymbol{x}_2}$ 相连，磁通从无穷远处沿此狄拉克弦导入，而位于 $\boldsymbol{x}_1$ 处的反磁单极子则携带有一根狄拉克弦 $L_{\boldsymbol{x}_1}$，沿着这根弦磁通被导出到无穷远处. 由于这两根弦的形状无关紧要，我们可以将它们形变到一个单一的连接 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的一条任意的路径. 这就是式 (5.190) 中的线 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$.

场 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)$ 为一个规范场，它具有与第 4.4 节中**磁单极规范场**相同的特性. (参看文献 [38]). 线 $\tilde{L}_{x_1}^{x_2}$ 的形状的改变可通过**单极子规范变换** [回顾式 (4.64)]

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};\tilde{S}) \tag{5.195}$$

来实现. 注意，对应于该规范场的不变场强是式 (5.191) 中的散度，而不是一个旋度 [回顾对应于涡旋规范场的式 (5.31)].

这样，这个明显的具有涡旋规范不变的关联函数 (5.189) 与连接 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的路径形状的无关性就用一个额外的单极子规范规范变换下的不变性表示了出来. 此关联函数因此就成为了一个双规范不变的量.

这样讨论之后，我们现在就可以来定义序参量 (5.186) 的一个明显的具有涡旋规范不变的表示式. 它由如下期待值给出：

$$\mathcal{O} = \langle\mathcal{O}(\boldsymbol{x})\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int^{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}'\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x')\right]}\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}';L^{\boldsymbol{x}})\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}')\right]}\right\rangle, \tag{5.196}$$

其中，$\delta(\boldsymbol{x};L^{\boldsymbol{x}})$ 为式 (4.58) 中定义的任意一条线上的 δ 函数. 这条线是从无穷远到 $\boldsymbol{x}$ 点的一条任意的线.

现在，我们来考察式 (5.188) 中的关联函数在低温和高温时的大尺度行为，即式 (5.184). 在低温时，涡旋十分稀少，$\theta(x)$ 场的涨落近似是简谐的. 基于**维克定理** (Wick's theorem)，简谐涨落的变量 θ_1 与 θ_2 满足如下关系 [39]：

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle\theta_1\theta_2\rangle}, \tag{5.197}$$

利用此关系，我们近似可得

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1) \underset{T\approx 0}{\approx} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle[\theta(\boldsymbol{x}_2)-\theta(\boldsymbol{x}_1)]^2\rangle} = \mathrm{e}^{\left\langle\left[\theta(\boldsymbol{x}_2)\theta(\boldsymbol{x}_1)-\frac{1}{2}\theta^2(\boldsymbol{x}_1)-\frac{1}{2}\theta^2(\boldsymbol{x}_2)\right]\right\rangle}. \tag{5.198}$$

而 $\theta(\boldsymbol{x})$ 场的两点关联函数为

$$\langle\theta(\boldsymbol{x}_2)\theta(\boldsymbol{x}_1)\rangle \approx Tv_0(|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|), \tag{5.199}$$

其中，$v_0(r)$ 为式 (5.51) 中的库仑势，当 $r\to\infty$ 时该势函数趋于零. 于是，关联函数式 (5.198) 就等于

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1) \approx \mathrm{e}^{-Tv_0(\mathbf{0})}\mathrm{e}^{Tv_0(|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|)}. \tag{5.200}$$

我们发现，只有当我们采用流体力学极限来研究超流时此式才为有限值，而流体力学极限则只在大于相干长度的尺度上才正确，对于 He 来说，这个长度为几个 Å. 于是，对于所有关于波矢的积分，我们只能在 $|\boldsymbol{k}|\leqslant\boldsymbol{\Lambda}\equiv 1/\xi$ 范围内进行，这就使得 $v_0(\mathbf{0})$ 为一个有限值

$$v_0(\mathbf{0}) = 1/2\xi\pi^2. \tag{5.201}$$

这样导致的一个结果就是关联函数 (5.198) 具有一个非零的大尺度极限

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1) \underset{|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{const}, \tag{5.202}$$

而由式 (5.184)，这就意味着序参量 $\mathcal{O}=\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}\rangle$ 不为零.

现在，我们来计算高温相中的大尺度行为. 为了得到关联函数 $G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)$，我们在配分函数 (5.34) 中插于一个外源项

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}_1)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\, q(\boldsymbol{x})\theta(\boldsymbol{x})}, \tag{5.203}$$

这一项就会以下述形式出现在式 (5.89) 中能量的正则表示中：

$$\beta H = \int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2\beta}\boldsymbol{b}^2 - \mathrm{i}\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{\nabla}\theta-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}\right) + \frac{\beta\epsilon_{\mathrm{c}}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})^2 + \mathrm{i}q(\boldsymbol{x})\theta(\boldsymbol{x})\right], \tag{5.204}$$

这里，为了不失一般性，我们在其中加入了内核能量项. 将 θ 场从配分函数中积掉，我们就得到如下限制：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = -q(\boldsymbol{x}). \tag{5.205}$$

将单极子规范场 (5.190) 取个负号我们就可求解此限制条件，一般性的结果为

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}), \tag{5.206}$$

于是，能量 (5.204) 可进一步写为 [再次利用式 (5.194)]

$$\beta H = \int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2\beta}\left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\right)^2 - \mathrm{i}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}^{\mathrm{v}} + \frac{\beta\epsilon_c}{2}\boldsymbol{j}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}2}\right]. \tag{5.207}$$

在单极子规范变换 (5.195) 下，如果超流规范场同时作如下变换：

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; \tilde{S}), \tag{5.208}$$

则此能量表示式是不变的.

关联函数 (5.189) 现在可以通过对哈密顿量 (5.207) 的玻尔兹曼因子进行泛函积分而计算得到. 外源项 (5.203) 的存在则通过 $\mathrm{e}^{-\beta H}$ 的泛函积分中如下的依赖于 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}$ 的被积函数而加以说明：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x q(\boldsymbol{x})\theta(\boldsymbol{x})} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\beta}\int \mathrm{d}^3 x\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})^2 - \boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})]\right\}}. \tag{5.209}$$

在此正则表述下对低温项中的关联函数的大尺度行为式 (5.202) 再次进行计算会对以后的计算很有帮助和启发. 在低温时，涡旋线被冻结掉，我们可以将式 (5.207) 中的最后两项省略掉. 在相应的配分函数中将超流规范场 $\boldsymbol{a}$ 积掉，我们发现，配分函数是以一个因子的形式将 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}$ 包含在内的：

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x\left\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})^2 - [\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})]\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})]\right\}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})}. \tag{5.210}$$

由此，我们就得到了关联函数

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x q(\boldsymbol{x})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}q(\boldsymbol{x})} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x \mathrm{d}^3 x' q(\boldsymbol{x}) v_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}')}. \tag{5.211}$$

将式 (5.192) 代入，我们就得

$$G_O(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \mathrm{e}^{-v_0(\boldsymbol{0})/\beta}\mathrm{e}^{v_0(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)/\beta}, \tag{5.212}$$

这与之前在式 (5.200) 中的结果是一致的.

式 (5.207) 中能量的正则表示使得我们可以计算高温相中关联函数的大尺度行为. 涡旋涨落的激增产生出一个横场质量项 $m_a^2\boldsymbol{a}^2$，这就将式 (5.210) 变为 (请参看文献 [40])

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x\left\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})^2 - [\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})]\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_a^2}[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})]\right\}} \\
&\quad = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3 x\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_a^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\frac{m_a^2}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_a^2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\right]}.
\end{aligned} \tag{5.213}$$

利用式 (5.191)，我们可以将其因式分解为

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3x\, q(\boldsymbol{x})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_a^2}q(\boldsymbol{x})} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3x \boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\frac{m_a^2}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_a^2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})}. \tag{5.214}$$

第一个指数包含了位于 x_2 和 x_1 处的磁单极和反磁单极之间的汤川势

$$v_{m_a}(r) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+m_a^2} = \frac{\mathrm{e}^{-m_a r}}{4\pi r}, \tag{5.215}$$

这与式 (5.212) 中的形式 $\mathrm{e}^{-v_{ma}(0)/\beta}\mathrm{e}^{v_{ma}(|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|)/\beta}$ 是一样的. 势函数 $v_{m_a}(|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|)$ 随着尺度的增加而趋于零，因此该指数函数将趋于一个常数. 式 (5.214) 中的第二个因子具有如下形式 [参看式 (5.190)]

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\beta}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\delta(\boldsymbol{x};\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2})v_{ma}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)\delta(\boldsymbol{x}';\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2})}. \tag{5.216}$$

这就是连接 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的线 $\tilde{L}_{x_1}^{x_2}$ 的汤川自能. 如果 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$ 远大于汤川势的力程 $1/m_a$，则此项正比于 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$. 因此，式 (5.214) 中的第二个指数函数在此极限下为零，相应的关联函数也是如此：

$$G_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{const}\cdot|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|} \underset{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.217}$$

由于关联函数的团簇特性 (5.184)，这表明在高温时，期待值 $\mathcal{O}=\langle O(\boldsymbol{x})\rangle=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}\rangle$ 为零，因此 O 确实是一个好的序参量.

这个对最初无关紧要的连接磁单极和反磁单极的线 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 赋予能量的机制完全类比于之前式 (5.85) 中曲面能量的产生. 在彼处，能量是由 θ 场的质量而引起的，在这里则是由 $\boldsymbol{a}$ 场涨落的质量而得到的，这样一个涨落在高温相中是由无限长涡旋线的激增而引起的.

注意，朗道复序参数场论中也可给出一个指数衰减

$$\langle\psi(\boldsymbol{x}_1)\psi(\boldsymbol{x}_2)\rangle \propto \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1-x_2)}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+m^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-m|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}. \tag{5.218}$$

然而，此处的短程则是由完全不同的途径引发的. 在计算式 (5.218) 时，序参数场的大小的涨落起了关键性作用. 而在配分函数 (5.34) 中，正如我们在第 5.1.4 节末尾所指出的那样，它们的角色由涡旋规范场 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})$ 的涨落代替掉了. 正是涡旋线的激增造就了汤川势的有限程 $1/m_a$ 以及式 (5.217) 中的指数衰减.

5.3.2 超导

与式 (5.186) 中超流氦的期待值不同，式 (5.151) 中金兹堡–朗道哈密顿量中的序参数场 $\psi(x)$ 的期待值并不能够作为序参量，因为在通常的电磁规范变换 (5.161)

下它并不是规范不变的. 所有非规范不变的量的期待值在任何温度下都为零. 这个直觉上显而易见的事实就是著名的 Elitzur**定理**[41]. 该定理也适用于 $\psi(x)$ 的流体力学极限，因此相应的指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}(x)}$ 的期待值也不能作为序参量. 我们就不得不从几种不同的规范不变的关联函数的大尺度极限中去寻找可能的序参量的候选者.

1. 序参量的 Schwinger 候选者

作为第一个可能的候选者，我们来考虑期待值 $\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}(x_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\theta}(x_1)}\rangle$ 的规范不变形式：

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}_1)}\rangle, \tag{5.219}$$

也可以写为

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}_1)}\rangle, \tag{5.220}$$

其中，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ 是式 (5.190) 中沿连接 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 两点的曲线 $L_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 上的 δ 函数. 很明显，根据式 (5.191) 和式 (5.192)，此表述在电磁规范变换 (5.161) 下是不变的.

同前面一样，我们必须使得关联函数 (5.220) 在涡旋规范变换 (5.162) 下具有明显的不变性. 如同式 (5.203) 中那样，这可以通过加入一个涡旋规范场来实现：

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})\right]}\rangle. \tag{5.221}$$

相关的序参量则为 [请对照式 (5.196)]

$$\tilde{O}\equiv\langle\tilde{O}(\boldsymbol{x})\rangle=\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\delta(\boldsymbol{x};L^x)[\boldsymbol{\nabla}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}')]}\rangle. \tag{5.222}$$

我们看到，与超流的关联函数 (5.187) 不同，此关联函数在连接 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的曲线 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 的形变下并不是不变的. 事实上，如果我们对式 (5.220) 进行相应的磁单极规范变换 (5.195)，我们会看到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(x)}&\rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+[\boldsymbol{\nabla}\times\delta(\boldsymbol{x};\tilde{S})]\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right\}}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left\{\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x};\tilde{S})\right\}},\end{aligned} \tag{5.223}$$

其中，$\tilde{S}$ 为 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 扫过的曲面. 于是，在磁单极规范变换下关联函数 (5.220) 有一个相位的改变

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)\rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x};\tilde{S})}G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1), \tag{5.224}$$

这取决于穿过曲面 $\tilde{S}$ 的磁通. 由于这个原因，我们必须首先移除连接 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的曲线 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 形状选择的任意性. 而 Schwinger[42] 所作的最简单的选择就是选取从 $\boldsymbol{x}_1$ 到 $\boldsymbol{x}_2$ 的直线.

不过，关联函数 (5.221) 在大的 $|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|$ 极限下仍然没有给我们提供出序参量. 为了证实这一点，我们转头来看具有正则表述哈密顿量 (5.166) 的配分函数，并将表达式 (5.221) 代入. 然后我们将场变量由 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ 变为 $\tilde{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}$，利用式 (5.168) 以得到式 (5.169)，并将 $(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2$ 换为 $(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2$，得

$$\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}}+\frac{\tilde{\beta}\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}}{2}\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}\,2}\right].\tag{5.225}$$

对于电磁矢势 $\boldsymbol{A}$，式 (5.225) 是二次型的，于是我们可以将其从相应的配分函数中积掉，从而得到以下哈密顿量：

$$\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathrm{d}^3x\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2+m_A^2\,\tilde{\boldsymbol{a}}^2-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}}+\frac{\tilde{\beta}\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}}{2}\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}\,2}\right].\tag{5.226}$$

利用这一哈密顿量，关联函数 (5.220) 可以通过以下期待值计算而得 [请对比式 (5.209)]：

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\left\langle\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tilde{\beta}m_A^2}\int\mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})^2-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})]\right\}}\right\rangle.\tag{5.227}$$

首先来考察低温相，此时超导体中的涡旋被冻结掉，我们可以将式 (5.225) 中的最后两项忽略掉. 于是 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 场可以从配分函数中积掉，得

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\sim\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\left[\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}2}-(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})\right]}.\tag{5.228}$$

这与式 (5.213) 中超流在高温相中的表达式一样，只是这里的相关质量为超导体迈斯纳质量 m_A 而不是 m_a. 此质量 m_A 使得 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)$ 中 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 间的连线 $\tilde{L}_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}$ 携带能量，从而导致关联函数像式 (5.217) 中那样具有相同类型的大尺度指数衰减行为

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{const}\cdot|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}\underset{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|\mapsto\infty}{\longrightarrow}0.\tag{5.229}$$

这就意味着式 (5.222) 中序参量候选者的值为零：

$$\tilde{\mathcal{O}}=\langle\tilde{O}(\boldsymbol{x})\rangle=0.\tag{5.230}$$

于是 $\tilde{\mathcal{O}}$ 无法表征低温相的有序性.

不过，$\tilde{\mathcal{O}}$ 会不会是一个无序参量呢？为了看清楚这一点，我们需要考察相应的高温相，在此相中涡旋线暴增. 这就表示在哈密顿量 (5.225) 中，我们可以将 $\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}}$ 像一般高斯变量一样积掉，从而给出如下哈密顿量：

$$\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2+m_{\tilde{a}}^2\,\tilde{\boldsymbol{a}}^2\right]-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\right].\tag{5.231}$$

此时如果我们将电磁矢势 $\boldsymbol{A}$ 积掉后，则质量项将由 $m_{\tilde{a}}^2$ 变为 $m_{\tilde{a}}^2+m_A^2$，使得关联函数比式 (5.229) 中的衰减的还快. 因此 $\tilde{O}$ 再次为零，从而无法用来区分这两个不同的相.

2. 序参量的狄拉克候选者

与式 (5.219) 中施温格所作的连接 x_1 与 x_2 之间的直线的选择不同，我们将在式 (5.221) 中选取一个不同的单极子规范场，此规范场与式 (5.221) 中的 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)$ 具有相同的散度 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x})$，但同时还具有一个**纵场**规范 [43~45]：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=0. \tag{5.232}$$

这样的一种选择是存在的. 我们只需简单地取

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\,\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}^2}\,q(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1|}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2|}\right]. \tag{5.233}$$

式 (5.233) 中的单极子规范场就是相应的库仑场，且为一个纵场. 现在式 (5.228) 中的指数简化了，我们于是得到它的极限为

$$G_{\tilde{O}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\sim\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}2}}\sim\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2}\int\mathrm{d}^3x\,q\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}q}=\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}m_A^2/8\pi|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}\xrightarrow[|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|\to\infty]{}1. \tag{5.234}$$

其实，此结果可以直接从能量表达式 (5.226) 中推导出来. 在纵场规范下，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}$ 与纯横场 $\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}$ 是正交的, 因此它是退耦的

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2=(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2+\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}2}, \tag{5.235}$$

这就直接给出了式 (5.234).

式 (5.234) 中非零的大尺度极限正是我们在有序相中所期待的. 这样，我们就有一个期望：通过将 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ 替换为限定在处于 x 处单个单极子上的场 (5.233)，即

$$\boldsymbol{b}_x^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}')\equiv-\boldsymbol{\nabla}'\,\frac{1}{\boldsymbol{\nabla}'^2}\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}, \tag{5.236}$$

式 (5.222) 也许可以给我们提供一个序参量：

$$\tilde{O}=\left\langle\tilde{O}(\boldsymbol{x})\right\rangle=\left\langle\exp\left\{\mathrm{i}\tilde{\theta}(\boldsymbol{x})-\int\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{b}_x^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}')\cdot\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}')\right]\right\}\right\rangle. \tag{5.237}$$

一个重要的问题是在超导体的高温无序相中这个量是否为零 [44, 45]. 然而，很不幸，对此的回答是否定的. 我们之前已经看到，涡旋线仅仅是将式 (5.228) 中质量的平方由 m_A^2 变到 $m_A^2+m_{\tilde{a}}^2$，这并不会改变式 (5.234) 的表达. 因此，相应的关联函数

与之前在式 (5.234) 中的具有同样的大尺度极限行为，说明式 (5.237) 在此种情形下也不为零，从而无法将无序相和有序相区别开来.

关于为什么式 (5.234) 在两个相中都相同的原因其实是很简单的：因为这一方法有赖于式 (5.234) 中横场 $\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}$ 与纵场 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}$ 的退耦，因此它的渐进行为并不会受 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 的质量的改变的影响.

3. 无序参量

判断超导体有序性的唯一方法就是采用无序场论并定义一个相应的无序参量，它的期待值在低温有序相中为零而在高温无序相中不为零. 对于一个超导体，我们已经在式 (5.176) 中给出了它的无序哈密顿量. 当回顾式 (5.183) 时，我们的第一反应也许是考虑从关联函数

$$G_{\tilde{\mathcal{D}}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle\phi(\boldsymbol{x}_2)\phi^*(\boldsymbol{x}_1)\rangle \tag{5.238}$$

的长距离极限中析解出无序参量. 然而，这个并不具有式 (5.178) 中无序哈密顿量 (5.176) 的规范不变性. 我们可以通过插入一个在式 (5.220) 中所用过的同样类型的因子而得到一个不变的表示形式

$$G_{\tilde{\mathcal{D}}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle\phi(\boldsymbol{x}_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}\phi^*(\boldsymbol{x}_1)\rangle, \tag{5.239}$$

其中，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ 仍然是连接 x_1 和 x_2 的曲线 $L_{x_1}^{x_2}$ 上的 δ 函数 (5.190). 此相因子保证了在式 (5.178) 中变换下的规范不变性. 在流体力学极限下，式 (5.239) 变为

$$G_{\tilde{\mathcal{D}}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}_2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x}_1)}\rangle. \tag{5.240}$$

类似于式 (5.221)，这可重新写为

$$G_{\tilde{\mathcal{D}}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})]}\rangle, \tag{5.241}$$

而这就定义出了一个超导体的无序参量 [请对照式 (5.196)]

$$\tilde{\mathcal{D}}\equiv\langle\tilde{D}(\boldsymbol{x})\rangle=\langle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\,\delta(\boldsymbol{x}';L^x)\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}')-\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}')\right]}\rangle, \tag{5.242}$$

其中，曲线 L 将磁通由无穷远导入至 $\boldsymbol{x}$.

现在，我们必须来研究能量

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy},\mathcal{D}}=\int \mathrm{d}^3x\Bigg\{&\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2\\&+\frac{m_a^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\theta-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}-\tilde{\boldsymbol{a}})^2+\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta-\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.243}$$

将此式中的 $\boldsymbol{A}$ 场积掉可使 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 场获得质量，哈密顿量于是变为

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy},\mathcal{D}}=\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2+m_A^2\tilde{\boldsymbol{a}}^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{m_{\tilde{a}}^2}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\theta-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}-\tilde{\boldsymbol{a}})^2+\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta-\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})\right\}, \tag{5.244}$$

其中，$m_{\tilde{a}}$ 为式 (5.172) 中的质量参数，然而它并不像在那个式子中那样与 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 场的质量吻合.

同以前一样，我们引入一个辅助场 $\boldsymbol{b}$ 而将式 (5.244) 中的最后两项写为如下形式：

$$\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2m_{\tilde{a}}^2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2+\mathrm{i}\,\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\theta-\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})\right], \tag{5.245}$$

并进一步变为

$$\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2m_{\tilde{a}}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2+\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}})+\frac{\tilde{\beta}\epsilon_{\mathrm{c}}}{2}\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}2}\right]. \tag{5.246}$$

为了简化接下来的讨论，我们加入了内核能量.

在低温相，超导体中并没有涡旋，但是在它的对偶表述中涡旋却会激增，其中的涡旋密度为 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$，于是我们可将 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 像通常的高斯场变量一样从式 (5.246) 中积掉. 这样就为 $\boldsymbol{a}$ 场提供一个质量项，从而使得哈密顿量 (5.244) 变为

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy},\mathcal{D}'}=\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2+m_A^2\tilde{\boldsymbol{a}}^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2m_{\tilde{a}}^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2+m_a^2\boldsymbol{a}^2\right]+i\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\right\}. \tag{5.247}$$

将 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 场积掉后，我们得到

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy},\mathcal{D}'}=\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2+m_a^2\boldsymbol{a}^2\right]\right\}+\Delta H, \tag{5.248}$$

其中

$$\Delta H=\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2}\int \mathrm{d}^3x\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_A^2}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}. \tag{5.249}$$

如果我们暂时忘掉这一项，我们就可以从式 (5.248) 中的哈密顿量得到关联函数

$$G_{\tilde{D}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\sim\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\beta}m_A^2}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}2}-(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+m_{\tilde{a}}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})\right]}. \tag{5.250}$$

类似于式 (5.213) 中那样，$\boldsymbol{a}$ 的质量使得 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)$ 中的曲线 $L_{x_1}^{x_2}$ 具有与其长度成正比的能量，因此式 (5.241) 中的无序场关联函数将随着距离的增加而趋于零.

这个结果并不会由于式 (5.249) 中那被忽略的项有所改变. 将此项按 $\boldsymbol{\nabla}^2$ 的幂次展开，我们看到它包含对导数的求和

$$\Delta H=\frac{\tilde{\beta}}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}\left[1+\sum_{1=0}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{m_A^2}\right)^n\right]\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a},\tag{5.251}$$

而这只能改变 $\boldsymbol{a}$ 场的色散关系，并不会改变其质量.

在高温相，并不存在上述对偶涡旋，因此 $\boldsymbol{a}$ 场的质量保持为零，于是关联函数由类似于式 (5.210) 的表达式给出：

$$\begin{aligned}G_{\tilde{D}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)&\approx \mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\beta}m_a^2}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}2}-(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})\right]}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\beta}m_a^2}{2}\int \mathrm{d}^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}}.\end{aligned}\tag{5.252}$$

这与式 (5.211) 一样，在大尺度上保持为常数，并且与 $L_{x_1}^{x_2}$ 的形状无关，这就给出了一个非零的无序参量 (5.242). 在这个相中，单极子规范不变性不被破坏.

因此式 (5.242) 可以看作一个表征超导相变的一个好的无序参量.

4. 另一个无序参量

此时，我们注意到式 (5.250) 和式 (5.252) 中的大尺度行为也可以从以下关联函数中得到：

$$G_{\tilde{D}}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\left\langle \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tilde{\beta}m_A^2}\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)^2-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(x)[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(x)]\right\}}\right\rangle,\tag{5.253}$$

其中，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ 中的奇异线 $L_{x_1}^{x_2}$ [参看式 (5.190)] 取连接 x_1 和 x_2 的直线 [如式 (5.227)]. 在低温有序相中矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 具有一个非零的迈斯纳质量 m_A，于是就有与式 (5.250) 一样的大尺度行为. 而在高温无序相，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 是零质量的，于是式 (5.253) 的行为与式 (5.252) 相同.

看起来导致式 (5.253) 中关联函数的哈密顿量同 (5.225) 是一样的，不过这里磁规范场 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})$ 被插在磁场的导数项中，而不是在 $\tilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ 场的导数项中，即

$$\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\frac{\tilde{\beta}}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{m}})^2-\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{a}}\cdot\tilde{\boldsymbol{j}}^{\mathrm{v}}+\frac{\tilde{\beta}\tilde{\epsilon}_{\mathrm{c}}}{2}\tilde{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{v}2}\right].\tag{5.254}$$

与关联函数 (5.253) 相联的无序参量就是如下的期待值：

$$\mathcal{D}=\langle\mathcal{D}(\boldsymbol{x})\rangle=\left\langle \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tilde{\beta}m_A^2}\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_x^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})^2-\boldsymbol{b}_x^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]\right\}}\right\rangle,\tag{5.255}$$

其中

$$\boldsymbol{b}_x^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}; \tilde{L}_x) \tag{5.256}$$

在任何连接 x 和无穷远的直线上奇异.

5.4 超导相变级数与三重临界点

自 1908 年 Kamerlingh Onnes 发现超导电性以来，大多数关于相变的实验数据都被 BCS 理论很好地拟合了出来 (请回看图 5.8). 在临界点附近，BCS 理论可近似为金兹堡–朗道哈密顿量 (5.154)[32]. 金兹堡–朗道序参数场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 的涨落通常是很小的且可以忽略，也即平均场论的结果就能对这些数据给出很好的近似结果. 但是，在相变点的邻域内，这个涨落就变得极其重要了.

5.4.1 涨落区域

金兹堡 [46] 首次给出了平均场论结果如此精确的原因，他发现了一个判定方法，可以用来估算在 T_{c} 附近一个温度范围 ΔT_{G}，在此范围内涨落变得很重要. 严格来讲，他的判定方式对于超导体并不适用，而只可用于具有单一实序参量的系统. 由于超导体具有一个复的序参量，需要有另外一个合适的判定方法，而这个在最近才被发现 [47]. 如果序参量不是一个单一的实参量而是具有 $\mathrm{O}(N)$ 对称性的话，则真实的涨落区域 ΔT_{GK} 证明比金兹堡的估算大 N^2 倍.

在这个修正过的金兹堡区间，涨落会导致比热在相变点 T_{c} 发散，非常类似于在超流氦 λ 相变中所观察到的情形 (图 5.1). 在传统的超导体中这一区间太小了以至于我们无法观测到它 [46, 47]，因此没有观测到这种涨落 [48, 49] 也就不奇怪了. 近年来高温超导的出现才使得情况有了改变，在这些高温超导中 ΔT_{G} 已足够大且可以由实验观测到 [50, 51].

5.4.2 一级相变还是二级相变

1972 年，Halperin 等 [52] 在他们的一个理论研究文章中预测超导相变应该是一级相变. 在此文章发表后，关于超导相变的级数的问题就变得很有争议. 他们论述的方法是将重整化群 [53] 的方法应用于和式 (5.151) 中金兹堡–朗道哈密顿量相联系的 $4-\epsilon$ 维系统的配分函数

$$Z_{\mathrm{GL}} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \int \mathcal{D}\boldsymbol{A}\, \Phi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}] \mathrm{e}^{-\tilde{\beta} H_{\mathrm{GL}}[\psi, \psi^*, \boldsymbol{A}]}. \tag{5.257}$$

这里关于一级相变的技术性指标就是耦合常数 e 和 g 的重整化群流 (renormalization group flow)[15] 中不存在红外稳定不动点. 而所有实验观测都报称是二级相变这样一个事实则被解释为是由于涨落区间 ΔT_{GK} 太小以至于在实验中无法探测到.

自此之后，有大量的工作 [55] 通过高阶圈图计算或者对发散的微扰展开采取不同的再求和来试图寻找到一个红外稳定不动点，然而鲜有成功. 直到上述文章发表 10 年后，这个争议才由本书作者加以解决 [56]，他证明了超导体可以兼具一级相变**以及**二级相变，这两个相变由一个**三重临界点**隔开，此结果已在最近由蒙特卡罗数值模拟结果所证实 [57].

随着现代高温超导材料的出现，实验状况和境遇已大大改善. 现在强涨落的温度区间已经宽到足以观测超出平均场近似的临界现象. 一些实验探测到了属于 XY 普适类的临界点 [50]. 另外，最近似乎有迹象表明还存在一个与所谓的电荷稳定点 [51] 相关的临界现象. 今后的实验中，探索和理解临界涨落的精确特性将是一个十分重要的课题.

式 (5.151) 中的金兹堡–朗道哈密顿量是我们理论探讨的一个出发点. 它包含有描述库珀对的场变量 $\psi(\boldsymbol{x})$ 以及矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$. 在临界温度附近但在狭窄的强涨落区域 $\Delta T_{\rm GK}$ 以外，式 (5.151) 中的能量很好地描述了超导的二级相变. 当 τ 下降到小于零时，该相变就发生了，且库珀对场 $\psi(\boldsymbol{x})=\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}$ 获得了一个非零的期待值 $\rho_0=\sqrt{-\tau/g}$. 而超导相的特性也可以很好地由式 (5.156) 中的能量来近似描述. 式 (5.156) 中的迈斯纳–希格斯质量项导致了磁场在超导体中的有限穿透深度 $\lambda=1/m_A=1/\rho_0 q$.

将哈密顿量 (5.154) 在流体力学极限 (5.156) 附近按涨落 $\delta\rho\equiv\tilde{\rho}-\rho_0$ 的幂律展开，我们就发现 ρ 涨落具有一个二次型的能量

$$H_{\delta\rho}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[(\boldsymbol{\nabla}\delta\rho)^2-2\tau(\delta\rho)^2\right], \tag{5.258}$$

表明它们具有一个有限的**相干长度** $\xi=1/\sqrt{-2\tau}$.

λ 和 ξ 这两个长度尺度的比值

$$\kappa\equiv\lambda/\sqrt{2}\xi \tag{5.259}$$

就是所说的**金兹堡参数**，它的平均场结果为 $\kappa_{\rm MF}\equiv\sqrt{g/q^2}$. 表达式中由于历史的原因 [58] 包含有一个因子 $\sqrt{2}$. 这个参数的值对于第一类超导体比较小，而在第二类超导体中则比较大. 在平均场的水平上，这二者得分界线为 $\kappa=1/\sqrt{2}$.

5.4.3 具有涡旋线的超导体的配分函数

新的高温超导材料中较高的操作温度使得场的涨落变得十分重要. 这些涨落可以通过如下方法加以考虑：或通过泛函积分来计算配分函数以及关联函数 [请对照式 (5.160)]，或在对场进行式 (5.153) 中的分解后通过

$$Z_{\rm GL}=\int\mathcal{D}\tilde{\rho}\,\tilde{\rho}\int\mathcal{D}\boldsymbol{A}\,\Phi_{\rm T}[\boldsymbol{A}]\sum_{\{S\}}\Phi[\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\rm V}]\int\mathcal{D}\tilde{\theta}\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}H_{\rm GL}[\tilde{\rho},\tilde{\theta},\boldsymbol{A}]}. \tag{5.260}$$

这可用式 (5.160) 中的流体力学表述来近似. 从现在起我们将采用温度自然单位，即 $k_{\mathrm{B}}T=1$，并且为了简洁起见，省略掉 $\tilde{\rho}$、$\tilde{\theta}$ 等所有变量上的波浪符，这样，我们就可将式 (5.160) 重新写为

$$Z_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}=\int\mathcal{D}\boldsymbol{A}\,\varPhi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\sum_{\{S\}}\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}]\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\theta\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}H_{\mathrm{SC}}^{\mathrm{hy}}}. \tag{5.261}$$

我们现在对超导相变的级数的解释中所碰到的问题作一个简要的概述，这样做很有帮助. 认为是一级相变的最简单的论述是基于对配对场 ρ 取平均场近似并且忽略掉涡旋涨落的效应. 于是，我们可在式 (5.154) 哈密顿量中设 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}\equiv 0$ 并考虑

$$H_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}}\approx\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\rho^2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\theta-q\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}\right)^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2+V(\rho)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{\rho^2q^2}{2}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}^2\right], \tag{5.262}$$

其中，ρ、θ 和 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}$ 上的波浪符已经被省略掉了. 式 (5.262) 的右边只是一个近似，其原因如下：我们已经将 $\boldsymbol{A}$ 分解为纵场 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}$ 和横场 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}$ 部分，它们的定义由式 (5.135) 给出. 如果 ρ 是个常数而不是一个场的话，则此分解会严格给出式 (5.262) 的结果. 然而，由于对 $\boldsymbol{x}$ 的依赖性，于是会有一个正比于 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的梯度的修正项，但如果假定 $\rho(\boldsymbol{x})$ 场足够的平滑，则此项可以忽略 [59].

做完这些近似后，我们现在可以将此高斯型的相位涨落 $\theta(\boldsymbol{x})$ 从配分函数 (5.257) 中积掉，于是我们有

$$Z_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}'}=\mathrm{Det}^{-1/2}[-\boldsymbol{\nabla}^2]\int\mathcal{D}\rho\,\mathcal{D}\boldsymbol{A}\,\varPhi_{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}]\,\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}H_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}'}}, \tag{5.263}$$

相应的哈密顿量为

$$H_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}'}=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2+V(\rho)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{\rho^2q^2}{2}\boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}^2\right]. \tag{5.264}$$

矢势的涨落也是高斯型的，因此可以从式 (5.263) 中积掉，得

$$\bar{Z}_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}'}=\mathrm{Det}^{-1/2}[-\boldsymbol{\nabla}^2]\,\mathrm{Det}^{-1}[-\boldsymbol{\nabla}^2+\rho^2q^2]\int\mathcal{D}\rho\,\mathrm{e}^{-\tilde{\beta}\bar{H}_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}'}}, \tag{5.265}$$

其中

$$H_{\mathrm{GL}}^{\mathrm{app}'}=\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2+V(\rho)\right]. \tag{5.266}$$

5.4.4　一级相变情形

再次假定 ρ 是平滑的，则泛函行列式 $\mathrm{Det}^{-1}[-\boldsymbol{\nabla}^2+\rho^2q^2]$ 可以通过托马斯–费米近似 [60] 计算而得

$$\mathrm{Det}^{-1}[-\boldsymbol{\nabla}^2+\rho^2q^2]=\mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}\log[-\boldsymbol{\nabla}^2+\rho^2q^2]}\approx\mathrm{e}^{-V\int[\mathrm{d}^3k/(2\pi)^3](k^2+\rho^2q^2)}=\mathrm{e}^{\rho^3q^3/6\pi}. \quad (5.267)$$

从现在起，我们将选取能量的自然单位，即能量以 $k_\mathrm{B}T$ 为单位计量. 这样，我们就可在玻尔兹曼因子 (5.263) 和 (5.265) 中设 $\tilde{\beta}=1$. 式 (5.267) 中的结果表明 $\boldsymbol{A}$ 场的涨落为式 (5.155) 中的势函数 $V(\rho)$ 提供了一个三次项，将之变为

$$\bar{V}(\rho)=\frac{\tau}{2}\rho^2+\frac{g}{4}\rho^4-\frac{c}{3}\rho^3,\qquad c\equiv\frac{q^3}{2\pi}. \quad (5.268)$$

对于 $\tau<c^2/4g$ 的情形，该三次项导致了矢势 $\tilde{V}(\rho)$ 在

$$\tilde{\rho}_0=\frac{c}{2g}\left(1+\sqrt{1-\frac{4\tau g}{c^2}}\right) \quad (5.269)$$

处出现第二个极小值，如图 5.9 所示.

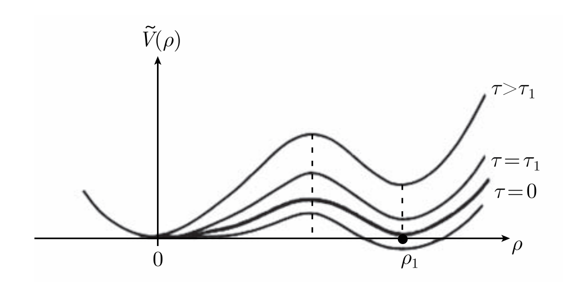


图 5.9　包含序参量 ρ 立方项的势能图. 在 ρ_1 会出现一个新的极小点，这就导致了在 $\tau=\tau_1$ 时有一个一级相变

当 τ 小于

$$\tau_1=2c^2/9g \quad (5.270)$$

时，这个新的极小值将**低于** 处于原点的极小值，于是序参量将由 $\rho=0$ 在相变点跃变为

$$\rho_1=2c/3g. \quad (5.271)$$

在此相变点上，ρ 场的相干长度 $\xi=1/\sqrt{\tau+3g\rho^2-2c\rho}$ 为一个有限值

$$\xi_1=\frac{3}{c}\sqrt{\frac{g}{2}}, \quad (5.272)$$

而它恰好与 $\rho=0$ 附近涨落的相干长度一致. 相变发生在有限相干长度 $\xi=\xi_1\neq 0$ 这一事实表明此相变为一级相变. 而在二级相变中，当 T 趋近于 $T_{\rm c}$ 时 ξ 应趋于无穷大.

这个结论只有当 ρ_0 的跃变足够大时才可靠. 对于一个小的跃变，对于能量密度 (5.268) 的平均场讨论将变得不可信. 当 ρ_0 足够小时，相变将为二级. 相变级数的改变是由于在式 (5.264) 中我们忽略了涡旋涨落. 我们必须在计算配分函数 (5.263) 时加入对涡旋规范场 $\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(\boldsymbol{x})$ 的求和，相应的哈密顿量与式 (5.154) 相等，只是去掉了波浪符：

$$H_{\rm GL}=\int {\rm d}^3x\left[\frac{\rho^2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\theta-\boldsymbol{\theta}^{\rm v}-q\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2+V(\rho)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)^2\right]. \tag{5.273}$$

如果我们将 θ 场积掉，并且假定 ρ 场是平滑的，我们就得到了扩展后的配分函数 (5.263)，多出一个关于 $\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(\boldsymbol{x})$ 的求和，并且相应的哈密顿量为

$$H_{\rm GL}^{\rm app'}=\int {\rm d}^3x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2+V(\rho)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)^2+\frac{\rho^2}{2}(q\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\theta}^{\rm v})_{\rm T}^2\right]. \tag{5.274}$$

通过如下定义涡旋线的配分函数：

$$Z_{\boldsymbol{\theta}^{\rm v},\boldsymbol{A}}[\rho]\equiv\int\mathcal{D}\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}\mathcal{D}\boldsymbol{A}_{\rm T}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int{\rm d}^3x\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2+\frac{\rho^2}{2}(q\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\theta}^{\rm v})_{\rm T}^2\right]\right\}, \tag{5.275}$$

其中，包含光滑 $\rho(\boldsymbol{x})$ 涨落的 $\boldsymbol{A}$ 场，我们就可以来单独研究涡旋的涨落. 式 (5.275) 中涡旋规范场的纵向部分 $\boldsymbol{\theta}^{\rm v}$ 由式 (5.135) 定义. 我们已经将式 (5.36) 中定义的带有规范固定的跃变曲面求和 $\sum_{\{S\}}\varPhi[\boldsymbol{\theta}^{\rm v}]$ 缩写为 $\int\mathcal{D}\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}$. 另外，我们已将矢势固定为纵场并用积分符号 $\mathcal{D}\boldsymbol{A}_{\rm T}$ 表明了这一点.

5.4.5　二级相变的涡旋线起因

我们看到，对于平滑的 ρ 场，如果 ρ 的平均值低于一个临界值 $\rho_{\rm c}$ 的话，上面这一部分配分函数会给出一个 XY 模型类型的二级相变. 为了看清这一点，我们将 $\boldsymbol{A}$ 场积掉，得

$$Z_{\boldsymbol{\theta}^{\rm v},\boldsymbol{A}}[\rho]\approx\exp\left[\int{\rm d}^3x\frac{q^3\rho^3}{6\pi}\right]\int\mathcal{D}\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}\exp\left[\frac{\rho^2}{2}\int{\rm d}^3x\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v2}-\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}\,\frac{\rho^2q^2}{-\boldsymbol{\nabla}^2+\rho^2q^2}\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}\right)\right]. \tag{5.276}$$

此式第一个因子再次给出势函数 (5.268) 中的三次项. 第二个因子描述闭合涡旋线. 指数上的积分可以重新写为

$$\frac{\rho^2}{2}\int{\rm d}^3x\,\left(\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}\,\frac{-\boldsymbol{\nabla}^2}{-\boldsymbol{\nabla}^2+\rho^2q^2}\,\boldsymbol{\theta}_{\rm T}^{\rm v}\right). \tag{5.277}$$

对此进行分部积分，并利用恒等关系

$$\int \mathrm{d}^3x\, \nabla_i \boldsymbol{A}\, \nabla_i \boldsymbol{B} = \int \mathrm{d}^3x\, [(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B})], \tag{5.278}$$

同时考虑到横场特性 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{v}} = 0$ 以及式 (5.31) 中的旋度关系 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{v}} = \boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$，当不考虑前面的系数时，式 (5.276) 中的配分函数具有如下形式：

$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}},\boldsymbol{A}}[\rho] \approx \int \mathcal{D}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{v}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2} \int \mathrm{d}^3x \left(\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}} \frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2 + \rho^2 q^2} \boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}\right)\right]. \tag{5.279}$$

这就是震荡的闭合涡旋线巨正则系综的配分函数. 涡旋线之间的相互作用为汤川型的，其有限作用程等于穿透深度 $\lambda = 1/\rho q$.

大家都熟知如何利用能量密度的极值对单个涡旋直线来求金兹堡–朗道理论中的配对场和磁场 [48]. 在外磁场中，系统存在诸如三角晶格或其他涡旋线的规则排列，即涡旋晶格. 在存在杂质的情形下，这些涡旋晶格会变为涡旋玻璃. 关于这些相位以及相应相变的研究是当前一个十分活跃的研究领域 [61].

在每个涡旋的内核中，配对场 ρ 将在 ξ 这样一个距离上趋于零. 如果我们在配分函数 (5.279) 中对任意形状的涡旋线构成的巨正则系综加以求和的话，则 ρ 对空间的依赖性会使计算相当复杂. 不过，我们可以通过以下近似避免此种困难，在此近似中系统处于一个简单立方晶格上，该晶格的晶格常数为 $a = \alpha\xi$ 且 α 的数量级为一，并且 ρ 具有一个由式 (5.269) 给定的**固定**值 $\rho = \tilde{\rho}_0$. 于是我们可近似地将式 (5.279) 这部分配分函数替换为

$$\bar{Z}_{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}},\boldsymbol{A}}[\tilde{\rho}_0] \approx \sum_{\{\boldsymbol{l};\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}=0\}} \exp\left[-\frac{4\pi^2 \tilde{\rho}_0^2 a}{2} \sum_{x} \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) v_{\tilde{\rho}_0 q}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}')\right]. \tag{5.280}$$

该求和遍历式 (5.279) 中涡旋密度 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{v}}$ 的离散形式. 当回顾式 (5.35) 和式 (5.49) 时，我们就发现这些离散形式等于 2π 乘以整数取值的矢量场 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) = (l_1(\boldsymbol{x}), l_2(\boldsymbol{x}), l_3(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{\nabla}$ 表示式 (5.40) 中的晶格导数. 由于它们是整数矢量场 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = (n_1(\boldsymbol{x}), n_2(\boldsymbol{x}), n_3(\boldsymbol{x}))$ 的旋度，它们自然满足 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) = 0$. 这一条件就使得式 (5.280) 中对 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})$-构型的求和被限制在对所有非自回溯整数取值的闭合回路的求和上. 式 (5.275) 中的配分函数就完全具有了之前在式 (5.55) 中讨论过的形式，并且 $\rho_0 q$ 就起到了式 (5.55) 中汤川质量 m 的作用. 因此，晶格配分函数 (5.280) 就给出一个二级相变. 图 5.7 中画出了相应的相变温度.

5.4.6 三重临界点

我们现在来确定三重临界点的位置，超导相变由一级变为二级正是在此点分界的. 考虑超导体处于低温相，此时序参量的大小位于图 5.9 中势函数 $\tilde{V}(\rho)$ 的右边

的极值处. 升温时，此极小值将向原点靠拢. 式 (5.279) 中玻尔兹曼因子中 ρ^2 的减小会增加涡旋线的数目并增大它们的长度. 如果在图 5.9 中右手极值到达与左手极值相同高度之前，涡旋凝聚就已达到临界值的话，超导体将经历一个 XY 模型类型的二级相变. 而如果两个极值先达到等高度的话，则序参量 ρ 会直接跃变为零从而系统经历一个一级相变. 对于大的 q，即对于小的平均长金兹堡参量 $\kappa_{\rm MF}=\sqrt{g/q^2}$ [参看式 (5.259)]，在此处有一个大的跃变，则系统一定会发生一级相变. 反之，闭合涡旋线会在序参量跃变为零之前发生凝聚. 以上的分析就使得我们可以去确定在哪个 $\kappa_{\rm MF}$ 值处相变级数会改变.

比较式 (5.280) 和汤川环线气体的配分函数 (5.109)，我们知道，当 [对照式 (5.111)]

$$4\pi^2 a\tilde{\rho}_0^2 v_{\tilde{\rho}_0 q}(\mathbf{0})\approx T_{\rm c}\approx 3 \tag{5.281}$$

时涡旋将发生凝聚. 利用式 (5.114) 中的解析近似，我们可以将此写为

$$4\pi^2 a v_0(\mathbf{0})\frac{\tilde{\rho}_0^2}{\sigma\, a^2\tilde{\rho}_0^2 q^2/6+1}\approx T_{\rm c}\approx 3, \tag{5.282}$$

或

$$\frac{\tilde{\rho}_0^2 a}{\sigma\, a^2\tilde{\rho}_0^2 q^2/6+1}\approx\frac{r}{3}, \tag{5.283}$$

其中，$r=9/4\pi^2 v_0(\mathbf{0})\equiv 0.90$. 这个式子的解为

$$\tilde{\rho}_0\approx\frac{1}{\sqrt{3a}}\sqrt{\frac{r}{1-\sigma raq^2/18}}. \tag{5.284}$$

在此将 a 替换为式 (5.272) 中的 $\alpha\xi_1=\alpha(3/c)\sqrt{g/2}$，并将 $\tilde{\rho}_0$ 替换为式 (5.271) 中的 $\rho_1=2c/3g$，并进一步将式 (5.268) 中的 $c=q^3/2\pi$ 代入，我们就得到了平均场金兹堡参量 $\kappa_{\rm MF}=\sqrt{g/q^2}$ 所满足的方程 [回顾 (5.259)]：

$$\kappa_{\rm MF}^3+\alpha^2\sigma\frac{\kappa_{\rm MF}}{3}-\frac{\sqrt{2}\alpha}{\pi r}=0. \tag{5.285}$$

对于近似 (5.114) 的最佳值 $\sigma\approx 1.6$ ，参量 $r\approx 0.9$，且可大致估计 $\alpha\approx 1$，上述方程的结果就给出了三重临界值

$$\kappa_{\rm MF}^{\rm tric}\approx 0.82/\sqrt{2}. \tag{5.286}$$

不管上述近似有多么粗略，此结果却非常接近文献 [27] 中由对偶理论所得的结果

$$\kappa_{\rm MF}^{\rm tric}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\sqrt{1-\frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\approx\frac{0.80}{\sqrt{2}}. \tag{5.287}$$

不过，式 (5.286) 中的近似具有三个不确定性. 第一，就是包含 $\alpha\approx 1$ 的有效晶格常数的取值 $a=\alpha\xi$；第二，则是忽略了相关的 ρ 对 x 的依赖性以及它的涨落；第三，则是 XY 类型相变临界点的位置以及由此而得的式 (5.115).

5.4.7　无序场论

在无序场论 (5.177) 中，我们很容易证明，随着式 (5.259) 中所定义的金兹堡参量 κ 的大小的不同，超导体可以发生一级或者二级相变. 在我们开始证明之前，我们先来将无序场论改写成更加方便的形式. 同以前一样，我们将复无序场 ϕ 分解为 $\phi=\rho e^{i\theta}$. 在配分函数 (5.179) 中，这会将泛函积分测度由 $\int\mathcal{D}\phi\int\mathcal{D}\phi^*$ 变为 $\int\mathcal{D}\rho\rho\int\mathcal{D}\theta$. 现在，我们通过利用规范变换 (5.178) 将场的相位 θ 吸收到 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 中将规范固定下来. 这样，式 (5.177) 中的哈密顿量就被改写成

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\rm SC}^{\rm hy}\sim\int d^3x\left[\frac{1}{2\tilde{\beta}m_A^2}[(\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{a}})^2+m_A^2\tilde{\boldsymbol{a}}_{\rm T}^2]+\frac{\rho^2}{2}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{\rm T}^2+\tilde{\boldsymbol{a}}_{\rm L}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2+\frac{\tau}{2}\rho^2+\frac{g}{4}\rho^4\right], \tag{5.288}$$

其中，我们再次假定 ρ 场是平滑的，并将 $\rho^2\tilde{\boldsymbol{a}}^2$ 分解为 $\rho^2\tilde{\boldsymbol{a}}_{\rm T}^2+\rho^2\tilde{\boldsymbol{a}}_{\rm L}^2$. 现在式 (5.179) 中的配分函数变为

$$Z_{\rm SC}^{\rm dual}=\int\mathcal{D}\rho\rho\int\mathcal{D}\tilde{\boldsymbol{a}}e^{-\tilde{\beta}\tilde{H}_{\rm SC}^{\rm hy}}. \tag{5.289}$$

我们可以将 $\tilde{\boldsymbol{a}}_{\rm L}$ 积掉，就得到一个因子 ${\rm Det}[\rho^2]^{-1/2}$，这样就将路径积分测度$\mathcal{D}\rho\rho$ 中的因子 ρ 去掉了. 于是就给出如下的配分函数表达式：

$$Z_{\rm SC}^{\rm dual}=\int\mathcal{D}\rho\,{\rm Det}[-\boldsymbol{\nabla}^2+m_A^2(1+\tilde{\beta}\rho^2)]e^{-\tilde{\beta}\tilde{H}_{\rm SC}^{\rm hy}}, \tag{5.290}$$

其中

$$\tilde{\beta}\tilde{H}_{\rm SC}^{\rm hy}=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2+\frac{\tau}{2}\rho^2+\frac{g}{4}\rho^4\right]+{\rm Tr}\log[-\boldsymbol{\nabla}^2+m_A^2(1+\tilde{\beta}\rho^2)]\,. \tag{5.291}$$

在超导相中，系统只存在很少的涡旋，涡旋线的无序场 ρ 将围绕零值震荡. 在此相中，我们可以将 Tracelog 展开成 ρ^2 的幂级数. 展开式的第一项正比于 ρ^2，这将对式 (5.291) 中哈密顿量中的 τ 有所修正，对应着临界温度的一个偏移.

展开式第二项可以近似地写为

$$-\tilde{\beta}^2m_A^4\int d^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2+m_A^2)^2}\rho^4\propto-m_A^3\int d^3x\,\rho^4. \tag{5.292}$$

此项将**降低**哈密顿量 (5.291) 中的相互作用项 $(g/4)\rho^4$. m_A 的升高对应着超导体内穿透深度的减小，即对应着材料偏向第一类超导体形态. 当 m_A 达到某个更大的值时，ρ^4 项将消失，于是无序场论需要一个 ρ^6 项来稳定涡旋涨落. 在此种材料中，超导相变就由一级转向了二级.

参考文献 [56] 中运用更加定量的形式指出了三重临界点的存在并指明了它位于式 (5.287) 中所给的金兹堡参量 $\kappa\equiv g/q^2$ 相应的取值处. 这与最近文献 [57] 中所给出的蒙特卡罗模拟结果 $(0.76\pm0.04)/\sqrt{2}$ 吻合得很好.

5.5　涡 旋 晶 格

式 (5.27) 所给出的模型作用量只在长波极限下才能正确描述 ^{4}He 超流中的差能. 中子散射数据给出的能谱为 $\omega = \epsilon(\boldsymbol{k})$，见图 5.2.

为了对此加以解释，能量须取下述形式：

$$H_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{\nabla}\,\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})\frac{\epsilon^2(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})}{-\boldsymbol{\nabla}^2}(\boldsymbol{\nabla}\,\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}). \tag{5.293}$$

$2\mathrm{r}\text{Å}^{-1}$ 附近的**旋子的峰**会导致相反的涡旋线元在相应距离上的相互排斥. 如果对一个 ^{4}He 超流层进行 ^{3}He 掺杂，则涡旋内核能量将会降低，相应的逸度 (fugacity) y 以及平均涡旋数将增加. 当涡旋的平均空间间隔足够大时，就会形成涡旋晶格. 在此情形下，当超流从零温过渡到正常态时，系统将经历三个相变. 首先是涡旋晶格的凝聚过程，然后这个涡旋晶格熔解为由涡旋–反涡旋束缚对构成的流体，最后系统由于这些涡旋对裂解而经历 Kosterlitz-Thouless 型的相变. 后两个相变可以在实验中明显地观察到 (图 5.10).

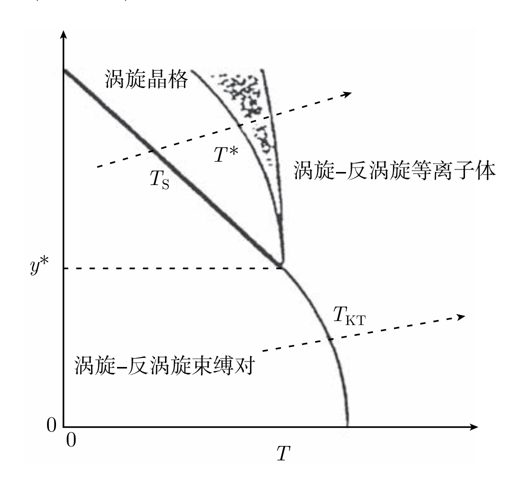


图 5.10　二维 ^{4}He 超流层的相图. 在高逸散能 (fugacity) $y > y^*$ 的情形，温度的增加将首先使涡旋凝聚为一个涡旋晶格. 而后会通过一个熔解相变而进入一个新的相，这个相具有一个 Kosterlitz-Thouless 涡旋解绑相变 (参考文献 [62])

附　　录

5A　超流中的单个涡旋

通过对式 (5.6) 中的金兹堡–朗道哈密顿量取极值，我们现在来推导单个涡旋的一些性质. 为了简单起见，我们将只关注直涡旋线. 这样的线其实就是下述场方

程的一个圆柱解

$$-\boldsymbol{\nabla}^2\phi+\tau\phi+\lambda|\phi|^2\phi=0, \tag{5A.1}$$

该方程由对能量 (5.6) 取极值而得.

如式 (5.10) 中所示那样，我们将 ϕ 按极坐标分量分解为 $\phi(\boldsymbol{x})=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$，并暂时忽略掉涡旋规范场，则上述方程的实部和虚部分别为

$$\left[-\boldsymbol{\nabla}^2+(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2+\tau+\lambda\rho^2\right]\rho=0 \tag{5A.2}$$

和

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})=0,\quad \boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})\equiv\rho^2\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})=0. \tag{5A.3}$$

后一个方程给出了超流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$ 的守恒性.

这个流守恒可以通过一个纯环流来加以保证，在此环流中 ρ 只依赖于到柱坐标对称轴的距离，而相位 θ 则为空间方位角的整数倍 $\theta=n\arctan(x_2/x_1)$. 于是 (5A.2) 就简化为径向微分方程

$$-\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r-\frac{n^2}{2}\right)\rho+\lambda(\rho^2-\rho_0^2)\rho=0, \tag{5A.4}$$

其中，$\rho_0=\sqrt{-\tau/\lambda}=\sqrt{(1-T/T_{\mathrm{c}})/\lambda}$ [请对比式 (5.7) 和式 (5.8)].

为了求解这一方程，采用约化的参量 $\bar{r}$ 和 $\bar{\rho}$ 会比较合适，在这些约化参量中我们以相干长度 [参看式 (5.14)]

$$\xi=\xi_0\frac{1}{\sqrt{2(1-T/T_{\mathrm{c}})}} \tag{5A.5}$$

为单位来量度距离 r，而以 ρ_0 为单位来量度序参量 ρ 的大小，即我们引入

$$\bar{x}=x/\xi,\quad \bar{r}=r/\xi \tag{5A.6}$$

$$\bar{\rho}=\rho/\rho_0. \tag{5A.7}$$

于是式 (5A.4) 取如下形式:

$$\left[-\left(\partial_{\bar{r}}^2+\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}-\frac{n^2}{\bar{r}^2}\right)+(\bar{\rho}^2-1)\right]\bar{\rho}(\bar{r})=0. \tag{5A.8}$$

对此乘以一个位相因子

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\arctan(x_2/x_1)}, \tag{5A.9}$$

我们就发现复场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 具有如下小 $|x|$ 行为

$$\phi(\boldsymbol{x}) \propto \bar{r}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n \arctan(x_2/x_1)} = (x_1 + \mathrm{i}x_2)^n, \tag{5A.10}$$

这对应着 $\phi(\boldsymbol{x})$ 的 n 阶零点.

对于大的 $\bar{r} \gg 1$，$\bar{\rho}(\bar{r})$ 趋近于渐进值 $\bar{\rho} = 1$. 其实，方程 (5A.8) 可以通过下述大 $\bar{r}$ 展开来加以求解

$$\bar{\rho}_n(\bar{r}) = 1 - \frac{n^2}{2\bar{r}^2} - \left(n^2 + \frac{1}{8}n^4\right)\frac{1}{\bar{r}^4} - \left(8 + 2n^2 + \frac{1}{16}n^4\right)\frac{n}{\bar{r}^6} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{r}^8}\right). \tag{5A.11}$$

对此微分方程进行内向数值积分，我们就得到了如图 5A.1 所示的结果.

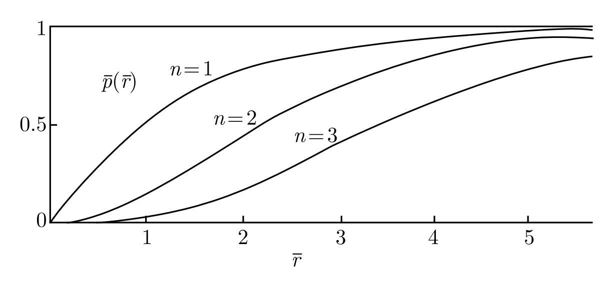


图 5A.1　围绕强度为 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 的涡旋线的序参量 $\bar{\rho} = |\phi|/|\phi_0|$ 与约化距离 $\bar{r} = r/\xi$ 的函数关系，其中 r 为距轴心的距离，而 ξ 为复原长度 (healing length)

现在我们来考察这些涡旋线的能量. 相应的计算可以通过以下尺度变换加以简化：如果 $\phi(\boldsymbol{x})$ 是微分方程 (5A.1) 的解，则缩放后的解

$$\phi_\delta(\boldsymbol{x}) \equiv \mathrm{e}^{\delta} \cdot \phi(\boldsymbol{x}) \tag{5A.12}$$

必须在 $\delta = 0$ 时可使能量取极值. 将式 (5A.12) 插入式 (5.6) 中，我们计算得

$$E = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[\mathrm{e}^{2\delta}|\nabla\phi|^2 + \mathrm{e}^{2\delta}\tau|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{4\delta}|\phi|^4\right]. \tag{5A.13}$$

设此能量对 δ 的导数在 $\delta = 0$ 为零，得

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[|\nabla\phi|^2 + \tau|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4\right] = 0. \tag{5A.14}$$

在 $\delta = 0$ 时将此式从式 (5A.13) 中减掉，我们就发现该场方程的解的能量十分简单地由下式给出：

$$E = -\frac{\lambda}{4}\int \mathrm{d}^3x|\phi|^4. \tag{5A.15}$$

此能量大部分源于 $\phi \to \phi_0 = \rho_0 = \sqrt{-\tau/\lambda}$ 的渐进区域. 将此代入式 (5A.16) 就给出了凝聚能 (5.16)

$$E_{\rm c} = -V\frac{\lambda}{4}\rho_0^4 = -Vf_{\rm c}, \quad f_{\rm c} = \frac{\tau^2}{4\lambda}. \tag{5A.16}$$

将此从式 (5A.16) 中减掉，我们就得到了由于涡旋的存在而引发的能量

$$E_{\rm v} = -\frac{\lambda}{4}\int {\rm d}^3x\,(|\phi|^4 - |\phi_0|^4). \tag{5A.17}$$

利用式 (5A.6) 和式 (5A.7) 引入的自然单位，这可被化简为

$$E_{\rm v} = -f_{\rm c}\xi^3\int {\rm d}^3\bar{x}[1-\bar{\rho}^4(\boldsymbol{x})]. \tag{5A.18}$$

将此变换到柱坐标 $\bar{r}$、θ、z 中，对于一个沿 z 方向约化长度为 $\bar{L}$ 的线，该积分化为

$$2\pi\bar{L}\int_0^\infty {\rm d}\bar{r}\,\bar{r}\,[1-\bar{\rho}^4(\bar{r})]. \tag{5A.19}$$

在将图 5.11 所绘 $\bar{\rho}(\bar{r})$ 的数值结果代入前，我们注意到由于被积函数中存在因子 $\bar{r}$，这个增加的能量主要源于大 $\bar{r}$ 区域，即远离该线的区域. 事实上，如果我们将渐进行为式 (5A.11) 中的首项代入的话，积分变为

$$4\pi n^2\bar{L}\int^\infty {\rm d}\bar{r}/\bar{r}, \tag{5A.20}$$

它将随着 $\bar{r}$ 的增大而呈对数发散. 一个直接的结论是单个涡旋线只有在有限容器内才能具有有限能量. 如果该容器为一个半径为 R 的圆柱体，则该积分有限且为 $4\pi n^2\bar{L}\log(R/\xi)$. 在一个无限大系统中，直的涡旋线只能成对出现，且这对涡旋线环流的方向相反.

现在来考虑小 $\bar{r}$ 的行为. 由式 (5A.8) 我们看到，在原点附近 $\bar{\rho}(\bar{r})$ 与 $\bar{r}^n$ 行为相近. 因此对于 $1-\bar{\rho}^4$ 在一个截面半径为 $\bar{r}$ 的细圆柱上的积分，即在此细圆柱内的能量将按 $\bar{r}^2$ 增大. 当增大 $\bar{r}$ 时，这个增长率将快速减弱并最终归于渐进增长率 $4\pi n^2\bar{L}\times\log(r/\xi)$，其中 ξ 为相干长度. 对于此非渐进行为的一个合理的考虑将会对上述渐进能量给出一个有限的修正. 对于半径为 R 的系统，式 (5A.19) 中的积分就变为 $4\pi n^2\bar{L}[\log(R/\xi)+c]$. 对微分方程 (5A.8) 和积分 (5A.19) 的精确的数值演算结果显示，对于最低阶涡旋，c 的值为

$$c = 0.385. \tag{5A.21}$$

因此单位长度上涡旋的能量为

$$\frac{E_{\rm v}}{L} \approx f_{\rm c}\xi^2 4\pi n^2[\log(R/\xi)+0.385]. \tag{5A.22}$$

这一结果还可以如下获得：将被积函数 $\bar{r}[1-\bar{\rho}^4(\bar{r})]$ 用它的渐进形式 $2n^2/\bar{r}$ 替换掉，并对它从

$$r_c = \xi \mathrm{e}^{-c} \tag{5A.23}$$

积到 R. r_c 称为涡旋线的**内核半径**.

此能量的对数型发散具有一个很简单的物理含义. 为了看清这一点，我们利用原始表达 (5.6) 来再一次计算该能量，而不借助于式 (5A.14) 中的性质. 对于柱坐标解，它可写为

$$\frac{E_{\mathrm{v}}}{L} = f_{\mathrm{c}}\xi^2\, 4\pi \int \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \left\{ (\partial_{\bar{r}}\bar{\rho})^2 + \frac{1}{2}(1-\bar{\rho}^2)^2 + \frac{n^2}{\bar{r}^2}\bar{\rho}^2 \right\}. \tag{5A.24}$$

前两项很快就收敛了. 因此远区能量完全包含在最后一项中

$$\frac{n^2}{\bar{r}^2}\bar{\rho}^2 \approx \frac{n^2}{\bar{r}^2}. \tag{5A.25}$$

此能量为围绕涡旋线的凝聚体相位 $\theta = n\tan^{-1}(x_2/x_1)$ 角行为的直接结果. 事实上，式 (5A.26) 中的这项完完全全是来源于差能中的**方位角部分** $(1/2)\rho^2(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2$，即描述**南部–戈德斯通模**的项.

由相位的梯度所给出的能量的主导性可以通过一个不同的并且更物理的方式来描述. 在式 (5A.3) 中我们已经看到 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}) = \rho^2\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})$ 为超流体的流密度，而且我们可以定义梯度 $\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})$ 为超流的速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$，在物理单位中，它表示为 $\hbar\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})$. 当远离此涡旋线时，此速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = \frac{\hbar}{M} n \boldsymbol{\nabla} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{\hbar}{M}\frac{n}{r^2}(-x_2, x_1, 0) = \frac{\hbar}{M} n \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_{\phi}, \tag{5A.26}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{\phi}$ 为方位角方向上的单位矢量. 于是，围绕每一个涡旋线都会有一个超流环流，此环流的速度将随着距离涡旋线的距离的增大呈反比减小. 利用式 (5.18) 中超流密度的表达式，则速度场 (5A.26) 的流体力学能量密度为

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^2(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{2}\frac{\hbar^2}{M^2}\frac{n^2}{r^2}. \tag{5A.27}$$

而这正是能量积分式 (5A.24) 中第三项起支配作用的南部–戈德斯通项. 因此，涡旋线的能量确实主要来源于围绕涡旋线的超流的流体力学能量.

对于流体的主要部分，式 (5A.26) 和式 (5A.27) 中的流体力学极限表达式对这些量给出了很好的近似. 只有在涡旋线的附近，即在半径 $r \leqslant \xi$ 很小的区域，由于场的模 $|\phi|$ 的梯度，能量才有别于式 (5A.27). 因此，这暗示我们可以将超流**理想化**，并且**假定**纯梯度能量密度

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho_{\mathrm{s}}}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^2(\boldsymbol{x}) = \frac{\hbar^2\rho_{\mathrm{s}}}{2M^2}[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})]^2 \tag{5A.28}$$

在空间的**任何地方**都适用.

对于非常靠近涡旋线 (即在距涡旋线大约为相干长度 ξ) 的区域内所发生的能量的偏差，可以很简单地通过将能量积分在式 (5A.23) 中所给出的涡旋内核半径 r_c 处截断来**近似处理**. 换句话说，即我们假定在围绕涡旋线的半径为 ξ 的管状区域内完全不存在超流，并且假定一旦半径超出 r_c，具有极限速度 (5A.26) 的理想化的超流立即出现.

尽管在此细管内部不存在超流，它不管怎样还是具有一定的转动能量的. 在目前的近似框架下，这个能量与式 (5A.22) 中的数 $c = 0.385$ 有关. 而这部分能量就被称作**内核能量**. 通过下面的分析，我们可以对这一内核能量给出一个物理的解释. 当距离小于内核半径时，不同的部分彼此间的相对滑动不再是无摩擦的. 因此，相对于发散的转动速度 $v_{\rm s} \sim 1/r$，涡旋内核的转动更像一个刚体棒的转动. 当我们取了这样的近似后，就有

$$v_{\rm s} \approx n \begin{cases} r/\xi, & r \leqslant \xi, \\ 1/r, & r > \xi, \end{cases} \tag{5A.29}$$

于是，对于小 r，能量密度确实如精确表示式 (5A.18) 中所显示的那样正比于 r^2. 并且，能量积分给出

$$n^2 \left[\int_1^{R/\xi} {\rm d}\bar{r}\, \bar{r}\, \frac{1}{\bar{r}^2} + \int_0^1 {\rm d}\bar{r}\, \bar{r}\, \bar{r}^2 \right] = n^2 [\log(R/\xi) + 0.25], \tag{5A.30}$$

我们看到在此近似中表示内核能量的常数 c 为 0.25，这个数量级是正确的.

为了完整给出我们关于此流体力学图景的讨论，我们现在来计算围绕一个涡旋线的超流速度场的通量：

$$\kappa \equiv \oint_B {\rm d}x_i v_{s_i} = \frac{\hbar}{M} n \oint_B {\rm d}x_i \partial_i \theta = \frac{\hbar}{M} 2\pi n = n\frac{h}{M} = n\kappa_1. \tag{5A.31}$$

该积分对于围绕涡旋线的不同形状和大小的回路 B 都是一样的. 因此，该通量总是 $\kappa_1 = h/M \approx 10^{-3}\ {\rm cm}^2/{\rm s}$ 的整数倍. n 称为**涡旋强度**.

通过斯托克斯定理 (4.21)，式 (5A.31) 中的积分可以化为以下面积分的形式：

$$\int_{S^B} {\rm d}^2 x\, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}_{\rm s} = \frac{\hbar}{M} 2\pi n, \tag{5A.32}$$

其中，S^B 为 (5A.31) 中回路 B 所包围的某个曲面. 该积分对于任何形状和大小的 S^B 均相同. 从这个结果我们得出结论：$\boldsymbol{v}_{\rm s}$ 的旋度的第三分量在除了原点以外的任何地方都必须为零，而在原点处，它的发散强度又足以使得它的二维积分给出正确的涡旋强度. 因此

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}_{\rm s} = \frac{\hbar}{M} 2\pi n\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_\perp) \hat{z}, \tag{5A.33}$$

其中，$x_\perp$ 为正交于涡旋线的坐标. 这就是式 (5.31) 的二维表达式.

如果将场的非线性特性考虑在内的话，则 $\delta^{(2)}$ 函数会在 ξ 的尺度上抹平. 通常，式 (5A.27) 中的 $1/r^2$ 会被柔化为 $1/(r^2+\varepsilon^2)$，在此情形下超流速度变为

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}=\frac{\hbar}{M}n\frac{2\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{5A.34}$$

右手边只在一个很小的半径为 $r\geqslant\varepsilon$ 的区域内不为零，且发散强度为

$$\int \mathrm{d}^2x\frac{2\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}=2\pi\varepsilon^2\int \mathrm{d}r\frac{2r}{(r^2+\varepsilon^2)^2}=2\pi. \tag{5A.35}$$

这表明式 (5A.34) 确实是奇异关系 (5A.33) 的模糊表示.

由于它的回旋特性，实验上我们可以通过以角速度 Ω 旋转容器来产生涡旋线. 一开始，摩擦的缺失会使得液体的超流部分保持静止. 然而，这一情形无法永远保持下去，因为这并不是一个热力学平衡态. 经过一段时间后，涡旋线先在器壁上产生然后迁移到液体中并均匀地分布开来. 这个过程将持续下去直到它们的数量使得转动亥姆霍兹自由能

$$E_\Omega=H-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}\approx\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^2-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{x}\times\rho_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\right) \tag{5A.36}$$

达到最小. 此平衡过程已在实验中观测到并被拍照. 而这是通过以下性质实现的：涡旋线可因禁离子进而可相对于相纸被加速.

如果我们利用式 (5A.26) 中的单个涡旋的环流速度场 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$ 来计算式 (5A.36) 中的能量的话，我们发现在一个半径为 R 的柱状容器中，第一个 $n=1$ 的涡旋会在达到临界速度

$$\Omega_{\mathrm{c}}=\frac{\kappa_1}{\pi R^2}\log\frac{R}{\xi} \tag{5A.37}$$

时出现，并稳定在转轴上. 我们需要注意到，所有高 n 值的涡旋线都不稳定. 因为能量随 n 呈平方增长，所以系统更倾向于将一条 $n>1$ 的单个涡旋线衰变为 n 条 $n=1$ 的涡旋线. 但是，不管怎样，在我们通过搅动容器来产生涡旋线的过程中，我们总会短暂地造出这种不稳定的涡旋线，并可观察到它的衰变.

Onsager[6] 和 Feynman[7] 的经典文章发表后，Hess[63] 在 1967 年计算了旋转的液氦超流中涡旋线的特性. 很多后来的文章对他的结果进行了修正和改进. 1969 年，伯克利的 Packard 研究组从实验上造出了这些涡旋线 [64]. 自 1995 年康奈尔大学的 Eric Cornell 和 Carl Wieman 以及麻省理工的 Wolfgang Ketterle 发现玻色–爱因斯坦凝聚以来，实验物理学家已可以在极低温度下通过严格控制的实验来产生涡旋线. 这直接导致了该领域的研究风潮. 文献 [65] 中给出了关于此方面研究的一小部分论文. 感兴趣的读者可以通过这些文献来追踪整个发展历程.

文献与注记

[1] 这在 1938 由以下学者独立发现：
P. Kapitza, Nature **141**, 74 (1938);
J. Allen and D. Misener, Nature **141**, 75 (1938).
只有前两位获得了 1978 年的诺贝尔奖. 参看下列历史文献
A. Griffin, physics world **21**, 27 (2008).

[2] P. Debye, *Zur Theorie der spezifischen Wärmen*, Annalen der Physik 39(4), 789 (1912).

[3] L.D. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **11**, 91 (1947) [see also Phys. Rev. **75**, 884 (1949)].

[4] C.A. Jones and P.H. Roberts, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 2599 (1982).

[5] R.A. Cowley and A.D. Woods, Can. J. Phys **49**, 177 (1971).

[6] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl. **6**, 249 (1949).

[7] R.P. Feynman, in *Progress in Low Temperature Physics*, ed. by C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam, 1955.

[8] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I: *Superflow and Vortex Lines, Disorder Fields, Phase Transitions*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b1`)，其中`kl`为以下网址的缩写：`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert`.

[9] W. Shockley, in *L'Etat Solide*, Proc. Neuvieme Conseil de Physique, Brussels, ed. R. Stoops (Inst. de Physique, Solvay, Brussels, 1952).

[10] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II: *Stresses and Defects, Differential Geometry, Crystal Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`).

[11] 注意，这个构型熵是无法在以下文章所提出的仅限于回路涡旋线的模型中加以恰当的考虑的：
G. Williams, Phys. Rev. Lett. **59**, 1926 (1987).

[12] 这个关系式首先在专著 [8] 中的第 517 页中提出，并被以下实验所验证：
Y.J. Uemura, Physica B **374**, 1 (2006) (cond-mat/0512075).

[13] 参看专著 [8] (`kl/b1/gifs/v1-530s.html`) 中的 529-530 页.

[14] L.P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646 (1961) [Sov. Phys.-JETP **13**, 451 (1961)].

[15] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Phenomena in* Φ^4*-Theory*, World Scientific, Singapore 2001, pp. 1–487 (`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b8`). See Table 20.1.

[16] H. Kleinert, *Critical Exponents from Seven-Loop Strong-Coupling* ϕ^4*-Theory in Three Dimensions*, Phys. Rev. D **60**, 085001 (1999) (hep-th/9812197) (`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/279`).

[17] J.A. Lipa, J.A. Nissen, D.A. Stricker, D.R. Swanson, and T.C. P. Chui, *High-precision measurement of the thermal exponent for the three-dimensional* XY *universality class*, Phys. Rev. B **68**, 174518 (2003).

[18] H. Kleinert, *Theory of Fluctuating Nonholonomic Fields and Applications: Statistical*

Mechanics of Vortices and Defects and New Physical Laws in Spaces with Curvature and Torsion, in: Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Formation and Interaction of Topological Defects, Plenum Press, New York, 1995, pp. 201–232 (`kl/227`).

[19] See pp. 136–145 in textbook [8] (`kl/b1/gifs/v1-136s.html`).

[20] 参看专著 [8] (`kl/b1/gifs/v1-468s.html`) 中的第 468 页.

[21] 参看专著 [8] (`kl/b1/gifs/v1-241s.html`) 中的第 241 页.

[22] J. Villain, J. Phys. (Paris) **36**, 581 (1977). 也请参看`kl/b1/gifs/v1-489s.html` 中的相关讨论.

[23] 参看专著 [8] (`kl/b1/gifs/v1-503s.html`) 中的第 503 页. 配分函数 (5.37) 的高温展开以及相关的自由能由式 (7.42a) 和式 (7.42b) 给出，自由能的低温展开由式 (7.43) 给出.

[24] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets,* 4th ed., World Scientific, Singapore 2006 (`kl/b5`).

[25] 不同物理系统中类似的缺陷系综的正则表示见：
H. Kleinert, J. Phys. **44**, 353 (1983) (Paris) (`kl/102`).

[26] 参看专著 [8] 中的第 2 部分第 9.7 节以及第 11.9 节，特别是 (11.133) 式；
H. Kleinert and W. Miller, Phys. Rev. Lett. **56**, 11 (1986) (`kl/130`); Phys. Rev. D **38**, 1239(1988) (`kl/156`).

[27] H. Kleinert, Lett. Nuovo Cimento **35**, 405 (1982) (`kl/97`). 文中所得到的三重临界值 $\kappa \approx 0.80/\sqrt{2}$ 直到最近才由蒙特卡罗模拟 [57] 证实.

[28] 方程 $\mathbf{j}^s = -\mathbf{a}_T$ 正是第 7.2 节中将要讨论的著名的超导的**第一伦敦方程** $\mathbf{j}^s = -(q^2 n_0/Mc)\mathbf{A}_T$ 的无序场版本.

[29] 我们知道，取合适的物理单位后，能量区间 $E, E + dE$ 中各自旋方向的态密度为 $\mathcal{N} = \int[d^3p/(2\pi\hbar)^3]\delta(p^2/2m - E) = (2mE/\hbar^2)^{1/2}m/2\pi^2\hbar^2$. 在费米球表面，这变为 $mp_F/2\pi^2\hbar^2$. 总的电子密度 n_e 为 $2\int_0^{E_F} dE\,\mathcal{N} = p_F^3/3\pi^2$，于是我们就得 (5.148).

[30] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957);
M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, New York, 1975.

[31] Gorkov 的推导只在平均场层面有效. 而基于泛函积分 [32] 的先进的推导过程则可以包含任意阶的涨落.

[32] H. Kleinert, *Collective Quantum Fields,* Lectures presented at the First Erice Summer School on Low-Temperature Physics, 1977, Fortschr. Physik **26**, 565-671 (1978) (`kl/55`). See Eq. (4.118).

[33] L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **7**, 627 (1937);
V.L. Ginzburg and L.D. Landau, ibid. **20**, 1064 (1950).

[34] 此效应是他在同 R. Ochsenfeld 的合作中发现的，见：
W. Meissner and R. Ochsenfeld, *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit*, Naturwissenschaften **21**, 787, (1933).
由于第二个作者的名字太长，于是为了简略起见，大家就习惯地称此为迈斯纳效应，当

然这很不公平.

[35] 无序场论的特征在文献 [8] 中有详细的讨论.

[36] M. Kiometzis, H. Kleinert, and A.M.J. Schakel, Phys. Rev. Lett. **73**, 1975 (1994) (cond-mat/9503019).

[37] H. Kleinert, Europhys. Letters **74**, 889 (2006) (cond-mat/0509430).

[38] 参看专著 [10] 的第一卷第二部中的第 10 章.

[39] 关于它的推导请参看专著 [24] 中的第 3.10 节.

[40] 这可看成是液氦超流的对偶表示中的迈斯纳效应.

[41] S. Elitzur, Phys. Rev. D **12**, 3978 (1975).

[42] J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 721 (1959); **127**, 324 (1962).

[43] P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed., Clarendon, Cambridge 1981, Section 80; *Gauge-Invariant Formulation of Quantum Electrodynamics*, Can. J. of Physics **33**, 650 (1955). 特别参看文中的 (16) 和 (19) 式.

[44] T. Kennedy and C. King, Phys. Rev. Lett. **55**, 776 (1985); Comm. Math. Phys. **104**, 327 (1986).

[45] M. Kiometzis and A.M.J. Schakel, Int. J. Mod. Phys. B **7**, 4271 (1993).

[46] V.L. Ginzburg, Fiz. Tverd. Tela **2**, 2031 (1960) [Sov. Phys. Solid State **2**, 1824 (1961)]. 详细的讨论请参看以下教科书的第 13 章：
L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, 3rd edition, Pergamon Press, London, 1968.

[47] H. Kleinert, *Criterion for Dominance of Directional over Size Fluctuations in Destroying Order*, Phys. Rev. Lett. **84**, 286 (2000) (cond-mat/9908239).

[48] D. Saint-James, G. Sarma, and E.J. Thomas, *Type II Superconductivity*, Pergamon, Oxford, 1969.

[49] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed., Dover, New York, 1996.

[50] T. Schneider, J. M. Singer, *A Phase Transition Approach to High Temperature Superconductivity*: *Universal Properties of Cuprate Superconductors*, World Scientific, Singapore, 2000; *Evidence for 3D-XY Critical Properties in Underdoped YBa2Cu3O7+x* (cond-mat/0610289).

[51] T. Schneider, R. Khasanov, and H. Keller, Phys. Rev. Lett. 94, 77002 (2005);
T. Schneider, R. Khasanov, K. Conder, E. Pomjakushina, R. Bruetsch, and H. Keller, J. Phys. Condens. Matter **16**, L1 (2004) (cond-mat/0406691).

[52] B.I. Halperin, T.C. Lubensky, and S. Ma, Phys. Rev. Lett. **32**, 292 (1972).

[53] L.P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966); K.G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174, 3184 (1971); K.G. Wilson and M.E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972); and references therein.

[54] 关于重整化群的一般性处理请参阅：
J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4th ed., Oxford Science Publications, Oxford 2002;

H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Phenomena in ϕ^4-Theory*, World Scientific, Singapore, 2001 (`kl/b8`).

[55] 关于此问题的一些遴选文献见下：

J. Tessmann, *Two Loop Renormalization of Scalar Electrodynamics*, MS thesis 1984 (此文的 pdf 文件可从 (`kl/MS-Tessmann.pdf`) 中获得，其中kl 为`www.physik.fu-berlin.de/~kleinert`的缩写；

S. Kolnberger and R. Folk, *Critical Fluctuations in Superconductors*, Phys. Rev. B **41**, 4083 (1990);

R. Folk and Y. Holovatch, *On the Critical Fluctuations in Superconductors*, J. Phys. A **29**, 3409 (1996);

I.F. Herbut and Z. Tešanović, *Critical Fluctuations in Superconductors and the Magnetic Field Penetration Depth*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4588 (1996);

H. Kleinert and F.S. Nogueira, *Charged Fixed Point in the Ginzburg-Landau Superconductor and the Role of the Ginzburg Parameter κ*, Nucl. Phys. B **651**, 361 (2003) (cond-mat/0104573).

[56] H. Kleinert, *Disorder Version of the Abelian Higgs Model and the Superconductive Phase Transition*, Lett. Nuovo Cimento **35**, 405 (1982). 更详细的讨论见 [8] 中的第二部中的第 13 章 (`kl/b1/gifs/v1-716s.html`) [特别参看第 (13.30) 式].

[57] J. Hove, S. Mo, and A. Sudbø, *Vortex Interactions and Thermally Induced Crossover from Type-I to Type-II Superconductivity*, Phys. Rev. B **66**, 64524 (2002) (cond-mat/0202215);

S. Mo, J. Hove, and A. Sudbø, *Order of the Metal to Superconductor Transition*, Phys. Rev. B **65**, 104501 (2002) (cond-mat/0109260).

此文作者的蒙特卡罗数值模拟得到的金兹堡参数为 $\kappa = \sqrt{g/q^2}$ 时的三重临界值为 $(0.76 \pm 0.04)/\sqrt{2}$.

[58] 对于因子 $\sqrt{2}$ 有个很好的物理解释：在高温无序相中序参数场 $\psi(x)$ 的实部和虚部在 $\kappa = 1/\sqrt{2}$ 时有相同的涨落幅度.

[59] L. Marotta, M. Camarda, G.G.N. Angilella, F. Siringo, *A General Interpolation Scheme for Thermal Fluctuations in Superconductors*, Phys. Rev. B **73**, 104517 (2006).

[60] 参看专著 [39] 中的第 4.10 节.

[61] For 关于这点得理论讨论以及相关详细文献的列表见：

J. Dietel and H. Kleinert, *Defect-Induced Melting of Vortices in High-$\mathbf{T_c}$ Superconductors: A Model Based on Continuum Elasticity Theory*, Phys. Rev. B **74**, 024515 (2006) (cond-mat/0511710); *Phase Diagram of Vortices in High-Tc Superconductors from Lattice Defect Model with Pinning* (cond-mat/0612042).

[62] M. Gabay and A. Kapitulnik, Phys. Rev. Lett. **71**, 2138 (1993).

See also

S.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **71**, 2142 (1993).

M.T. Chen, J.M. Roesler, and J.M. Mochel, J. Low Temp. Phys. **89**, 125 (1992).

[63] G.B. Hess, *Angular Momentum of a Superfluid Helium in a Rotating Cylinder*, Phys. Rev. **161**, 189 (1967);
D. Stauffer and A.L. Fetter, *Distribution of Vortices in Rotating Helium II*, Phys. Rev. **168**, 156 (1968).
同时请参看以下著作：
R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge University Press, 1991;
以及下列综述文章：
A.L. Fetter, in *The Physics of Solid and Liquid Helium*, ed. by K.H. Bennemann and J.B. Ketterson, Wiley, New York, Springer, Berlin, 1976.

[64] R.E. Packard and T.M. Sanders, Jr., *Detection of Single Quantized Vortex Lines in Rotating He II* , Phys. Rev. Lett. **22**, 823 (1969).
也可参看：
K. DeConde and R.E. Packard, *Measurement of Equilibrium Critical Velocities for Vortex Formation in Superfluid Helium*, Phys. Rev. Lett. **35**, 732 (1975).

[65] A.L. Fetter and A.A. Svidzinsky, *Vortices in a Trapped Dilute Bose-Einstein Condensate*, J. Phys.: Condensed Matter **13**, R135 (2001);
A.L. Fetter, *Rotating Vortex Lattice in a Condensate Trapped in Combined Quadratic and Quartic Radial Potentials*, Phys. Rev. A **64**, 3608 (2001);
A.L. Fetter, B. Jackson, and S. Stringari, *Rapid Rotation of a Bose-Einstein Condensate in a Harmonic Plus Quartic Trap*, Phys. Rev. A **71**, 013605 (2005);
A.A. Svidzinsky and A.L. Fetter, *Normal Modes of a Vortex in a Trapped Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. A **58**, 3168 (1998);
J. Tempere, M. Wouters, and J.T. Devreese, *The Vortex State in the BEC to BCS Crossover: A Path-Integral Description*, Phys. Rev. A **71**, 033631 (2005) (cond-mat/0410252);
V.N. Gladilin, J. Tempere, I.F. Silvera, J.T. Devreese, V.V. Moshchalkov, *Vortices on a Superconducting Nanoshell: Phase Diagram and Dynamics*, (arxiv:0709.0463).

第 6 章　超流动力学

That which is static and repetitive is boring.
That which is dynamic and random is confusing.
In between lies art.

John A. Locke (1632~1704)

费曼认为 [1] 在零温时，哈密顿量 (5.6) 中随时间变化的 ϕ 场是由下述作用量支配的：

$$\mathcal{A}=\int \mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\mathcal{L}=\int \mathrm{d}t\left\{\int \mathrm{d}^3x\mathrm{i}\hbar\phi^*\partial_t\phi-H[\phi]\right\}, \tag{6.1}$$

因此相应的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}=\mathrm{i}\hbar\phi^*\partial_t\phi-\frac{1}{2}\left\{|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2+\tau|\phi|^2+\frac{\lambda}{2}|\phi|^4\right\}. \tag{6.2}$$

在超流相中，$\tau<0$ 并且 $\phi=\phi_0=\sqrt{-\tau/\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，当采用物理单位而不是自然单位时，即当把普朗克常量 $\hbar$ 和超流粒子质量 M 包含进来后，式 (6.2) 可以更明确地写为

$$\mathcal{L}=\mathrm{i}\hbar\phi^*\partial_t\phi-\frac{\hbar^2}{2M}|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2-\frac{c_0^2M}{2n_0}(\phi^*\phi-n_0)^2+\frac{c_0^2Mn_0}{2}, \tag{6.3}$$

其中，$n_0=|\phi_0|^2=-\tau/\lambda$ 为基态超流粒子密度 $\phi^*\phi$，即式 (5.18) 中的超流密度，我们将其命名为 $n(x)$ 以防与式 (5.10)~ 式 (5.26) 中的场的大小 $\rho(x)=|\phi(x)|$ 混淆. 最后一项为超流相中负的凝聚能密度 $-c_0^2Mn_0/2$. 式 (6.2) 中的相互作用强度 λ 已写为 $2c_0^2M/n_0$ 且 τ 变为 $-2c_0^2M$，其原因将在以下章节中进行讲述.

上面这个随时间变化的场 $\phi(t,x)\equiv\phi(x)$ 的运动方程则为

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\phi(x)=\left[-\frac{\hbar}{2M}\boldsymbol{\nabla}^2-c_0^2M+\frac{c_0^2M}{n_0}\phi^*(x)\phi(x)\right]\phi(x). \tag{6.4}$$

6.1　超流的流体力学描述

类似于式 (5.10)，将 $\phi(x)$ 替换为 $\rho(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$，并进一步将 $\rho(x)$ 替换为 $\sqrt{n(x)}$ 后，式 (6.3) 中的拉格朗日密度变为

$$\mathcal{L}=n(x)\left\{-\hbar[\partial_t\theta(x)+\theta_t^{\mathrm{v}}(x)]-\frac{\hbar^2}{2M}[\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)]^2-e_{\nabla n}(x)-e_n(x)\right\}, \tag{6.5}$$

其中

$$e_n(x) \equiv \frac{c_0^2 M}{2n_0}\left\{[n(x)-n_0]^2 - n_0^2\right\} \tag{6.6}$$

为涨落的凝聚体中每个粒子的内能，且

$$e_{\boldsymbol{\nabla} n}(x) \equiv \frac{\hbar^2}{8M}\frac{[\boldsymbol{\nabla} n(x)]^2}{n^2(x)} \tag{6.7}$$

为凝聚体的梯度能 (gradient energy). 此能量也可写为

$$e_{\boldsymbol{\nabla} n}(x) = \frac{\mathbf{p}^{\mathrm{os}\,2}(x)}{2M}, \tag{6.8}$$

其中

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{os}}(x) \equiv M\boldsymbol{v}^{\mathrm{os}}(x) \equiv \frac{\hbar}{2}\frac{\boldsymbol{\nabla} n(x)}{n(x)} \tag{6.9}$$

为 i 乘以与凝聚体膨胀相关的量子力学动量，即所说的**渗透动量** (osmotic momentum). 矢量 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{os}}(x)$ 为相应的渗透速度.

如果粒子在外加囚禁势 $V(x)$ 中运动运动的话，只需简单地将此加在 $e(x)$ 上. 处于玻色–爱因斯坦凝聚 [9] 或者光晶格 [10] 中的玻色子就是这样的例子. 于是，式 (6.5) 中最后两项可替换为

$$e_{\mathrm{tot}}(x) = e_{\nabla n}(x) + e_n(x) + V(x). \tag{6.10}$$

我们可以对涡旋规范场方便地选取轴规范，在此规范中时间分量 $\theta_t^{\mathrm{v}}(x)$ 为零而只有空间部分 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)$ 不为零. 这样做之后，场变量 $\theta(x)$ 的取值范围将变为 $-\infty$ 到 ∞ 而不再是 $-\boldsymbol{\pi}$ 到 $\boldsymbol{\pi}$ [请回顾一下由配分函数 (5.37) 演变到式 (5.47) 的过程].

现在我们引入具有涡旋的速度场函数

$$\boldsymbol{v}(x) \equiv \hbar[\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)]/M, \tag{6.11}$$

以及粒子密度相对于基态值的局域偏离 $\delta n(x) \equiv n(x) - n_0$，于是式 (6.5) 可写为

$$\mathcal{L} = -n(x)\left[\hbar\partial_t\theta(x) + \frac{M}{2}\boldsymbol{v}^2(x) + e_{\mathrm{tot}}(x)\right]. \tag{6.12}$$

当对 $\theta(x)$ 增加一个额外的常数 $\varLambda$ 时，式 (6.12) 中的拉格朗日密度在此变换下是不变的. 根据 Noether 定理，这表明存在一个守恒的流密度. 我们可以利用式 (3.102) 中的规则计算相应的荷以及粒子流密度

$$n(x) = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\theta(x)}, \quad \boldsymbol{j}(x) = -\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}\theta(x)} = n(x)\boldsymbol{v}(x). \tag{6.13}$$

第二个等式中我们用到了式 (6.11) 中的关系. 因子 $1/\hbar$ 的选取是为了使各个量具有正确的物理量纲. 于是，相应的守恒律为

$$\partial_t n(x) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot [n(x)\boldsymbol{v}(x)], \tag{6.14}$$

这就是流体力学中的**连续性方程**. 该方程是通过将式 (6.12) 中的拉格朗日密度对 $\theta(x)$ 求极值而得到的.

将此拉格朗日密度对 $\delta n(x)$ 做泛函极值则给出

$$\hbar\partial_t\theta(x) + \frac{M}{2}\boldsymbol{v}^2(x) + V(x) + h_{\nabla n}(x) + h_n(x) = 0, \tag{6.15}$$

其中，我们已将式 (6.10) 中可能的外势 $V(x)$ 包含在内了. 最后一项为带有能量 $e_n(x)$ 的单粒子的**焓**. 它定义为

$$h_n(x) \equiv \frac{\partial[n(x)e_n(x)]}{\partial n(x)} = e_n(x) + n(x)\frac{\partial e_n(x)}{\partial n(x)} = e_n(x) + \frac{p_n(x)}{n(x)}, \tag{6.16}$$

其中，$p_n(x)$ 为能量 $e_n(x)$ 引起的压强

$$p_n(x) \equiv n^2(x)\frac{\partial}{\partial n}e_n(x) = \left(n\frac{\partial}{\partial n} - 1\right)[n(x)e_n(x)]\,. \tag{6.17}$$

对于式 (6.6) 中的 $e_n(x)$，并且考虑到式 (6.10) 中的外势 $V(x)$ ，我们就得到

$$h_n(x) = \frac{c_0^2 M}{n_0}\delta n(x), \quad p_n(x) = \frac{c_0^2 M}{2n_0}n^2(x). \tag{6.18}$$

$h_{\nabla n}(x)$ 项被称为**量子焓**. 此项是从能量密度 $e_{\nabla n}(x)$ 由欧拉–拉格朗日方程得到的：

$$h_{\nabla n}(x) \equiv \frac{\partial[n(x)e_{\nabla n}(x)]}{\partial n(x)} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial[n(x)e_{\nabla n}(x)]}{\partial \boldsymbol{\nabla} n(x)}. \tag{6.19}$$

此式可写为

$$h_{\nabla n}(x) = e_{\nabla n}(x) + \frac{p_{\nabla n}(x)}{n(x)}, \tag{6.20}$$

其中

$$p_{\nabla n}(x) = n^2(x)\left[\frac{\partial}{\partial n} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nabla} n}\right]e_{\nabla n}(x) = \left\{n(x)\left[\frac{\partial}{\partial n} - \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nabla} n}\right] - 1\right\}[n(x)e_{\nabla n}(x)] \tag{6.21}$$

被称作**量子压强**.

将式 (6.7) 代入，得

$$h_{\nabla n}(x) = \frac{\hbar^2}{8M}\left\{\frac{[\boldsymbol{\nabla} n(x)]^2}{n(x)} - 2\boldsymbol{\nabla}^2 n(x)\right\}, \quad p_{\nabla n}(x) = -\frac{\hbar^2}{4M}\boldsymbol{\nabla}^2 n(x). \tag{6.22}$$

这两个方程 (6.14) 和 (6.15) 是由马德/ adelung) 在 1926 年发现的 [2].

对方程 (6.15) 求梯度就到了运动方程

$$M\partial_t\boldsymbol{v}(x)+\hbar\partial_t\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}+\frac{M}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^2(x)=-\boldsymbol{\nabla}V_{\mathrm{tot}}(x)-\boldsymbol{\nabla}h_{\nabla n}(x)-\boldsymbol{\nabla}h_n(x), \tag{6.23}$$

其中

$$V_{\mathrm{tot}}(x)\equiv V(x)\equiv h_{\nabla n}(x)+\boldsymbol{\nabla}h_n(x). \tag{6.24}$$

我们现在利用下述矢量等式：

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v}^2(x)=\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]+[\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{v}(x), \tag{6.25}$$

将式 (6.23) 改写为

$$M\partial_t\boldsymbol{v}(x)+M[\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{v}(x)=-\boldsymbol{\nabla}V_{\mathrm{tot}}(x)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{v}}(x), \tag{6.26}$$

其中

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{v}}(x)\equiv-\hbar\partial_t\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)-M\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]=-\hbar\partial_t\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)+\hbar\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)] \tag{6.27}$$

是源于涡旋的力. 对第二项的经典贡献就是加在旋转流体上的很重要的马格努斯力 (Magnus force)[3] ：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Magnus}}(x)\equiv-M\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]\,. \tag{6.28}$$

这里很重要的一点是式 (6.27) 中的力在超流中其实为零

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{v}}(x)=0, \tag{6.29}$$

这说明涡旋规范场对于时间的依赖性是由式 (6.28) 中的马格努斯力提供的.

现在我们来对此加以证明. 首先来考虑二维情形，在一个给定时刻 t 有一个点状涡旋位于原点处. 这可由如下涡旋规范场来描述：

$$\theta^{\mathrm{v}}_1(\boldsymbol{x})=0,\quad \theta^{\mathrm{v}}_2(\boldsymbol{x})=2\pi\varTheta(x_1)\delta(x_2), \tag{6.30}$$

其中，$\varTheta(x_1)$ 为海维赛德 (Heaviside) 阶跃函数，当自变量为负数时为零而当 x_1 为正时取 1. 对式 (6.30) 取旋度就给出涡旋密度，它正比于一个位于原点处的 δ 函数：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})=\nabla_1\theta^{\mathrm{v}}_2(\boldsymbol{x})-\nabla_2\theta^{\mathrm{v}}_1(\boldsymbol{x})=2\pi\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}), \tag{6.31}$$

此结果与式 (5.31) 中的一般形式吻合得很好. 假定经过 Δt 时间，此涡旋运动到了点 $x+\Delta x=(\Delta x_1,0)$ 处，在此点有

$$\theta^{\mathrm{v}}_1(\boldsymbol{x})=0,\quad \theta^{v}_2(\boldsymbol{x})=2\pi\varTheta(x_1+\Delta x_1)\delta(x_2),\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x})=2\pi\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}). \tag{6.32}$$

由于 $\Theta(x_1+\Delta x_1)=\Theta(x_1)+\Delta x_1\delta(x_1)$，我们看到 $\Delta\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x)=\Delta x\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x)]$，而当对此除以 Δt 并取极限 $\Delta t\to 0$ 后，我们就得到

$$\partial_t\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x)=\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x)]\,, \tag{6.33}$$

于是就证明了 $\boldsymbol{f}^{\rm v}(x)$ 为零.

这个结果可以轻松地推广到摆动弦的情形，在此情形下，我们可以将它近似看成是紧密层叠的平面上的点的集合，而这些平面与相应的弦上的线段相垂直. 只要这根弦是光滑的，则其方向的改变就是在 $\Delta\boldsymbol{x}$ 的更高阶的量级上，$\Delta t\to 0$ 的极限并不会对结果有所影响. 因此我们可以将式 (6.26) 中的最后一项略去.

方程 (6.33) 即为涡旋规范场的运动方程. 这个场对于时间得依赖关系则由式 (6.27) 中马格努斯力的量子类比量支配.

注意对于为零的 $\boldsymbol{f}^{\rm v}(x)$ 并且不考虑量子压强 $p_{\nabla n}(x)$ 的话，方程 (6.26) 与下述经典的理想流体的**欧拉运动方程**完全吻合：

$$M\frac{\rm d}{{\rm d}t}\boldsymbol{v}(x)=M\partial_t\boldsymbol{v}(x)+M[\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{v}(x)=-\boldsymbol{\nabla}V(x)-\frac{\boldsymbol{\nabla}p_n(x)}{n(x)}. \tag{6.34}$$

最后一项原本是等于 $-\boldsymbol{\nabla}h_n(x)$ 的. 然而，由于 $e_n(x)$ 只依赖于 $n(x)$，这种情形下该系统被称为是**正压的** (barytropic)，于是我们看到，式 (6.16) 就给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}h_n(x)&=\boldsymbol{\nabla}e_n(x)-\frac{p_n(x)}{n^2(x)}\boldsymbol{\nabla}n(x)+\frac{\boldsymbol{\nabla}p_n(x)}{n(x)}=\left[\frac{\partial e_n(x)}{\partial n(x)}-\frac{p_n(x)}{n^2(x)}\right]\boldsymbol{\nabla}n(x)+\frac{\boldsymbol{\nabla}p_n(x)}{n(x)}\\&=\frac{\boldsymbol{\nabla}p_n(x)}{n(x)}.\end{aligned} \tag{6.35}$$

对于 $\boldsymbol{f}^{\rm v}(x)=0$ 的式 (6.26) 以及经典方程式 (6.34)，只有两个不同点. 一个是式 (6.26) 中额外的量子部分 $-\boldsymbol{\nabla}h_{\nabla n}(x)$，另一点则在涡旋结构的本质. 在经典流体中，**涡旋度**①

$$\boldsymbol{w}(x)\equiv\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x) \tag{6.36}$$

可以是 x 的任意函数. 例如，速度场 $\boldsymbol{v}(x)=(0,x,0)$ 的涡旋度为一个常数 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)=1$. 在超流中，这样的涡旋度不会存在. 如果我们做如下的沿着任意围道的积分 $\oint{\rm d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}(x)$，我们肯定发现该结果总是为 $\hbar$ 的整数倍，这就保证了围绕涡旋线的波函数的唯一性. 这对应着于索末菲量子化条件 $\oint{\rm d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}(x)=\hbar n$. 在超流中，并不存在非零涡旋度的连续区域，而只有无穷细的线. 这就使得涡旋度为 δ 函数 $2\pi\hbar\delta(\boldsymbol{x};L)$ 的叠加，式 (6.11) 中速度的表达式正保证了这一点.

① 字母 $\boldsymbol{w}$ 的选取是源于涡旋度的德语词汇 “Wirbelstärke”.

对 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{v}}(x)$ 的右边取旋度，我们就得到了一个关于涡旋密度时间导数的方程

$$\partial_t[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)]=\boldsymbol{\nabla}\times\Big[\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)]\Big]. \tag{6.37}$$

关于经典流体的涡旋度 $\boldsymbol{w}(x)$，这样的方程首先由 Ertel[4] 在 1942 年提出. 利用矢量公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)\times\boldsymbol{w}(x)=&-\boldsymbol{w}(x)[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(x)]-[\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{w}(x)\\&+\boldsymbol{v}(x)[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}(x)]+[\boldsymbol{w}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{v}(x),\end{aligned} \tag{6.38}$$

以及公式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{w}(x)=\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]\equiv 0$，我们就可将与式 (6.37) 相对应的经典表述写为如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{w}(x)=\partial_t\mathbf{w}(x)+[\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{w}(x)=-\boldsymbol{w}(x)[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(x)]+[\boldsymbol{w}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{v}(x), \tag{6.39}$$

这就是由 Ertel 给出的形式. 此式同式 (6.34) 一起构成了推导经典理想完美流体的著名的亥姆霍兹–汤姆孙 (Helmholtz-Thomson) 定理的基础，该定理指出，如果力为保守力，则涡旋度沿着涡旋线为常数.

式 (6.37) 则是 Ertel 方程的量子力学版本，其中涡旋只产生于满足量子化条件 $\oint \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}(x)=\hbar n$ 的无穷细线上.

将涡旋密度 (5.31) 代入方程 (6.37) 中，我们就得到了一个在流体中以速度 $\boldsymbol{v}(x)$ 运动的线 $L(t)$ 的方程

$$\partial_t\delta(\boldsymbol{x};L(t))=\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{v}(x)\times\delta(\boldsymbol{x};L(t))]\,. \tag{6.40}$$

基于 Nelson[7] 提出的量子理论的概率方法，Morato 等 [5, 6] 认为力 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{v}}(x)$ 并不为零，而是等于一个量子力

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{qu}}(x)\equiv-\frac{\hbar}{2}\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}n(x)}{n(x)}+\boldsymbol{\nabla}\right]\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]. \tag{6.41}$$

然而我们从超流的拉格朗日密度 (6.2) 出发直接进行的推导却并没有得到这一项.

6.2 第二声速度

现在来看式 (6.12) 中的拉格朗日密度，忽略掉凝聚能密度 $-c_0^2Mn_0/2$ 这个平凡的常数，同时也忽略掉外势 $V(x)$. 于是结果就变成

$$\mathcal{L}=-[n_0+\delta n(x)]\left[\hbar\partial_t\theta(x)+\frac{M}{2}\boldsymbol{v}^2(x)\right]-\frac{\hbar^2}{8M}\frac{[\boldsymbol{\nabla}\delta n(x)]^2}{n(x)}-\frac{c_0^2M}{2n_0}[\delta n(x)]^2. \tag{6.42}$$

对于小的 $\delta n(x) \ll n_0$，这可在

$$\delta n(x) = \frac{n_0}{c_0^2 M} \frac{1}{1 - \xi^2 \boldsymbol{\nabla}^2} \left[\hbar \partial_t \theta(x) + \frac{M}{2} \boldsymbol{v}^2(x)\right] \tag{6.43}$$

处取极值，其中

$$\xi \equiv \frac{1}{2} \frac{\hbar}{c_0 M} = \frac{1}{2} \frac{c}{c_0} \lambda_M \tag{6.44}$$

为 $\delta n(x)$ 涨落的范围，即超流的相干长度，而 $\lambda_M = \hbar/Mc$ 为质量为 M 的粒子的康普顿波长.

将式 (6.43) 代回到式 (6.42) 中就给出了拉格朗日密度的另一种表述

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &- n_0 \left[\hbar \partial_t \theta(x) + \frac{M}{2} \boldsymbol{v}^2(x)\right] \\ &+ \frac{n_0}{2c_0^2 M} \left[\hbar \partial_t \theta(x) + \frac{M}{2} \boldsymbol{v}^2(x)\right] \frac{1}{1 - \xi^2 \boldsymbol{\nabla}^2} \left[\hbar \partial_t \theta(x) + \frac{M}{2} \boldsymbol{v}^2(x)\right].\end{aligned} \tag{6.45}$$

第一项是一个无关紧要的表面项，可以忽略掉. $\theta(x)$ 函数的二次型涨落行为由以下朗格朗日密度支配：

$$\mathcal{L}_0 = \frac{n_0 \hbar^2}{2M} \left\{\frac{1}{c_0^2} \left[\partial_t \theta(x) - \theta_t^{\mathrm{v}}(x)\right] \frac{1}{1 - \xi^2 \boldsymbol{\nabla}^2} \left[\partial_t \theta(x) - \theta_t^{\mathrm{v}}(x)\right] - \left[\boldsymbol{\nabla} \theta(x) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)\right]^2\right\}. \tag{6.46}$$

为了凸现涡旋规范不变性，我们已将涡旋规范场的时间分量 $\theta_t^{\mathrm{v}}(x)$ 重新引入，这一项在式 (6.12) 中由于我们选取了轴规范而略掉了.

当不存在涡旋并且取长波极限时，式 (6.46) 中的拉格朗日密度将给出以下运动方程：

$$(-\partial_t^2 + c_0^2 \boldsymbol{\nabla}^2)\theta(x) = 0. \tag{6.47}$$

这就是 $\theta(x)$ 的 Klein-Gordon 方程，它指出参数 c_0 就是相位涨落的传播速度，它构成了超流中的第二声.

值得注意的是，尽管初始运动方程 (6.4) 是非相对论性的，声波却满足洛伦兹不变的方程，其中声速 c_0 扮演着光速的角色. 如果存在一个势函数的话，则第二声声速将不再是一个常量，而是位置的函数.

6.3 涡旋电磁场

我们可以进一步给出与电磁规范场的类比. 定义 $\theta_0^{\mathrm{v}}(x) \equiv \theta_t^{\mathrm{v}}(x)/c$，并且定义涡旋电场与涡旋磁场为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{v}}(x) \equiv -\left[\boldsymbol{\nabla} \theta_0^{\mathrm{v}}(x) + \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)\right], \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{v}}(x) \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x), \tag{6.48}$$

这些正类比于式 (2.74) 和式 (2.75) 中的电磁场. 第零分量 $\theta_0^{\rm v}(x)$ 正是按照由 $A_t(x) = cA_0(x)$ 定义 $A_0(x)$ 的相同途径而由 $\theta_t(x)$ 定义出来的，而此方法使得 $\mathrm{d}x^\mu A_\mu$ 的以下两种表述等价：

$$\mathrm{d}x^\mu A_\mu \equiv \mathrm{d}x^0 A_0 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} = \mathrm{d}t A_t - \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{6.49}$$

$\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x)$ 与 $\theta_0^{\rm v}(x)$ 的量纲均为 1/长度，而涡旋电磁场 $\boldsymbol{E}^{\rm v}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\rm v}$ 则具有量纲 1/长度^2. 该场量满足与式 (1.189) 和式 (1.190) 中电磁场所满足的同样的比安基恒等式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}^{\rm v}(x) = 0, \tag{6.50}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}^{\rm v}(x) + \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{B}^{\rm v}(x) = 0. \tag{6.51}$$

有了这些场量，式 (6.27) 中的涡旋力就变成

$$\boldsymbol{f}^{\rm v}(x) = \hbar c\left[\boldsymbol{E}^{\rm v}(x) + \frac{\boldsymbol{v}(x)}{c}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)\right], \tag{6.52}$$

这与式 (1.186) 中作用在带有单位电荷的运动粒子上的力具有相同的形式. 根据式 (6.29)，相应的涡旋力为零，于是

$$\boldsymbol{E}^{\rm v}(x) = -\frac{\boldsymbol{v}(x)}{c}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x). \tag{6.53}$$

将式 (6.48) 中 $\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)$ 的表达式代入到式 (6.37) 中，我们发现对于涡旋磁场有以下运动方程：

$$\partial_t\boldsymbol{B}^{\rm v}(x) = \boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{v}(x)\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)\right]. \tag{6.54}$$

注意，根据式 (6.11)，有

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x) = -\frac{\hbar}{M}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x) = -\frac{\hbar}{M}\boldsymbol{B}^{\rm v}(x). \tag{6.55}$$

利用式 (6.53) 和式 (6.55)，我们就可以将 $\boldsymbol{E}^{\rm v}(x)$ 的散度重写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}^{\rm v}(x) &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{v}(x)}{c}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)\right] = \frac{1}{c}\Big\{-[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]\boldsymbol{B}^{\rm v}(x) + \boldsymbol{v}(x)\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)]\Big\}\\ &= \frac{\hbar}{Mc}[\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)]^2 + \frac{\boldsymbol{v}(x)}{c}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)].\end{aligned} \tag{6.56}$$

6.4 一个简单的例子

为了清楚地说明以上关于马德隆理论的扩展，我们来考虑一个二维的谐振子，在极坐标 (r,φ) (其中 $r\in(0,\infty)$ 且 $\varphi\in(0,2\pi)$) 中它的薛定谔方程为

$$\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}^2 + \frac{1}{2}r^2\right)\psi_{nm}(r,\varphi) = E_{nm}\psi_{nm}(r,\varphi), \tag{6.57}$$

其中，n 和 m 分别为主量子数以及方位角量子数. 为简单起见，我们令 $M=1$ 且 $\hbar=1$. 我们将特别关注

$$\psi_{11}(r,\theta)=\pi^{-1/2}\,r\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{6.58}$$

对应于场公式 (5.26) 的二维谐振子的哈密顿量为

$$H[\phi]=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2x\,\phi^*(-\boldsymbol{\nabla}^2+\boldsymbol{x}^2)\phi, \tag{6.59}$$

其中，我们已经用微分算符积分将 $|\boldsymbol{\nabla}\phi|^2$ 化为了 $-\phi^*\boldsymbol{\nabla}^2\phi$. 式 (6.58) 中的波函数对应于以下特殊的场构型：

$$\rho(r)=\pi^{-1/2}\,r,\qquad \theta=\arctan(x_2/x_1). \tag{6.60}$$

于是，我们就可以在极坐标中计算能量 (6.62)，对于 $\phi(x)=\psi_{11}(r,\varphi)$，$\phi^*(-\boldsymbol{\nabla}^2)\phi=-\phi^*(r^{-1}\partial_r r\partial_r-r^{-2}\partial_\varphi^2)\phi$ 变为

$$-\phi^*(-\boldsymbol{\nabla}^2)\phi=\frac{1}{\pi}\left(4-r^2\right)r^2\mathrm{e}^{-r^2}, \tag{6.61}$$

这样，我们就得到

$$E_{11}=\pi\int_0^\infty \mathrm{d}rr\left[\frac{1}{\pi}(4-r^2)\mathrm{e}^{-r^2}+\frac{1}{\pi}r^4\mathrm{e}^{-r^2}\right]=1+1=2. \tag{6.62}$$

现在我们来从能量的流体力学表达式再次计算上述能量，而该能量的流体力学表达式可以直接从式 (6.5) 中的拉格朗日密度写出来

$$H=\int \mathrm{d}^2x\,\mathcal{H}=\int \mathrm{d}^2x\,n(x)\left\{\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)]^2+\frac{\boldsymbol{p}^{\mathrm{os}\,2}(x)}{2}+\frac{x^2}{2}\right\}. \tag{6.63}$$

在 x_1,x_2 平面上，$\arctan(x_2/x_1)$ 有一个从原点到无穷远的割线，在此割线上 $\theta(x)=\arctan(x_2/x_1)$ 的梯度有一个跃变：

$$\nabla_1\arctan(x_2/x_1)=-x_2/r^2,\qquad \nabla_2\arctan(x_2/x_1)=x_1/r^2+2\pi\varTheta(x_1)\delta(x_2). \tag{6.64}$$

此涡旋规范场与式 (6.30) 中的是一样的.

在构成 (6.11) 中超流速度时，$\nabla_2\arctan(x_2/x_1)$ 中的第二项会被涡旋规范场 (6.30) 抵消掉，然后很简单我们就得到

$$v_1(x)=-x_2/r^2,\qquad v_2(x)=x_1/r^2. \tag{6.65}$$

由于波函数具有 $n(x)=r^2\mathrm{e}^{-r^2}/\pi$，式 (6.9) 中的渗透动量为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{os}}=\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\nabla}n(x)}{n(x)}=\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\nabla}(r^2\mathrm{e}^{-r^2})}{r^2\mathrm{e}^{-r^2}}\frac{\boldsymbol{x}}{r}=\left(\frac{1}{r}-r\right)\frac{\boldsymbol{x}}{r}. \tag{6.66}$$

将此代入式 (6.63) 中就得到能量为

$$H = \pi \int_0^\infty \mathrm{d}r r \frac{r^2}{\pi} \mathrm{e}^{-r^2} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{r} - r \right)^2 + r^2 \right], \tag{6.67}$$

该式给出的结果为 2，与式 (6.62) 的计算完全一致.

现在我们来验证运动方程 (6.54) 在此例中的有效性. 根据方程 (6.48)，在自然单位制中涡旋磁场 $\boldsymbol{B}^v(x)$ 为

$$\boldsymbol{B}^v(x) = 2\pi\delta^{(2)}(x). \tag{6.68}$$

此式与时间无关，因此方程 (6.54) 中的右手部分必须为零. 事实上，由式 (6.65) 我们看到

$$\boldsymbol{v}(x) \times \boldsymbol{B}^v(x) = 2\pi \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r} \right) \delta^{(2)}(x), \tag{6.69}$$

因此它的旋度为

$$2\pi\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r} \right) \delta^{(2)}(x) = 2\pi \left(\nabla_1 \frac{x_2}{r} - \nabla_2 \frac{x_1}{r} \right) \delta^{(2)}(x). \tag{6.70}$$

此式恒为零，原因是二维的 δ 函数具有转动对称性

$$\delta^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi r}\delta(r), \tag{6.71}$$

当对式 (6.70) 运用微分的链式法则后我们就会得到零的结果.

有意思的是，我们注意到，在此原子态中，额外的量子力 (6.41) 也恰巧为零. 利用涡旋磁场，此量子力变为

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{qu}}(x) \equiv \frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\boldsymbol{\nabla} n(x)}{n(x)} + \boldsymbol{\nabla} \right] \times \boldsymbol{B}^{\mathrm{v}}(x). \tag{6.72}$$

式 (6.68) 中 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{v}}(x)$ 场的旋度为

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}^{\mathrm{v}} = 2\pi\Big(\boldsymbol{\nabla}_2 \delta^{(2)}(x), -\boldsymbol{\nabla}_1 \delta^{(2)}(x) \Big). \tag{6.73}$$

利用 $\delta^{(2)}(x)$ 的转动对称性表述 (6.71)，此式可重写为

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}^{\mathrm{v}} = \left(\frac{x_2}{r}, -\frac{x_1}{r} \right) \left[\frac{1}{r}\delta(r) \right]' = -\left(\frac{x_2}{r}, -\frac{x_1}{r} \right) \left[\frac{1}{r^2}\delta(r) - \frac{1}{r}\delta'(r) \right]. \tag{6.74}$$

而渗透项则为

$$\frac{\boldsymbol{\nabla} n(x)}{n(x)} \times \boldsymbol{B}^{\mathrm{v}}(x) = 2 \left(\frac{1}{r} - r \right) \frac{\boldsymbol{x}}{r} \times \boldsymbol{B}^{\mathrm{v}}(x) = 2 \left(\frac{1}{r} - r \right) 2\pi \left(\frac{x_2}{r}, -\frac{x_1}{r} \right) \frac{1}{r}\delta(r). \tag{6.75}$$

不难看出，式 (6.74) 和式 (6.75) 中的这两项贡献会互相抵消. 由于它们都指向同一个方向，因此我们就将单位矢量 $(x_2,-x_1)/r$ 略去，然后比较力 (6.72) 中这两项的贡献，它们分别正比于

$$-\left[\frac{1}{r^2}\delta(r)-\frac{1}{r}\delta'(r)\right],\qquad 2\left(\frac{1}{r^2}-1\right)\delta(r). \tag{6.76}$$

将此两个表达式同乘以一个任意的光滑的转动对称的探测函数 $f(r)$，然后对其积分，我们得

$$2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, f(r)\left\{-\left[\frac{1}{r^2}\delta(r)-\frac{1}{r}\delta'(r)\right],\quad 2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r r f(r) 2\left(\frac{1}{r^2}-1\right)\delta(r)\right\}. \tag{6.77}$$

上述积分只有当 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=0$ 时才有限，因此，$f(r)$ 在 r 很小时必须具有如下行为：$f''(0)r^2/2!+f^{(3)}(0)r^3/3!+\cdots$. 将此代入到上述两个积分中，并且利用公式 $\int_0^\infty \mathrm{d}r r^n\delta'(r)=-\delta_{n,1}$ 当 $n\geqslant 1$，我们得到的结果分别为 $-2\pi f''(0)/2$ 和 $2\pi f''(0)/2$，因此式 (6.72) 中的力确实为零.

6.5 理想量子流体的 Eckart 理论

将上述方程与不含涡旋的等熵理想量子流体中的方程进行对比对我们的讨论会很有帮助. 根据 Eckart[8] 的理论，该理想量子流体由以下拉格朗日密度来描述：

$$\mathcal{L}=n(x)\frac{M}{2}\boldsymbol{v}^2(x)+\lambda(x)M\Big\{\partial_t n(x)+\boldsymbol{\nabla}\cdot[n(x)\boldsymbol{v}(x)]\Big\}-n(x)e_{\mathrm{tot}}(x), \tag{6.78}$$

其中，$e_{\mathrm{tot}}(x)$ 为式 (6.10) 中所给的每个粒子所具有的内能，$\lambda(x)$ 为拉格朗日乘子 $\lambda(x)$. 如果我们将作用量 (6.78) 对 $\lambda(x)$ 取极值，我们就再次得到了连续性方程 (6.14). 将式 (6.78) 对 $\boldsymbol{v}(x)$ 取极值，我们看到速度场将由拉格朗日乘子的梯度给出：

$$\boldsymbol{v}(x)=\boldsymbol{\nabla}\lambda(x). \tag{6.79}$$

将此式重新代回到式 (6.78) 中，该流体的拉格朗日密度就变为

$$\mathcal{L}=n(x)\frac{M}{2}[\boldsymbol{\nabla}\lambda(x)]^2-n(x)e(x)+\lambda(x)\{\partial_t Mn(x)+M\boldsymbol{\nabla}\cdot[n(x)\boldsymbol{\nabla}\lambda(x)]\}-n(x)e(x), \tag{6.80}$$

或者，在相应的作用量中进行分部积分后会有

$$\mathcal{L}=-n(x)\left\{M\partial_t\lambda(x)+\frac{M}{2}[\boldsymbol{\nabla}\lambda(x)]^2+e_{\mathrm{tot}}(x)\right\}. \tag{6.81}$$

由于标量场的梯度是无旋的，这就说明上述作用量仅仅描述无涡旋的流.

在不存在涡旋的情形下将式 (6.79) 与式 (6.11) 进行比较，我们就可确定速度势为

$$\lambda(x) \equiv \hbar\theta(x)/M. \tag{6.82}$$

6.6　旋转的超流

如果我们想研究一个以匀角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的容器中的超流时，我们必须在拉格朗日密度 (6.3) 中加入一个源

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\Omega}} = -\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{j}(x)] \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{\hbar}{2Mi}\hbar\,\phi^*(x)[\boldsymbol{x}\times \overleftrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}]\phi(x) \cdot \boldsymbol{\Omega}, \tag{6.83}$$

其中，$\boldsymbol{j}(x)$ 为流密度 [请对照式 (2.64)]，而 $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{j}(x)$ 为该流体的角动量密度. 将 $\phi(x)$ 用 $\sqrt{n(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ 代换后，式 (6.83) 就变为

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\Omega}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla_{\varphi}n(x) - Mn(x)\boldsymbol{v}(x) \cdot \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}, \tag{6.84}$$

其中，$\nabla_{\varphi}n(x)$ 为绕转轴 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向的密度的方位角导数，而

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(x) \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x} \tag{6.85}$$

为当流体整体像刚体一样转动的话位于 $\boldsymbol{x}$ 点的粒子应具有的速度. 与第一项相联的作用量通过分部积分可知为零，因为 $n(x)$ 围绕转轴 $\boldsymbol{\Omega}$ 具有周期性. 将此项加入到流体力学拉格朗日密度 (6.5) 中，并对 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(x)$ 进行二次型配整，我们就得到

$$\mathcal{L}{=}n(x)\left\{-\hbar[\partial_t\theta(x)+\theta_t^{\mathrm{v}}(x)]-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)-\frac{M}{\hbar}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(x)\right]^2-e_{\mathrm{tot}}(x)-n(x)V_{\boldsymbol{\Omega}}(x)\right\}, \tag{6.86}$$

其中，$V_{\boldsymbol{\Omega}}(x)$ 为一个简谐势

$$V_{\boldsymbol{\Omega}}(x) \equiv -\frac{M}{2}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}^2(x) = -\frac{M}{2}\boldsymbol{\Omega}^2 r_{\perp}^2, \tag{6.87}$$

它平方依赖于离开转轴的距离 $r_{\perp}$.

速度矢量 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(x)$ 具有一个常旋度

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(x) = 2\,\boldsymbol{\Omega}. \tag{6.88}$$

因此它无法通过一个相位变换 $\phi(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x)}\phi(x)$ 而吸收到波函数中，因为这会使波函数变成多值的. 转动超流的能量只可能通过涡旋线三角晶格来降到最低. 它们

的总数 N 将使得总的通量与一个按 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的固体中的相等. 这样，如果我们沿绕转轴半径为 R 的圆 C 积分的话，被此回路所包围的涡旋的数目为

$$M\oint_C \mathrm{d}x\cdot v = 2\pi\hbar N. \tag{6.89}$$

这样，涡旋规范场 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)$ 的平均值将与具有常涡旋的旋转场 $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\Omega}}(x)$ 相互抵消.

涡旋三角晶格已在旋转的 ^{4}He 超流[11] 以及最近的玻色–爱因斯坦凝聚体[12] 中观测到了. 20 世纪 60 年代，Tkachenko 以及其他人 [13] 对 ^{4}He 超流中的这种晶格理论进行了发展，最近很多研究者又将此理论延伸至玻色–爱因斯坦凝聚体 [14].

文献与注记

[1] R.P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Addison Wesley, New York, 1972, Sec. 10.12.

[2] E. Madelung, Z. Phys. **40**,322 (1926).
以及
T.C. Wallstrom, Phys. Rev. A **49**, 1613 (1994).

[3] 马格努斯力是以德国物理学家海因里希 · 马格努斯（Heinrich Magnus）的名字命名的，他在 1853 年首次对它进行了描述. 按照下面这本书的说法：
J. Gleick, *Isaac Newton*, Harper Fourth Estate, London (2004),
牛顿在此之前 180 年前在他的剑桥学院里观察别人打网球时就发现了这个效应. 飞机能够飞起来也正是因为机翼周围空气环流而导致的马格努斯力. 这个环流在起飞的时候形成，并且在机场留下一个大小相等方向相反的环流. 后者已造成出发时距离喷气式飞机过近的小型飞机失事. 利用这一效应，德国工程师 Anton Flettner 在 20 世纪 20 年代用旋翼而不是风帆来驱动船只. 他的 Baden-Baden 号船在 1926 年横跨大西洋. 目前，只有法国的建于 1985 年的科考船 Alcyone 依然采用这样的驱动，它的两个旋翼的形状跟飞机的机翼一样.

[4] H. Ertel, *Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz*, Meteorol. Z. **59**, 277 (1942); Naturwissenschaften **30**, 543 (1942); *Über hydrodynamische Wirbelsätze*, Physik. Z. **43**, 526 (1942); *Über das Verhältnis des neuen hydrodynamischen Wirbelsatzes zum Zirkulationssatz von V. Bjerknes*, Meteorol. Z. **59**, 385 (1942).

[5] M. Caliari, G. Inverso, and L.M. Morato, *Dissipation caused by a vorticity field and generation of singularities in Madelung fluid*, New J. Phys. **6**, 69 (2004).

[6] M.I. Ioffredo and L.M. Morato, *Lagrangian Variational Principle in Stochastic Mechanics: Gauge Structure and Stability*, J. Math. Phys. **30**, 354 (1988).

[7] E. Nelson, *Quantum Fluctuations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[8] C. Eckart, Phys. Rev. **54**, 920 (1938); W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, Pitman, London, 1968;
A.M.J. Schakel, *Boulevard of Broken Symmetries*, (cond-mat/9805152).

[9] 关于详细的综述及相关文献，请参阅：
C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001;
L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press (Intern. Ser. Monog. on Physics), Oxford, 2003.

[10] 关于详细的综述及相关文献，请参阅：
I. Bloch, *Ultracold Quantum Gases in Optical Lattices*, Nat. Phys. **1**, 23 (2005).

[11] E.J. Yarmchuk, M.J.V. Gordon, and R.E. Packard, Phys. Rev. Lett. **43**, 214 (1979);
E.J. Yarmchuk and R.E. Packard, J. Low Temp. Phys. **46**, 479 (1982).

[12] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999);
J.R. Abo-Shaeer, C. Raman, J.M. Vogels, and W. Ketterle, Science **292**, 476 (2001);
V. Bretin, S. Stock, Y. Seurin, and J. Dalibard, *Fast Rotation of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **92**, 050403 (2004);
S. Stock, V. Bretin, F. Chevy, and J. Dalibard, *Shape Oscillation of a Rotating Bose-Einstein Condensate*, Europhys. Lett. **65**, 594 (2004).

[13] V.K. Tkachenko, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49**, 1875 (1965) [Sov. Phys.–JETP **22**, 1282 (1966)]; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **50**, 1573 (1966) [Sov. Phys.–JETP **23**, 1049 (1966)]; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **56**, 1763 (1969) [Sov. Phys.–JETP **29**, 945 (1969)].
D. Stauffer and A.L. Fetter, *Distribution of Vortices in Rotating Helium II*, Phys. Rev. **168**, 156 (1968);
G. Baym, *Stability of the Vortex Lattice in a Rotating Superfluid*, Phys. Rev. B **51**, 11697 (1995).

[14] A.L. Fetter, *Rotating Vortex Lattice in a Condensate Trapped in Combined Quadratic and Quartic Radial Potentials*, Phys. Rev. A **64**, 3608 (2001);
A.L. Fetter and A.A. Svidzinsky, *Vortices in a Trapped Dilute Bose-Einstein Condensate*, J. Phys.: Condensed Matter **13**, R135 (2001);
A.L. Fetter, B. Jackson, and S. Stringari, *Rapid Rotation of a Bose-Einstein Condensate in a Harmonic Plus Quartic Trap*, Phys. Rev. A **71**, 013605 (2005);
A.A. Svidzinsky and A.L. Fetter, *Normal Modes of a Vortex in a Trapped Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. A **58**, 3168 (1998);
K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate* Phys. Rev. A **65**, 023603 (2002); *Nonlinear dynamics of vortex lattice formation in a rotating Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **67**, 033610 (2003).

第 7 章　带电超流动力学及超导

There is no excellent beauty
that hath not some strangeness in the proportion.

FRANCIS BACON (1561～1626)

当存在电磁场时，我们将拉格朗日密度 (6.3) 中的导数扩展为包含最小耦合矢势 $A^\mu(x) = \big(A^0(x), \boldsymbol{A}(x)\big) = \big(A_t(x)/c, \boldsymbol{A}(x)\big)$ 的协变导数

$$\partial_t\phi(x) \to D_t\phi(x) \equiv \left[\partial_t + \mathrm{i}\frac{q}{\hbar c}A_t(x)\right]\phi(x), \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(x) \to \boldsymbol{D}\phi(x) \equiv \left[\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}\frac{q}{\hbar}\boldsymbol{A}(x)\right]\phi(x), \tag{7.2}$$

其中, q 为超流中粒子所携带电荷. 在拉格朗日密度 (6.5) 中，矢势将会以下述形式出现：

$$\mathcal{L} = n(x)\left\{-\hbar\left[\partial_t\theta(x) + \theta_t^{\mathrm{v}}(x) + \frac{q}{\hbar c}A_t(x)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x) - \frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{A}(x)\right]^2 - e_{\mathrm{tot}}(x)\right\}. \tag{7.3}$$

于是，矢势就很简单地加到涡旋规范场上

$$\theta_t^{\mathrm{v}}(x) \to \theta_t^{\mathrm{v}}(x) + \frac{q}{\hbar c}A_t(x), \quad \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x) \to \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x) + \frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{A}(x), \tag{7.4}$$

该拉格朗日密度必须由麦克斯韦电磁场拉格朗日密度 (2.85) 加以补充.

反过来，我们可以取式 (6.5) 中的拉格朗日密度，使其与电磁场耦合，即采用式 (7.1) 和式 (7.2) 中的协变导数，同时将矢势代换为

$$A_t(x) \to \tilde{A}_t(x) \equiv A_t(x) + q_m\theta_t^{\mathrm{v}}(x), \qquad \boldsymbol{A}(x) \to \tilde{\boldsymbol{A}}(x) \equiv \boldsymbol{A}(x) + q_m\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x), \tag{7.5}$$

其中，我们引入了一个与电荷 q 相对应的磁荷：

$$q_m = \frac{\hbar c}{q}. \tag{7.6}$$

于是我们就可以将式 (7.3) 简写为

$$\mathcal{L} = n(x)\left\{-\left[\hbar\partial_t\theta(x) + \frac{q}{c}\tilde{A}_t(x)\right] - \frac{1}{2M}\left[\hbar\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \frac{q}{c}\tilde{\boldsymbol{A}}(x)\right]^2 - e_{\mathrm{tot}}(x)\right\}. \tag{7.7}$$

依赖于时间的场 $\phi(t,\boldsymbol{x})\equiv\phi(x)$ 的运动方程就为

$$\mathrm{i}\left[\hbar\partial_t+\frac{q}{c}\tilde{A}_t(x)\right]\phi(x)=\left\{-\frac{1}{2M}\left[\hbar\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\frac{q}{c}\tilde{\boldsymbol{A}}\right]^2 -c_0^2M+\frac{c_0^2M}{n_0}\phi^*(x)\phi(x)\right\}\phi(x). \tag{7.8}$$

7.1　带电超流的流体力学描述

对于一个带电的超流，它的速度场由下式给出：

$$\boldsymbol{v}(x)\equiv\frac{1}{M}\left[\hbar\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\frac{q}{c}\tilde{\boldsymbol{A}}(x)\right]=\frac{\hbar}{M}\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)-\frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{A}(x)\right]. \tag{7.9}$$

此式在电磁规范变换和涡旋规范变换下均不变. 对于粒子数密度相对基态值的偏离 $\delta n(x)\equiv n(x)-n_0$ 而言，式 (7.7) 中的流体力学拉格朗日密度可写为

$$\mathcal{L}=-n(x)\left[\hbar\partial_t\theta(x)+\hbar\theta_t^{\mathrm{v}}(x)+\frac{q}{c}A_t(x)+\frac{M}{2}\boldsymbol{v}^2(x)+e_{\mathrm{tot}}(x)\right]. \tag{7.10}$$

很简单，相应的电荷密度和电流密度就是 q 分别乘以式 (6.13) 中的粒子数密度和流密度. 或者，我们也可通过 Noether 定理 (3.117) 来求这两个量：

$$\rho(x)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_t(x)}=qn(x),\qquad \boldsymbol{J}(x)=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{A}(x)}=qn(x)\boldsymbol{v}(x). \tag{7.11}$$

它们满足**连续性方程**

$$q\partial_t n(x)=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}(x)=0, \tag{7.12}$$

而这也可通过将相应的作用量对 $\theta(x)$ 取极值而得到.

作用量对 $n(x)$ 取泛函极值就给出

$$\hbar\partial_t\theta(x)+\hbar\theta_t^{\mathrm{v}}(x)+\frac{q}{c}A_t(x)+\frac{M}{2}\boldsymbol{v}^2(x)+h_{\mathrm{tot}}(x)=0, \tag{7.13}$$

其中，$p^{\mathrm{qu}}(x)$ 为方程 (6.21) 中定义的量子压强. 这是基于涡旋和电磁场对式 (6.14) 和式 (6.15) 中马德隆方程的推广. 最后一项或许碰巧可以由方程式 (6.16) 中的单粒子焓替换掉.

对方程 (7.13) 取梯度就给出了运动方程

$$M\partial_t\boldsymbol{v}(x)+q\left[\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A}(x)+\boldsymbol{\nabla}A_0(x)\right] +\hbar\left[\partial_t\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)+\boldsymbol{\nabla}\theta_t^{\mathrm{v}}(x)\right]+\frac{M}{2}\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{v}^2(x)=-\boldsymbol{\nabla}h_{\mathrm{tot}}(x). \tag{7.14}$$

此处代入恒等式 (6.25)，我们得到

$$M\partial_t \boldsymbol{v}(x) + M[\boldsymbol{v}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{v}(x) = -\boldsymbol{\nabla} h_{\text{tot}}(x) + \boldsymbol{f}^{\text{tot}}(x), \tag{7.15}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^{\text{tot}}(x) = & -q\left[\frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{\nabla} A_0(x)\right] - \hbar\left[\partial_t \boldsymbol{\theta}^{\text{v}}(x) + \boldsymbol{\nabla}\theta_t^{\text{v}}(x)\right] \\ & - M\boldsymbol{v}(x)\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]\,.\end{aligned} \tag{7.16}$$

在方程的右手边，我们可以先将式 (7.9) 中的速度代入，然后是电磁场的定义方程 (2.74) 和 (2.80)，最后是方程 (6.48) 中的涡旋电磁场. 于是，我们就发现 $\boldsymbol{f}^{\text{tot}}(x) = \boldsymbol{f}^{\text{em}}(x) + \boldsymbol{f}^{\text{v}}(x)$ 其实是式 (6.52) 的涡旋力 $\boldsymbol{f}^{\text{v}}(x)$ 和式 (1.186) 中运动带电粒子所受洛伦兹力的和. 考虑到方程 (6.33)，涡旋力 $\boldsymbol{f}^{\text{v}}(x)$ 恰好为零，因此我们可以将它从 $\boldsymbol{f}^{\text{tot}}(x)$ 中移除.

当然，我们还需给出电磁场应满足的方程

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho \qquad \text{(库仑定律)}, \tag{7.17}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{J} \qquad \text{(安培定律)}, \tag{7.18}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(不存在磁单极)}, \tag{7.19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(法拉第定律)}. \tag{7.20}$$

式 (7.15) 的经典极限连同式 (7.17)∼ 式 (7.20) 一起构成了著名的磁流体力学的运动方程[1].

7.2　带电超流的伦敦理论

如果我们在方程 (7.9) 中忽略掉涡旋规范场的话，式 (7.11) 中的流密度就变为

$$\boldsymbol{J}(x) \equiv qn(x)\boldsymbol{v}(x) = \frac{qn(x)}{M}\left[\hbar\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(x)\right\}, \tag{7.21}$$

其中，电荷电量 q 等于 $-2e$，因为超导中的载流子为电子的库珀对.

海因兹和弗利兹这一对伦敦兄弟[2] 所研究的是密度为常数 $n(x) \equiv n_0$ 的超导，这也正是将式 (5.15) 中流体力学极限也称为伦敦极限的原因. 他们通过以下规范变换：

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{c}{q}\,\hbar\partial_\mu\theta, \tag{7.22}$$

将相位变量 $\theta(x)$ 吸收到了矢势 $\boldsymbol{A}(x)$ 中，于是超导电流就直接变为与矢势成正比关系：

$$\boldsymbol{J}(x) \equiv q n_0 \boldsymbol{v}(x) = -\frac{q^2 n_0}{cM} \boldsymbol{A}'(x). \tag{7.23}$$

此矢势满足下述横场规范条件：

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}'(x) = 0, \tag{7.24}$$

这就使得式 (7.23) 与式 (7.12) 中的流守恒律相一致.

将此式对时间求导，并利用式 (2.74) 中由矢势给出的电场定义，伦敦兄弟得到了该超导电流的运动方程

$$\partial_t \boldsymbol{J}(x) = \frac{q^2 n_0}{M} [\boldsymbol{E}(x) + \boldsymbol{\nabla} A_0'(x)]. \tag{7.25}$$

在此，他们假定电势 $A_0'(x)$ 在超导体内为零，于是就得到了他们著名的**第一伦敦方程**：

$$\partial_t \boldsymbol{J}(x) = \frac{q^2 n_0}{M} \boldsymbol{E}(x). \tag{7.26}$$

第二步中，对于常数 $n(x) = n_0$，他们构造了超导电流 (7.21) 的旋度，得到了**第二伦敦方程**：

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}(x) + \frac{q^2 n_0}{Mc} \boldsymbol{B}(x) = 0. \tag{7.27}$$

为了验证这两个伦敦方程的协调性，我们可对式 (7.26) 取旋度，并利用式 (7.20) 中的法拉第电磁感应定律，于是就得到

$$\partial_t \left[\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}(x) + \frac{q^2 n_0}{Mc} \boldsymbol{B}(x) \right] = 0, \tag{7.28}$$

此式与式 (7.27) 正相一致.

有了第二伦敦方程 (7.27)，我们可以立即推导出迈斯纳效应. 首先我们回顾如何从式 (1.188) 和式 (1.190) 中的安培定律和法拉第定律结合磁源条件 (1.189) 而得到电磁波方程

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(x) + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{B}(x) = -\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{B}(x) + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{B}(x) = \frac{1}{c} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}(x). \tag{7.29}$$

当无电流时，此方程描述以光速 c 传播的电磁波. 在超导体中，式 (7.29) 右手边将用第二伦敦方程 (7.27) 替换掉，就给出了下述波动方程：

$$\left[\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \boldsymbol{B}(x) - \boldsymbol{\nabla}^2 + \lambda_{\mathrm{L}}^{-2} \right] \boldsymbol{B}(x) = 0, \tag{7.30}$$

其中

$$\lambda_{\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{Mc^2}{n_0 q^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Mc^2}{n_0 e^2}} = \frac{1}{2\sqrt{n_0 \lambda_M 4\pi\alpha}}, \tag{7.31}$$

$\alpha \approx 1/137.0359\cdots$ 为精细结构常数 (1.145)，而 $\lambda_M = \hbar/Mc$ 为质量 M 的粒子的康普顿波长.

方程 (7.30) 显示，在超导体内部，磁场具有一个有限的**伦敦穿透深度** $\lambda_{\rm L}$.

7.3　在伦敦方程中加入涡旋

上一节中的进展使得我们可以对伦敦方程进行修正. 首先我们加入涡旋规范场，这样，式 (7.21) 就变成

$$\boldsymbol{J}(x) \equiv qn(x)\boldsymbol{v}(x) = \frac{\hbar qn(x)}{M}\left[\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \boldsymbol{\theta}^{\rm v}(x)\right] - \frac{q^2 n(x)}{cM}\boldsymbol{A}(x). \tag{7.32}$$

在伦敦极限下，$n(x) \approx n_0$，我们再次将式 (7.32) 对时间求导，并利用式 (6.48)，得

$$\partial_t \boldsymbol{J}(x) = \frac{\hbar qn_0}{M}\left[\boldsymbol{\nabla}\partial_t\theta(x) + \boldsymbol{E}^{\rm v}(x) + \boldsymbol{\nabla}\theta_t^{\rm v}(x)\right] + \frac{q^2 n_0}{M}[\boldsymbol{E}(x) + \boldsymbol{\nabla}A_0(x)]. \tag{7.33}$$

同以前一样，我们通过令 $\theta_t^{\rm v}(x) = 0$ 而将涡旋规范固定下来，同时将相位变量 $\theta(x)$ 通过规范变换 (7.22) 吸收到矢势 $\boldsymbol{A}$ 中. 这样我们就得到了涡旋修正的第一伦敦方程

$$\partial_t \boldsymbol{J}(x) = \frac{q^2 n_0}{M}[\boldsymbol{E}(x) + q_m \boldsymbol{E}^{\rm v}(x) + \boldsymbol{\nabla}A_0(x)], \tag{7.34}$$

其中, q_m 为式 (7.6) 中与电荷 q 相联的磁荷.

取同上面一样的涡旋和电磁规范固定，在伦敦极限下对方程 (7.32) 取旋度，我们就得到了涡旋修正的第二伦敦方程

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}(x) + \frac{q^2 n_0}{Mc}\left[\boldsymbol{B}(x) + q_m \boldsymbol{B}^{\rm v}(x)\right] = 0. \tag{7.35}$$

此式与式 (7.34) 的相容性可通过对式 (7.34) 取旋度然后利用式 (7.20) 中的法拉第感应定律以及涡旋中的类似表达式 (6.51) 来加以检验. 结论就是式 (7.35) 对时间的导数为零，而这当然是正确的.

将式 (7.35) 代入式 (7.29) 中的组合麦克斯韦方程中就得到了式 (7.30) 经涡旋修正后的方程：

$$\left[\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + \lambda_{\rm L}^{-2}\right]\boldsymbol{B}(x) = -\lambda_{\rm L}^{-2} q_m\, \boldsymbol{B}^{\rm v}(x). \tag{7.36}$$

从这个式子我们可以直接给出涡旋线间的相互作用

$$\mathcal{A}_{\rm int} = -\frac{q_m^2}{2}\int {\rm d}^4x{\rm d}^4x'\, \boldsymbol{B}^{\rm v}(x) G^R_{\lambda_{\rm L}}(x-x')\boldsymbol{B}^{\rm v}(x'), \tag{7.37}$$

其中, $G^R_{\lambda_{\rm L}}(x-x')$ 为推迟汤川格林函数

$$G^R_{\lambda_\mathrm{L}}(x-x') = \frac{1}{-c^{-2}\partial_t^2 + \boldsymbol{\nabla}^2 - \lambda_\mathrm{L}^{-2}}(x,x')$$
$$= -\Theta(t-t')\frac{e^{-R/\lambda_\mathrm{L}}}{4\pi c^2 R}\delta(t-t'-R/c), \tag{7.38}$$

其中，R 用来标记空间距离 $R \equiv |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$.

在 $\lambda_\mathrm{L} \to \infty$ 的极限下，此式回到库仑形式，而这正是电动力学中著名的 Liènard-Wiechert 势的起源.

对于缓慢移动的涡旋，这种推迟是可以忽略的，并且，当把式 (7.6) 中的 q_m 和式 (6.48) 中的 $\boldsymbol{B}^\mathrm{v}(x)$ 代入后，在式 (7.37) 中对时间求导，我们就得到

$$\mathcal{A}_\mathrm{int} = -\frac{\hbar^2 c^2}{2q^2}\int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{j}^\mathrm{v}(\boldsymbol{x},t)\frac{1}{-\boldsymbol{\nabla}^2+\lambda_\mathrm{L}^{-2}}\boldsymbol{j}^\mathrm{v}(\boldsymbol{x},t). \tag{7.39}$$

如果我们取自然单位 $\hbar = c = M = 1$ 的话，这与之前配分函数 (5.279) 中的静态相互作用能是一致的.

7.4　超导的流体力学描述

对于一个超导体，上述带电超流理论其实并不可用，因为上述最初的金兹堡–朗道拉格朗日密度只能在相变点附近得到[3]，并且在此处它具有一个纯衰减的时间行为，因此在式 (6.2) 中并不含有对时间求导的项. 然而，在零温时，超流是可以用简单的流体力学方程来描述. 由 BCS 理论，我们可以在简谐近似下导出式 (6.46) 形式的拉格朗日量[4]

$$\mathcal{L}_0 = -n_0\hbar\partial_t\theta(x) + \frac{n_0\hbar^2}{2M}\left\{\frac{1}{c_0^2}\left[\partial_t\theta(x)+\theta_t^\mathrm{v}(x)\right]^2 - \left[\boldsymbol{\nabla}\theta(x)-\boldsymbol{\theta}^\mathrm{v}(x)\right]^2\right\} + \cdots, \tag{7.40}$$

其第二声速为[3]

$$c_0 = \frac{v_\mathrm{F}}{\sqrt{3}}, \tag{7.41}$$

其中，$v_\mathrm{F} = p_\mathrm{F}/M = \sqrt{2ME_\mathrm{F}}$ 为费米球面上电子的速度，它由以下电子密度计算而得 (它为库珀对密度 n_0 的两倍)：

$$n_\mathrm{int} = 2\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_\mathrm{F}^3}{3\hbar^3\pi^2} = \frac{v_\mathrm{F}^3}{3\hbar^3M^3\pi^2}. \tag{7.42}$$

式 (7.40) 中的省略号代表那些在长波极限下可以省略的项. 这与式 (6.46) 中的玻色–拉格朗日量是不同的. 从那个式子我们可以看到第二声激发态的能谱具有如下形式的第一修正项：

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) = c_0|\boldsymbol{k}|(1-\gamma\boldsymbol{k}^2+\cdots), \tag{7.43}$$

它含有一个**负**的 $\gamma = -\xi < 0$. 与之相反，在一个处于 $T = 0$ 的超导体中，BCS 理论给出一个**正**的 γ：

$$\gamma = \frac{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}{45\Delta^2} = \frac{1}{45} l^2, \quad l \equiv \hbar\sqrt{1/M\Delta}, \tag{7.44}$$

其中，Δ 为超导中准粒子激发态能隙，它的量级为转换温度 (乘以 k_{B}) (参见 7A). 长度尺度 l 则与零温相干长度同量级.

γ 的正定性保证了长波激发态的稳定性而不被衰减，因为它可使 $|\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2|[1 - \gamma(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)^2] < |\boldsymbol{k}_1|(1 - \gamma\boldsymbol{k}_2^1) + |\boldsymbol{k}_2|(1 - \gamma\boldsymbol{k}_2^2)$.

现在，我们通过最小耦合来加入电磁场 [请与式 (7.7) 进行对比]，我们发现

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = & -n_0\hbar\left[\partial_t\theta(x) + \frac{q}{\hbar c}\tilde{A}_t(x)\right] \\ & + \frac{n_0\hbar^2}{2M}\left\{\frac{1}{c_0^2}\left[\partial_t\theta(x) + \frac{q}{\hbar c}\tilde{A}_t(x)\right]^2 - [\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \frac{q}{\hbar c}\tilde{\boldsymbol{A}}(x)]^2\right\},\end{aligned} \tag{7.45}$$

外加式 (2.85) 中的麦克斯韦–拉格朗日密度.

对 $\mathcal{L}_0$ 作关于 $-\boldsymbol{A}(x)/c$ 的导数就给出电流密度 [参看式 (3.117)]：

$$\boldsymbol{J}(x) = qn_0\boldsymbol{v}(x) = \frac{qn_0\hbar}{M}[\boldsymbol{\nabla}\theta(x) - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(x)] - \frac{q^2 n_0}{cM}\boldsymbol{A}(x). \tag{7.46}$$

而从 $\mathcal{L}_0$ 对 $-A_t(x)/c$ 的导数我们可以得到电荷密度：

$$q[n(x) - n_0] = \frac{qn_0\hbar}{M}\frac{1}{c_0^2}[\partial_t\theta(x) + \theta_t^{\mathrm{v}}(x)] - \frac{q^2 n_0}{c_0^2 cM}A_t(x). \tag{7.47}$$

如果我们将 $\theta(x)$ 场吸收到矢势中的话，我们就可得到与式 (7.23) 中一样的超流：

$$\boldsymbol{J}(x) = -\frac{q^2 n_0}{cM}\tilde{\boldsymbol{A}}(x), \tag{7.48}$$

而相应的电荷密度变为

$$qn(x) = -\frac{q^2 n_0}{c_0^2 cM}\tilde{A}_t(x). \tag{7.49}$$

电流守恒定律给出

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{c^2}{c_0^2}\frac{1}{c^2}\partial_t A_t = 0. \tag{7.50}$$

请注意它在时间导数项前的大的因子 c^2/c_0^2 是不同于式 (2.106) 中洛伦兹规范的：

$$\partial_a A^a(x) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x) + \partial_0 A^0(x) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x) + \frac{1}{c^2}\partial_t A^t(x) = 0. \tag{7.51}$$

因为 $c_0 = v_{\mathrm{F}}/\sqrt{3}$ 远小于光速 c，基本上为它的 1/100，因此 c^2/c_0^2 差不多为 10^4 这个量级.

至此，我们想起，基于式 (5.259) 中的定义，式 (7.31) 中的穿透深度 $\lambda_{\rm L}$ 与式 (6.44) 中的相干长度 ξ 的比值定义了金兹堡参量 $\kappa \equiv \lambda_{\rm L}/\sqrt{2}\xi$. 这就使得我们可以用 κ 将比值 c_0/c 表示为

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\sqrt{n_0\lambda_M^3 q^2}. \tag{7.52}$$

如果将式 (7.23) 中的电流密度代入组合麦克斯韦方程 (7.29)，我们就再一次得到了屏蔽的磁场 $\boldsymbol{B}$ 及其涡旋修正表述 (7.36) 所满足的场方程 (7.30).

然而，由于因子 c^2/c_0^2，A_0 的场方程却具有完全不同的波的传播特性. 将作用量 $\mathcal{A} = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\,[\mathcal{L}^{\rm em}] + \mathcal{L}_0$ 对 $-A_0(x) = -A_t(x)/c$ 作变分，得到

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x) = qn(x). \tag{7.53}$$

然后将式 (2.74) 中的 $\boldsymbol{E}(x)$ 以及式 (7.49) 中的 $qn(x)$ 代入轴规范中，则给出

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 A^0(x) - \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x) = -\frac{q^2 n_0}{c_0^2 M}A^0(x). \tag{7.54}$$

利用式 (7.50) 将 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)$ 消掉，我们就得到

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}^2 + \lambda_{\rm L\,0}^{-2}\right)A^0(x) - \frac{c^2}{c_0^2}\frac{1}{c^2}\partial_t^2 A^0 = 0. \tag{7.55}$$

此方程表明 $A^0(x)$ 场可在

$$\lambda_{\rm L\,0} = \frac{c_0}{c}\lambda_{\rm L} = \frac{c_0}{c}\frac{1}{\sqrt{n_0\lambda_M q^2}} \tag{7.56}$$

的深度上穿透超导体，而这个基本上比磁场的穿透深度 $\lambda_{\rm L}$ 小两个量级. 此外，$A^0(x)$ 的传播速度不是光速 c 而是更小的速度 $c_0 = v_{\rm F}/\sqrt{3}$.

注意 $A^0(x)$ 的方程 (7.55) 中并不存在任何的规范自由度，方程 (7.50) 已将规范固定下来了. 我们可以将 $A^0(x)$ 通过式 (7.49) 用 $qn(x)$ 来表示，这给出

$$\left[-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \frac{c_0^2}{c^2}\left(-\boldsymbol{\nabla}^2 + \lambda_{\rm L\,0}^{-2}\right)\right]n(x) = 0. \tag{7.57}$$

通过这种方法，我们就可以很清楚地看到上面谈到的性质. 利用式 (6.52) 中的 $\boldsymbol{f}^{\rm v}(x)$ 为零，以及方程 (6.55)，我们就可以将 $\boldsymbol{E}^{\rm v}(x)$ 的散度重写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}^{\rm v}(x) &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{v}(x)\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)] = -[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x)]\boldsymbol{B}^{\rm v}(x) + \boldsymbol{v}(x)\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)]\\ &= \frac{\hbar}{M}[\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)]^2 + \boldsymbol{v}(x)\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}^{\rm v}(x)].\end{aligned} \tag{7.58}$$

矢势场 $A^\mu(x)$ 的拉格朗日密度还可写为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A^a(x)\left(\partial^2 g_{ab} - \partial_a\partial_b\right)A^b(x) + \frac{m_A^2}{2}\{a[A^0(x)]^2 - \boldsymbol{A}^2(x)\}, \tag{7.59}$$

其中，$m_A^2 = \lambda_{\rm L}^{-2}$ 而 $u^2 = c^2/c_0^2$. 在外源 $j^a(x)$ 存在的情况下，场方程为

$$\left[(\partial^2 g_{ab} - \partial_a\partial_b) + m_A^2 g_{ab} + m_A^2(u^2-1)h_{ab}\right]A^b(x) = j_a(x), \tag{7.60}$$

其中，h_{ab} 只有一个非零的矩阵元 $h_{00} = 1$. 将式 (7.60) 用 ∂_a 进行缩并，并利用流守恒律 $\partial_a j^a(x) = 0$，得

$$\partial_a A^a(x) + (u^2-1)\partial_0 A^0(x) = 0, \tag{7.61}$$

这就是散度方程式 (7.50). 将此回代入式 (7.60)，给出

$$\left(u^2\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + u^2 m_A^2\right)A^0(x) = j^0(x), \tag{7.62}$$

$$(\partial^2 + m_A^2)\boldsymbol{A}(x) + \frac{u^2-1}{u^2}\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)] = \boldsymbol{j}(x). \tag{7.63}$$

为了验证一致性，我们对第二个式子取散度，同时利用电流守恒定律，得

$$-(\partial^2 + m_A^2)[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)] + \frac{u^2-1}{u^2}\boldsymbol{\nabla}^2[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)] = \partial_0 j^0(x). \tag{7.64}$$

然后，将 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(x)$ 用 $-u^2\partial_0 A^0(x)$ 代替掉，我们就得到

$$u^2\partial_0(\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2)A^0(x) + (u^2-1)\partial_0\boldsymbol{\nabla}^2 A^0(x) = \partial_0 j^0(x), \tag{7.65}$$

这正是式 (7.62) 对时间求导.

方程 (7.62) 的逆为

$$A^0(x) = \frac{1}{u^2}\left(\partial_0^2 - u^{-2}\boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2\right)^{-1} j^0(x). \tag{7.66}$$

为了反转方程式 (7.63)，我们用空间横向和纵向投影矩阵

$$P_{ij}^t = \delta_{ij} - \frac{\nabla_i\nabla_j}{\boldsymbol{\nabla}^2}, \qquad P_{ij}^l = \frac{\nabla_i\nabla_j}{\boldsymbol{\nabla}^2} \tag{7.67}$$

将其重新写为

$$\left[(\partial^2 + m_A^2)P^t + (\partial_0^2 - u^{-2}\boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2)P^l\right]\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{j}(x). \tag{7.68}$$

这可以立即反转为

$$\boldsymbol{A}(x) = \left[(\partial^2 + m_A^2)^{-1}P^t + (\partial_0^2 - u^{-2}\boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2)^{-1}P^l\right]\boldsymbol{j}(x). \tag{7.69}$$

从这些方程，我们就可以导出外源流的相互作用

$$\mathcal{A}^{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{1}{u^2} j^0(x) \frac{1}{\partial_0^2 - u^{-2}\boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2} j^0(x) - \boldsymbol{j}^l(x) \frac{1}{\partial_0^2 - u^{-2}\boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2} \boldsymbol{j}^l(x) \right.$$
$$\left. - \boldsymbol{j}^t(x) \frac{1}{\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2} \boldsymbol{j}^t(x) \right]. \tag{7.70}$$

只有横向电流对相对论性推迟相互作用有影响. 由于电流的守恒性，前两项可以合并起来，于是我们就得到

$$\mathcal{A}^{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[j^0(x) \frac{u^{-2} - \boldsymbol{\nabla}^{-2}\partial_0^2}{\partial_0^2 - u^{-2}\boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2} j^0(x) - \boldsymbol{j}^t(x) \frac{1}{\partial_0^2 - \boldsymbol{\nabla}^2 + m_A^2} \boldsymbol{j}^t(x) \right]. \tag{7.71}$$

对于 $u^2 = c^2/c_0^2 = 1$，此式就约化为通常的相对论性相互作用

$$\mathcal{A}^{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4 x \, j_\mu(x) \frac{1}{\partial^2 + m_A^2} j^\mu(x). \tag{7.72}$$

附　　录

7A　超导的激发谱

为了理解超导体流体力学方程对时间的依赖性，我们需要了解它的低能激发谱. 我们在这里将从 BCS 理论[4] 对它进行推导. 电子结对形成库珀对，相应的准粒子能量具有如下形式：

$$E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\xi^2(\boldsymbol{p}) + \Delta^2}, \tag{7A.1}$$

其中

$$\xi(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M} - \mu \tag{7A.2}$$

为由化学势 μ 量起的自由电子能量. 在零温时，它等于费米能量 $\epsilon_{\mathrm{F}} = Mv_{\mathrm{F}}^2/2$.

7A.1　能隙方程

准粒子能量表达式中包含一个能隙 Δ，它由以下**能隙方程**决定：

$$\frac{1}{g} = \frac{T}{V} \sum_{\omega_m, \boldsymbol{p}} \frac{1}{\omega_m^2 + E^2(\boldsymbol{p})} = \frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{2E(\boldsymbol{p})} \tanh \frac{E(\boldsymbol{p})}{2T}, \tag{7A.3}$$

其中，g 为费米面附近电子间由于电–声子相互作用而引起的短程吸引相互作用. 对 ω_m 的求和则是遍历 **Matsubara 频率** $\omega_m = 2\pi k_{\mathrm{B}} T m$, 其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 式 (7A.3) 中第二和第三项的等价是基于以下求和公式 [3]：

$$T \sum_{\omega_m} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m \eta}}{\mathrm{i}\omega_m - E} = n(E), \tag{7A.4}$$

其中，$0 < \eta \ll 1$ 为一个无穷小参量以使求和收敛，$n(E)$ 则是费米分布函数

$$n(E) \equiv \frac{1}{\mathrm{e}^{E/T}+1} = \frac{1}{2}\left(1-\tanh\frac{E}{2T}\right). \tag{7A.5}$$

将求和式 (7A.4) 与 E 和 $-E$ 结合起来，我们就得到如下这个重要的公式：

$$\begin{aligned} T\sum_{\omega_m}\frac{1}{\omega_m^2+E^2} &= \frac{1}{2E}T\sum_{\omega_m}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m\eta}}{\mathrm{i}\omega_m+E}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m\eta}}{\mathrm{i}\omega_m-E}\right) = \frac{1}{2E}[n(-E)-n(E)] \\ &= \frac{1}{2E}\tanh\frac{E}{2T} = \frac{1}{2E}[1-2n(E)]. \end{aligned} \tag{7A.6}$$

利用式 (7A.5) 中的 $n(E)$，能隙方程 (7A.3) 就可表达为

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2E(\boldsymbol{p})}[1-2n(E)]. \tag{7A.7}$$

对于式 (7A.3) 中的动量求和，我们可以很方便地作如下近似，而这个近似对于很小的电声子相互作用是很好的，在此近似中显著的贡献只来自于只有费米面附近. 这个近似为

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}} \to \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} = \int\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}\int\frac{\mathrm{d}p^2}{2}\,p \approx \frac{M^2v_{\mathrm{F}}}{2\pi^2}\int\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}}{4\pi}\int\mathrm{d}\xi. \tag{7A.8}$$

其中，$\int\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}$ 是对所有动量方向 $\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ 进行积分. 前乘因子

$$\mathcal{N}(0) \equiv \frac{m^2v_{\mathrm{F}}}{2\pi^2} \tag{7A.9}$$

为费米面上一个自旋取向上的态密度. 这就使得式 (7A.3) 中的能隙方程变为如下形式：

$$\frac{1}{g} = \mathcal{N}(0)\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2+\varDelta^2}}\tanh\frac{\sqrt{\xi^2+\varDelta^2}}{2T}. \tag{7A.10}$$

该积分是对数发散的. 由于吸引相互作用来源于晶体中的声子，而这些声子的能谱又受到德拜频率 ω_{D} (此频率在传统超导体中远小于费米能量 ϵ_{F}) 的限制，因此我们已将积分从 ω_{D} 处截断.

在临界温度 T_{c} 处，能隙 $\varDelta$ 消失，于是式 (7A.19) 退化为

$$\frac{1}{g} = \mathcal{N}(0)\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\tanh\frac{\xi}{2T_{\mathrm{c}}}. \tag{7A.11}$$

该积分可以通过如下方法来做. 首先进行分部积分

$$\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\tanh\frac{\xi}{2T_{\mathrm{c}}} = \log\frac{\xi}{T_{\mathrm{c}}}\,\tanh\frac{\xi}{2T_{\mathrm{c}}}\bigg|_0^{\omega_{\mathrm{D}}} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\frac{\xi}{T_{\mathrm{c}}}\log\frac{\xi}{T_{\mathrm{c}}}\cosh^{-2}\frac{\xi}{2T_{\mathrm{c}}}. \tag{7A.12}$$

由于 $\omega_{\rm D}/\pi T_{\rm c} \gg 1$，第一项等于 $\log(\omega_{\rm D}/2T_{\rm c})$，附带一个由双曲正切函数引起的指数小量修正项，该修正项是可以忽略不计的. 在第二个积分中，我们已取积分上限为无穷大，因为该积分是收敛的. 然后我们利用以下积分公式[①]：

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x^{\mu-1}}{\cosh^2(ax)} = \frac{4}{(2a)^{\mu}} \left(1 - 2^{2-\mu}\right) \Gamma(\mu)\zeta(\mu - 1), \tag{7A.13}$$

同时令 $\mu = 1 + \delta$，将此公式按 δ 进行展开，并代入以下特殊数值：

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)\log(4\mathrm{e}^{\gamma}/\pi), \tag{7A.14}$$

其中，γ 为欧拉常数

$$\gamma = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \approx 0.577, \tag{7A.15}$$

因此 $\mathrm{e}^{\gamma}/\pi \approx 1.13$. 于是，从 δ 的线性项我们就得到

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\log x}{\cosh^2(x/2)} = -2\log(2\mathrm{e}^{\gamma}/\pi), \tag{7A.16}$$

因此方程 (7A.11) 就变为

$$\frac{1}{g} = \mathcal{N}(0)\log\left(\frac{\omega_{\rm D}}{T_{\rm c}}\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi}\right), \tag{7A.17}$$

由此耦合强度 g 就可如下确定 $T_{\rm c}$：

$$T_{\rm c} = \omega_{\rm D}\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi}\mathrm{e}^{-1/g\mathcal{N}(0)}. \tag{7A.18}$$

为了找到能隙对温度 T 的依赖关系，我们可将方程 (7A.19) 中的双曲正切函数展开成 $\mathrm{e}^{-E(\boldsymbol{p})/T}$ 的幂级数，可得

$$\frac{1}{g} = \mathcal{N}(0)\int_0^{\omega_{\rm D}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp(-n\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T)\right], \tag{7A.19}$$

其中，$K_0(z)$ 为变形第二类贝塞尔函数. 只有第一个积分需要积分限截断，在其他的积分中，积分限可移至无穷大，于是我们就得到

$$\frac{1}{g} = \mathcal{N}(0)\left[\log\frac{2\omega_{\rm D}}{\Delta} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K_0(n\Delta/T)\right]. \tag{7A.20}$$

将 $1/g$ 用式 (7A.18) 代换掉，我们得

$$\log\left(\frac{\Delta}{T_{\rm c}}\frac{\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K_0(n\Delta/T). \tag{7A.21}$$

① 参看 I.S. Gradshteyn 和 I.M. Ryzhik 所编 *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980, Formula 3.527.3.

对于较低的温度 T，K_0 呈指数衰减：

$$2K_0\left(\frac{\Delta}{T}\right) \to \frac{1}{\Delta}\sqrt{2\pi T\Delta}\mathrm{e}^{-\Delta/T}. \tag{7A.22}$$

因此，我们就得到 $T=0$ 时的能隙为

$$\Delta(0) = 2\omega_{\mathrm{D}}\mathrm{e}^{-1/g\mathcal{N}(0)}. \tag{7A.23}$$

将此结果与式 (7A.18) 相结合，我们就得到一个重要的关于临界温度 T_{c} 与零温能隙 $\Delta(0)$ 之间的普适关系式：

$$\Delta(0)/T_{\mathrm{c}} = \pi\mathrm{e}^{-\gamma} \approx 1.76. \tag{7A.24}$$

随着温度 $T\to 0$，对此值的逼近将呈现指数形式，因为由式 (7A.19) 有

$$\log\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \approx \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} - 1 \approx -\frac{1}{\Delta(0)}\sqrt{2\pi T\Delta(0)}\mathrm{e}^{-\Delta(0)/T}. \tag{7A.25}$$

利用式 (7A.24) 所确定的 $\Delta(0)$，我们可将式 (7A.21) 中的左边替换为 $\log[\Delta/\Delta(0)]$.

对于 $T\approx T_{\mathrm{c}}$，通过将能隙方程 (7A.19) 与其在 $T=T_{\mathrm{c}}$ 时的形式结合在一起

$$\begin{aligned}&\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\left(\tanh\frac{\xi}{2T_{\mathrm{c}}} - \tanh\frac{\xi}{2T}\right)\\ =&\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}}\mathrm{d}\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\tanh\frac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}{2T} - \frac{1}{\xi}\tanh\frac{\xi}{2T}\right),\end{aligned} \tag{7A.26}$$

我们就可以有效地计算相应的能隙. 式 (7A.26) 两边的积分都是收敛的，因此我们可以将频率截断 ω_{D} 去掉. 类似于方程 (7A.11)~(7A.17)，式 (7A.26) 左手边的积分可以单独执行，得

$$\log\left(\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{T_{\mathrm{c}}}\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi}\right) - \log\left(\frac{\omega_{\mathrm{D}}}{T}\frac{2\mathrm{e}^{\gamma}}{\pi}\right) = \log\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}. \tag{7A.27}$$

而对右边，根据式 (7A.6)，我们可将每个双曲正切函数由一个 Matsubara 求和代换掉，就得到

$$\log\frac{T}{T_{\mathrm{c}}} = T\sum_{\omega_m}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\xi\left(\frac{1}{\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2} - \frac{1}{\omega_m^2+\xi^2}\right). \tag{7A.28}$$

将 ξ 积掉就得到能隙方程

$$\log\frac{T}{T_{\mathrm{c}}} = 2\pi T\sum_{\omega_m>0}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta^2}} - \frac{1}{\omega_m}\right). \tag{7A.29}$$

为了方便起见，我们引入约化能隙

$$\delta \equiv \frac{\Delta}{T} \tag{7A.30}$$

以及约化 Matsubara 频率

$$x_n \equiv (2n+1)\pi/\delta. \tag{7A.31}$$

这样，式 (7A.29) 中的能隙方程就取以下形式：

$$\log\frac{T}{T_c} = \frac{2\pi}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n^2+1}} - \frac{1}{x_n}\right). \tag{7A.32}$$

由此我们可以计算出 T/T_c，其自变量为 δ，并通过这一结果可以得到 $\Delta(T)/\Delta(0) = (e^{\gamma}/\pi)\Delta(T)/T_c = (e^{\gamma}\delta/\pi)T/T_c$，这是一个 T/T_c 的函数，如图 7A.1 所示.

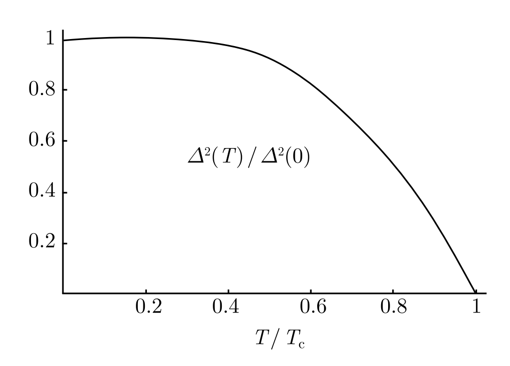


图 7A.1 超导能隙 (平方后的) 与温度的关系图

将式 (7A.32) 中的求和在小 δ 和大 x_n 的条件下展开，我们就可得到临界温度 T_c 附近的行为. 相应的首项给出

$$\log\frac{T}{T_c} \approx \frac{2\pi}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2x_n^3} = -\frac{\delta^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\delta^2}{\pi^2}\frac{7}{8}\zeta(3) \tag{7A.33}$$

于是

$$\delta^2 \approx \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\left(1-\frac{T}{T_c}\right) \tag{7A.34}$$

且

$$\frac{\Delta}{T_c} = \delta_c = \pi\sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \approx 3.063\times\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{1/2}. \tag{7A.35}$$

7A.2 二次涨落作用量

库珀对复场的微小涨落 $\delta\Delta(x)$ 由以下二次型作用量来控制：

$$\mathcal{A}_2[\delta\Delta^*, \delta\Delta] = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{G}_{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & \delta\Delta \\ \delta\Delta^* & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{G}_{\Delta}\begin{pmatrix} 0 & \delta\Delta \\ \delta\Delta^* & 0 \end{pmatrix}\right] - \frac{1}{g}\int \mathrm{d}x|\delta\Delta(x)|^2, \tag{7A.36}$$

其中，$\delta\Delta(x)$ 为复能隙场围绕由能隙方程 (7A.3) 所确定的实背景值 $\Delta(T)$ 的一个微小的涨落. 此能隙方程可由对上述作用量取极值来确定，这就保证了对涨落 $\delta\Delta(x)$ 的展开式不包含线性项，同时该涨落的行为也由式 (7A.36) 来决定. 矩阵 $\boldsymbol{G}_\Delta(x,x')$ 表示在背景库珀对场为常数 $\Delta(x)=\Delta$ 的情况下电子的自由关联函数：

$$\boldsymbol{G}_\Delta(x,x') = \mathrm{i}\begin{pmatrix} [\mathrm{i}\partial_t - \xi(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})]\delta & -\Delta \\ -\Delta & \mp\mathrm{i}[\partial_t - \xi(\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})]\delta \end{pmatrix}^{-1}(x,x'). \tag{7A.37}$$

在有限温度时，我们将转向傅里叶空间，相应的 Matsubara 频率电子的为 $\omega_m = 2\pi\left(m+\dfrac{1}{2}\right)T$ 而库珀对场的为 $\nu_n = 2\pi nT$，从而保证了在虚时周期 $\tau\in(0,1/T)$ 上费米场的反周期和库珀对场的周期性. 假如我们对电子动量和库珀对动量采用 4- 矢量记法的话，即 $p\equiv(\omega_m,\boldsymbol{p})$ 以及 $k=(\nu_n,\boldsymbol{k})$，则式 (7A.36) 中的作用量变为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2[\delta\Delta^*,\delta\Delta] = \frac{1}{2}\frac{T}{V}\sum_{p,k}&\left\{\left[\left(\omega_m+\frac{\nu_n}{2}\right)^2+E^2\left(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)\right]\right.\\ &\left.\left[\left(\omega_m-\frac{\nu_n}{2}\right)^2+E^2\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)\right]\right\}^{-1}\\ &\times\left\{\left[\omega_m^2-\frac{\nu_n^2}{4}+\xi\left(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)\xi\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}\right)\right]\right.\\ &[\Delta'^*(k)\delta\Delta(k)+\delta\Delta(-k)\delta\Delta^*(-k)]\\ &\left.-|\Delta_0|^2\left[\delta\Delta^*(k)\delta\Delta^*(-k)+\delta\Delta(k)\delta\Delta(-k)\right]\right\}\\ &-\frac{1}{g}\sum_k\delta\Delta^*(k)\delta\Delta(k).\end{aligned} \tag{7A.38}$$

它具有如下一般二次型形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2[\delta\Delta^*,\delta\Delta] = \frac{1}{2}\frac{T}{V}\sum_k&[\delta\Delta^*(k)L_{11}(k)\delta\Delta(k)+\delta\Delta(-k)L_{22}(k)\delta\Delta(-k)\\ &+\delta\Delta^*(k)L_{12}(k)\delta\Delta^*(-k)+\delta\Delta(-k)L_{21}(k)\delta\Delta(k)],\end{aligned} \tag{7A.39}$$

其系数为

$$\begin{aligned}L_{11}(k) &= L_{22}(k)\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}T\sum_{\omega_m}\frac{\omega_m^2-\nu_n^2/4+\xi_+\xi_-}{\left[\left(\omega_m+\dfrac{\nu_n}{2}\right)^2+E_+^2\right]\left[\left(\omega_m-\dfrac{\nu_n}{2}\right)^2+E_-^2\right]}-\frac{1}{g},\end{aligned} \tag{7A.40}$$

$$\begin{aligned}L_{12}(k) &= [L_{21}(k)]^*\\ &= -\Delta^2\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}T\sum_{\omega_m}\frac{1}{\left[\left(\omega_m+\dfrac{\nu_n}{2}\right)^2+E_+^2\right]\left[\left(\omega_m-\dfrac{\nu_n}{2}\right)^2+E_-^2\right]}.\end{aligned} \tag{7A.41}$$

$\xi_\pm$ 和 $E_\pm$ 则由方程 (7A.1) 和 (7A.2) 中的 $\xi(\boldsymbol{p})$ 及 $E(\boldsymbol{p})$ 定义为

$$\xi_\pm = \xi(\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{k}/2) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M} \pm \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{k}^2}{8M} - \mu, \quad E_\pm = E(\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{k}/2). \tag{7A.42}$$

因此，方程 (7A.40) 和 (7A.41) 中相应的组合为

$$\xi_+\xi_- = \xi^2 - \frac{1}{4}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{k})^2 + \xi\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{k}^4}{64m^2}, \quad \boldsymbol{v} \equiv \frac{\boldsymbol{p}}{m}, \tag{7A.43}$$

$$\left\{\begin{matrix} E_+^2 \\ E_-^2 \end{matrix}\right\} = E^2 \pm \xi\boldsymbol{v}\boldsymbol{k} + \frac{1}{4}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{k})^2 + \xi\frac{\boldsymbol{k}^2}{4m} \pm \boldsymbol{v}\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{k}^2}{8m} + \frac{\boldsymbol{k}^4}{64m^2}. \tag{7A.44}$$

经过一些直接的代数运算，利用求和式 (7A.4)，并库珀对将欧几里得能量 ν_n 用 $-\mathrm{i}$ 乘以一个实连续函数 ϵ 来代替，我们就得到

$$\begin{aligned} L_{11}(\epsilon,k) = &\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left\{\frac{E_+E_- + \xi_+\xi_-}{2E_+E_-}\frac{E_+ + E_-}{(E_+ + E_-)^2 - \epsilon^2}[1 - n(E_+) - n(E_-)]\right. \\ &\left. - \frac{E_+E_- - \xi_+\xi_-}{2E_+E_-}\frac{E_+ - E_-}{(E_+ - E_-)^2 - \epsilon^2}[n(E_+) - n(E_-)]\right\} \\ &- \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E}[1 - 2n(E)], \end{aligned} \tag{7A.45}$$

且

$$\begin{aligned} L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = &-\Delta^2\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_-E_+}\times\left\{\frac{E_+ + E_-}{(E_+ + E_-)^2 - \epsilon^2}[1 - n(E_+) - n(E_-)] + \right. \\ &\left.\frac{E_+ - E_-}{(E_+ - E_-)^2 - \epsilon^2}[n(E_+) - n(E_-)]\right\}. \end{aligned} \tag{7A.46}$$

在式 (7A.45) 中最后一项中，我们已经用式 (7A.7) 中的能隙方程将 $1/g$ 消掉了.

令二次式 (7A.39) 中的涨落行列式为零，即由下式就可确定出激发态能谱：

$$L_{11}(k)L_{22}(k) - L_{12}(k)L_{12}^*(k) = 0. \tag{7A.47}$$

该方程有两个解：

$$L_{11}(k) = \pm L_{12}(k), \tag{7A.48}$$

第一个给出低能激发态，而第二个则给出高能激发态.

7A.3　零温时的长波激发

在零温的时候，$n(E)$ 为零，方程 (7A.45) 和 (7A.46) 退化为

$$L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\left\{\frac{E_+E_- + \xi_+\xi_-}{2E_+E_-}\frac{E_+ + E_-}{(E_+ + E_-)^2 - \epsilon^2} - \frac{1}{2E}\right\}, \tag{7A.49}$$

$$L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{\Delta^2}{2E_+E_-}\frac{E_+ + E_-}{(E_+ + E_-)^2 - \epsilon^2}, \tag{7A.50}$$

其中，动量求和在式 (7A.8) 中的大区域极限下可用积分来代替. 在此将式 (7A.43) 和式 (7A.44) 代入，并将被积函数按 $\boldsymbol{k}$ 的幂次展开，利用

$$\int \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}}{4\pi}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{k})^n = \boldsymbol{v}^{2^{n/2}} \int \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{2}\cos^n\theta = \frac{\boldsymbol{v}^{2^{n/2}}}{n+1}\begin{cases} 1, & n = \text{偶}, \\ 0, & n = \text{奇}, \end{cases} \tag{7A.51}$$

我们就可在所有的动量方向 $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ 上进行积分，并得

$$L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = -\frac{\mathcal{N}(0)}{2}\left(1 - \frac{\epsilon^2}{3\Delta^2} + \frac{v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2}{9\Delta^2} + \frac{v_{\mathrm{F}}^2\epsilon^2\boldsymbol{k}^2}{30\Delta^4} - \frac{\epsilon^4}{20\Delta^4} - \frac{v_{\mathrm{F}}^4\boldsymbol{k}^4}{100\Delta^4} + \cdots\right), \tag{7A.52}$$

$$L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = -\frac{\mathcal{N}(0)}{2}\left(1 + \frac{\epsilon^2}{6\Delta^2} - \frac{v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2}{18\Delta^2} - \frac{v_{\mathrm{F}}^2\epsilon^2\boldsymbol{k}^2}{45\Delta^4} + \frac{\epsilon^4}{30\Delta^4} + \frac{v_{\mathrm{F}}^4\boldsymbol{k}^4}{150\Delta^4} + \cdots\right). \tag{7A.53}$$

与 $v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^4/\Delta^4$ 进行对比后，我们已将 $\boldsymbol{k}^4/m^2\Delta^2$ 之类的项略掉了，因为费米能量远大于超导能隙，即 $mv_{\mathrm{F}}^2/2 \gg \Delta$. 事实上，通过将 $\boldsymbol{k}$ 替换为 $\eta\boldsymbol{k}$ 并将 v_{F} 替换为 v_{F}/η，同时取 $\eta \to 0$，这一极限是很容易得到满足的. 在式 (7A.43) 和式 (7A.44) 中，通过与前面各项进行比对，最后一项是可以忽略不计的.

由 $L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})$ 可得长波激发，从而给出了式 (7.43) 中能量的在小 $\boldsymbol{k}$ 区域的展开. 对于高 k 值区域，我们只能对 $L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})$ 进行数值求解. 图 7A.2 给出了相应的计算结果.

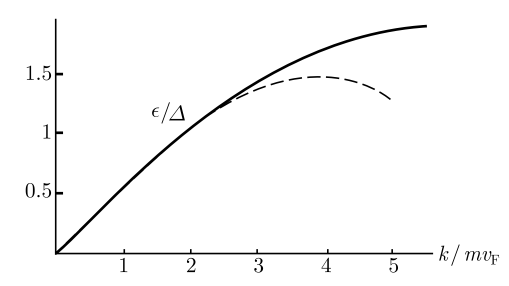


图 A7.2　超导体中低能激发的能量. 在大 k 区域，曲线逼近能量 $\epsilon = 2\Delta$. 虚线曲线给出了解析小 k 展开式 (7.43) 的结果

序参量大小的涨落可以通过求解方程 $L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = -L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})$ 来得到. 由于 ϵ 始终保持比较大，我们可只进行小 $\boldsymbol{k}$ 展开，这就给出[3, 6]

$$\epsilon^{(n)}(\boldsymbol{k}) = 2\Delta + \Delta\left(\frac{v_{\mathrm{F}}\boldsymbol{k}}{2\Delta}\right)^2 z_n, \tag{7A.54}$$

其中，z_n 为以下积分方程的解：

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{x^2 - z}{x^2 + y^2 - z} = 0. \tag{7A.55}$$

令 $\mathrm{e}^t = \left(\sqrt{1-z}+1\right) / \left(\sqrt{1-z}-1\right)$，这就变成了一个代数方程

$$\frac{\pi}{2\sinh^2(t/2)}\left(t+\sinh t\right)=0, \tag{7A.56}$$

此方程有无穷多个解 t_n. 最低的一个解为

$$t_1 = 2.25073 + 4.21239\,\mathrm{i}, \tag{7A.57}$$

相对高的解渐渐地趋于

$$t_n \approx \log[\pi(4n-1)] + \mathrm{i}\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right). \tag{7A.58}$$

参见图 7A.3 中的等值线图.

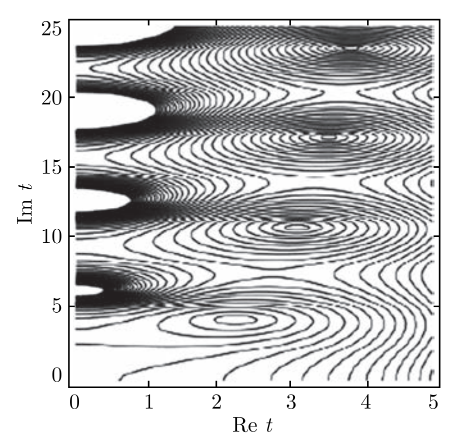


图 7A.3　由式 (7A.56) 得到的超导中能量本征值零点的等值线图，这可近似地由式 (7A.58) 给出. 这些等值线标示 $\mathrm{Abs}[(t+\sinh t)/\sinh(t/2)]$ 的固定值

相应的激发能谱为

$$\epsilon^{(n)}(\boldsymbol{k}) = 2\varDelta - \frac{v_{\mathrm{F}}^2}{4\varDelta}\boldsymbol{k}^2\frac{1}{\sinh^2 t_n/2}. \tag{7A.59}$$

在此中间，只有第一个 $\epsilon^{(1)}(\boldsymbol{k}) \approx 2\varDelta + (0.2369 - 0.2956\,\mathrm{i})v_{\mathrm{F}}^2/4\varDelta^2\boldsymbol{k}^2$ 落在第二个黎曼面上从而会有可观测效果. 其他的则藏匿于由 $2\varDelta$ 到 ∞ 的两粒子分支割线下方不断降低的黎曼面上. 由于零温时费米海表面的维度为 $D=2$，因此该割线为对数型的.

7A.4　非零温情形下的长波激发

现在我们来考虑非零温的情形，此时能隙可由式 (7A.3) 算出.

首先，我们来考察静态情形且只考虑小 $\boldsymbol{k}$ 的长波极限. 因此，我们设 $\epsilon=0$ 且只保留 $\boldsymbol{k}$ 的最低阶项. 当 $\boldsymbol{k}=0$，由式 (7A.45) 和式 (7A.8)，我们得

$$L_{11}(0,\mathbf{0}) = \mathcal{N}(0)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\left\{\frac{E^2+\xi^2}{4E^3}[1-2n(E)] - \frac{E^2-\xi^2}{2E^2}n'(E) - \frac{1}{2E}[1-2n(E)]\right\}. \tag{7A.60}$$

将 $E=\sqrt{\Delta^2+\xi^2}$ 代入，并采用式 (7A.30) 中的约化变量 $\delta\equiv\Delta/T$，此式变为

$$L_{11}(0,\mathbf{0}) = -\frac{1}{2}\mathcal{N}(0)\phi(\delta), \tag{7A.61}$$

其中，我们引入了所谓的 **Yoshida 函数**

$$\phi(\delta)\equiv\Delta^2\left\{\int_0^{\infty}\mathrm{d}\xi\left[\frac{1}{E^3}[1-2n(E)]+2\frac{1}{E^2}n'(E)\right]\right\}. \tag{7A.62}$$

这里，我们注意到

$$\partial_\xi\left[\frac{\xi}{\Delta^2E}n(E)\right] = \frac{1}{E^3}n(E)+\left(\frac{1}{\Delta^2}-\frac{1}{E^2}\right)n'(E), \tag{7A.63}$$

这就使得式 (7A.62) 可变为如下形式：

$$\phi(\delta)\equiv\Delta^2\int_0^{\infty}\mathrm{d}\xi\left\{\frac{1}{E^3}+\frac{2}{\Delta^2}n'(E)-2\partial_\xi\left[\frac{\xi}{|\Delta|^2E}n(E)\right]\right\}. \tag{7A.64}$$

由于表面项为零，且第一个积分很容易做，因此就得到一个更加方便的形式

$$\phi(\delta) = 1+2\int_0^{\infty}\mathrm{d}\xi\, n'(E) = 1-\frac{1}{2T}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\xi\frac{1}{\cosh^2(E/2T)}. \tag{7A.65}$$

当 $T\approx 0$，该函数将指数地趋于零.

而对于式 (7A.46) 中的函数 $L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})$，当 $\epsilon=0$ 以及 $\boldsymbol{k}=0$ 时，我们发现：

$$L_{12}(0,\mathbf{0}) = -\mathcal{N}(0)\Delta^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\left\{\frac{1}{4E^3}[1-2n(E)]+\frac{1}{2E^2}n'(E)\right\}, \tag{7A.66}$$

这又可以用式 (7A.65) 中的 Yoshida 函数表示为

$$L_{12}(0,\mathbf{0}) = -\frac{1}{2}\mathcal{N}(0)\phi(\delta). \tag{7A.67}$$

这意味着，那些由方程 $L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k}) = L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})$ 得到的模，在零温时对于 $\boldsymbol{k}=0$ 其能量为零，在有限温度 T 时将同样保持这样的特性. 这正是南部–戈德斯通定理的一个结果.

对于整个温度区域上的行为，则最好用式 (7A.6) 中的 Matsubara 求和来计算. 将此对能量求导，我们就发现式 (7A.65) 可重新写为

$$\begin{aligned}\phi(\delta) &= 2T\sum_{\omega_m}\int\mathrm{d}\xi\frac{\Delta^2}{(\omega_m^2+E^2)^2} = -2\Delta^2T\sum_{\omega_m}\frac{\partial}{\partial\Delta^2}\int\mathrm{d}\xi\frac{1}{\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2}\\ &= -2\Delta^2T\sum_{\omega_m}\frac{\partial}{\partial\Delta^2}\frac{\pi}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta^2}} = 2T\pi\sum_{\omega_m>0}\frac{\Delta^2}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta^2}^3}.\end{aligned} \tag{7A.68}$$

利用式 (7A.31) 中的约化变量，这可进一步变为

$$\phi(\delta) = \frac{2\pi}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x_n^2+1}^3}. \tag{7A.69}$$

当温度 T 处于 T_c 附近时，δ 很小 [参看方程式 (7A.34)]，我们就可近似得到

$$\phi(\Delta) \approx 2\frac{\delta^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = 2\frac{\delta^2}{\pi^2}\frac{7\zeta(3)}{8} \approx 2\left(1-\frac{T}{T_c}\right). \tag{7A.70}$$

在 $T \to 0$ 的极限下，求和将变为积分. 利用公式

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x^{\mu-1}}{(x^2+1)^{\nu}} = \frac{1}{2}B(\mu/2, \nu_n - \mu/2), \tag{7A.71}$$

其中，$B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$，我们就可得到

$$\phi(\Delta)|_{T=0} = 1. \tag{7A.72}$$

7A.5　序参数场的弯曲能量

现在我们来计算集体场 $\Delta(x)$ 的弯曲能量 (bending energy). 为此，我们将 $L_{11}(0,\boldsymbol{k})$ 和 $L_{12}(0,\boldsymbol{k})$ 按动量 $\boldsymbol{k}$ 的幂律展开至 $\boldsymbol{k}^2$ 项. 我们首先从式 (7A.40) 和式 (7A.41) 中的 Matsubara 求和入手：

$$L_{11}(0,\boldsymbol{k}) = \frac{T}{V}\sum_{\omega_m,\boldsymbol{p}}\frac{\omega_m^2+\xi_+\xi_-}{\left(\omega_m^2+E_+^2\right)\left(\omega_m^2+E_-^2\right)} - \frac{1}{g}, \tag{7A.73}$$

$$L_{12}(0,\boldsymbol{k}) = -\frac{T}{V}\sum_{\omega_m,\boldsymbol{p}}\frac{\Delta^2}{\left(\omega_m^2+E_+^2\right)\left(\omega_m^2+E_-^2\right)}. \tag{7A.74}$$

将式 (7A.43) 和式 (7A.44) 中的展开式代入后, 我们得

$$\begin{aligned}
&L_{11}(0,\boldsymbol{k}) - L_{12}(0,\boldsymbol{k}) \\
\approx&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}T\sum_{\omega_m}\frac{\omega_m^2+\Delta^2+\xi^2-\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{vk})^2}{(\omega_m^2+E^2)^2\left[1+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{vk})^2\dfrac{\omega_m^2-\xi^2+\Delta^2}{(\omega_m^2+E^2)^2}\right]} - \frac{1}{g} + \cdots \\
=&\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left\{\left(T\sum_{\omega_m}\frac{1}{\omega_m^2+E^2} - \frac{1}{g}\right)\right. \\
&\left.+T\sum_{\omega_m}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(\omega_m^2+E^2)^2} - \frac{\omega_m^2+\Delta^2}{(\omega_m^2+E^2)^3}\right](\boldsymbol{vk})^2\right\} + \cdots .
\end{aligned} \tag{7A.75}$$

基于式 (7A.3) 中的能隙方程，式 (7A.75) 花括号中的第一项为零，并且，利用式 (7A.51) 中的方向积分，我们发现

$$L_{11}(0,\boldsymbol{k})-L_{12}(0,\boldsymbol{k})\approx\mathcal{N}(0)\frac{v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2}{3}\times\sum_{\omega_m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_m^2+\Delta^2}{(\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2)^3}\right]. \tag{7A.76}$$

同样，可得

$$L_{12}(0,\boldsymbol{k})\approx-\mathcal{N}(0)\sum_{\omega_m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\left\{\frac{\Delta^2}{(\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2\Delta^2}{3}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2)^3}-\frac{\omega_m^2+\Delta^2}{(\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2)^4}\right]\right\}. \tag{7A.77}$$

利用积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\frac{1}{(\omega_m^2+\xi^2+\Delta^2)^{2,3,4}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{16}\right)\frac{\pi}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta^2}^{3,5,7}}, \tag{7A.78}$$

并借助于式 (7A.68)，我们就得到

$$L_{11}(0,\boldsymbol{k})-L_{12}(0,\boldsymbol{k})\approx-\frac{\mathcal{N}(0)}{4\Delta^2}\frac{v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2}{3}\phi(\delta), \tag{7A.79}$$

$$L_{12}(0,\boldsymbol{k})\approx-\frac{\mathcal{N}(0)}{2}\phi(\delta)+\frac{\mathcal{N}(0)}{8\Delta^2}\frac{v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2}{3}\frac{2}{3}\bar{\phi}(\delta), \tag{7A.80}$$

其中，$\phi(\delta)$ 为式 (7A.69) 中的 Yoshida 函数，而 $\bar{\phi}(\delta)$ 则为另一个能隙函数：

$$\bar{\phi}(\delta)\equiv3\Delta^4\pi T\sum_{\omega_m>0}\frac{1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta^2}^5}=\frac{3\pi}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x_n^2+1}^5}. \tag{7A.81}$$

在 $T\to0$ 的极限下，求和变为积分，利用式 (7A.71)，式 (7A.81) 的结果为

$$\bar{\phi}(\delta)\ |_{T=0}=1. \tag{7A.82}$$

结合式 (7A.72)，我们看到，式 (7A.79) 和式 (7A.80) 正确地再现了方程 (7A.52) 和 (7A.53) 中的 $\boldsymbol{k}^2$ 项.

当 $T\approx T_{\mathrm{c}}$，则 $\delta\to0$，我们有

$$\bar{\phi}(\delta)\approx3\frac{\delta^4}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}=3\frac{\delta^4}{\pi^4}\frac{31\zeta(5)}{32}, \tag{7A.83}$$

于是，利用式 (7A.34) 可得

$$\bar{\phi}(\delta)\approx\frac{3}{\pi^4}\frac{31\zeta(5)}{32}\left(\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}\right)^2\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2\approx2.7241\times\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2. \tag{7A.84}$$

将此式连同式 (7A.70) 一起代入式 (7A.79) 和式 (7A.80) 中，并只考虑 $v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2 \leqslant \Delta^2$ 的长波激发，于是 $(v_{\mathrm{F}}^2\boldsymbol{k}^2/\Delta^2)\tilde{\phi}(\delta)$ 与 $(1-T/T_{\mathrm{c}})^2$ 处于同一个量级，因此，精确到 $1-T/T_{\mathrm{c}}$ 的最低阶，我们就得到

$$L_{11}(0,\boldsymbol{k}) - L_{12}(0,\boldsymbol{k}) \approx -\mathcal{N}(0)\frac{v_{\mathrm{F}}^2}{\pi^2 T_{\mathrm{c}}^2}\frac{7\zeta(3)}{48}\boldsymbol{k}^2, \tag{7A.85}$$

$$L_{12}(0,\boldsymbol{k}) \approx -\mathcal{N}(0)\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right). \tag{7A.86}$$

利用式 (5.148)，我们看到

$$\mathcal{N}(0)v_{\mathrm{F}}^2 = \frac{3}{2}\frac{n_{\mathrm{e}}}{m} = \frac{3}{2}\frac{n_\Delta}{M} = \frac{3}{2}\frac{\rho}{m^2} = 6\frac{\rho}{M^2}, \tag{7A.87}$$

其中，n_Δ 为质量为 $M=2m$ 的库珀对的粒子数密度，而 $\rho \equiv Mn_\Delta = 2mn_\Delta = mn_{\mathrm{e}}$ 为它们的质量密度. 此质量密度当然等同于电子的质量密度：$\rho \equiv 2Mn_{\mathrm{e}} = Mn_\Delta$. 于是，我们可以用库珀对密度来替代 $\mathcal{N}(0)$ 而得到

$$L_{11}(0,\boldsymbol{k}) - L_{12}(0,\boldsymbol{k}) \approx -\frac{\rho}{2M^2\Delta^2}\boldsymbol{k}^2\phi(\delta), \tag{7A.88}$$

$$L_{12}(0,\boldsymbol{k}) \approx -\frac{6\rho}{2M^2 v_{\mathrm{F}}^2}\phi(\delta) + \frac{\rho}{4M^2\Delta^2}\boldsymbol{k}^2\frac{2}{3}\bar{\phi}(\delta). \tag{7A.89}$$

回到 x 空间，我们从式 (7A.39) 中的作用量可析解出静态微小涨落的能量密度

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2M^2\Delta^2}\big\{&\rho^{11}\boldsymbol{\nabla}\Delta^*(x)\boldsymbol{\nabla}\Delta(x)\\ &+\mathrm{Re}\left[\rho^{12}\boldsymbol{\nabla}\Delta^*(x)\boldsymbol{\nabla}\Delta^*(x) + a^{12}\delta\Delta^*(x)\delta\Delta^*(x)\right]\big\}.\end{aligned} \tag{7A.90}$$

由式 (7A.88) 和式 (7A.89) 我们可以确定出相应的系数为

$$\rho^{11} - \rho^{12} = \rho\phi(\delta), \quad \rho^{12} = -\frac{\rho}{2}\frac{2}{3}\bar{\phi}(\delta), \quad a^{12} = 6\rho\frac{\Delta^2}{v_{\mathrm{F}}^2}\phi(\delta). \tag{7A.91}$$

将集体场 $\Delta(x)$ 分解为实的模场 $|\Delta(x)|$ 以及一个相角场 $\theta(x)$

$$\Delta(x) = |\Delta(x)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}, \tag{7A.92}$$

此能量密度可写为

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2M^2}\left\{\rho_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\nabla}\theta - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}})^2 + \rho_\Delta(\boldsymbol{\nabla}|\Delta(x)|)^2/\Delta^2 + 2a^{12}[\delta|\Delta(x)|]^2\right\}. \tag{7A.93}$$

第一个梯度项前面的系数就是**超流密度**：

$$\rho_{\mathrm{s}} \equiv \rho^{11} - \rho^{12} = \rho\phi(\delta). \tag{7A.94}$$

由此类推，我们引入了以下的量：

$$\rho_\Delta \equiv \rho^{11} + \rho^{12} = \rho_\mathrm{s} + 2\rho^{12} = \rho_\mathrm{s} - \frac{2}{3}\bar{\rho}_\mathrm{s}, \quad \bar{\rho}_\mathrm{s} \equiv \rho\bar{\phi}(\delta). \tag{7A.95}$$

对于所有的 $T \leqslant T_\mathrm{c}$，相应的 ρ_s 与 $\bar{\rho}_\mathrm{s}$ 的行为如图 7A.4 所示.

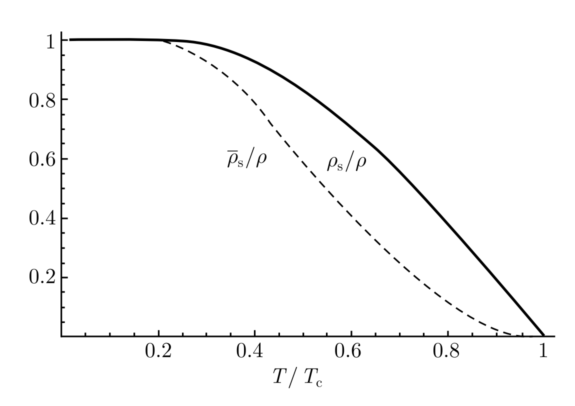


图 7A.4　式 (7A.94) 和式 (7A.95) 所给出的超流密度 $\rho_\mathrm{s}/\rho = \phi(\Delta/T)$ (Yoshida 函数) 与能隙函数 $\bar{\rho}_\mathrm{s}/\rho = \bar{\pi}(\Delta/T)$ 随温度变化的行为

相位的涨落可以是无界，而模的涨落则为一个有限的尺度，这个尺度由依赖于温度的**相干长度** (为了得到合适的物理量单位，我们在这里重新插入了 $\hbar$) 来表征

$$\xi(T) = \frac{\hbar v_\mathrm{F}}{\Delta}\sqrt{\frac{1}{12\Delta^2}\frac{\rho_\mathrm{s} - 2\bar{\rho}_\mathrm{s}/3}{\rho_\mathrm{s}}}. \tag{7A.96}$$

在 T_c 附近，我们将 $\rho_\mathrm{s} \approx 2(1 - T/T_\mathrm{c})$、$\bar{\rho}_\mathrm{s} \approx (1 - T/T_\mathrm{c})^2$ 以及式 (7A.35) 中的 Δ 代入以得到相应的极限值 (带物理单位)

$$\xi(T) = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{T}{T_\mathrm{c}}\right)^{-1/2}, \quad \xi_0 \equiv \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{48}}\frac{\hbar v_\mathrm{F}}{\pi k_\mathrm{B} T_\mathrm{c}} \approx 0.42\frac{\hbar v_\mathrm{F}}{\pi k_\mathrm{B} T_\mathrm{c}} \sim 0.27\frac{T_\mathrm{F}}{T_\mathrm{c}} l_\mathrm{F}. \tag{7A.97}$$

在后一个表达式中，我们引入了**费米长度** $l_\mathrm{F} = \hbar/p_\mathrm{F}$ 以及**费米温度** $T_\mathrm{F} \equiv p_\mathrm{F}^2/2Mk_\mathrm{B}$. 在传统超导体中，$l_\mathrm{F}$ 大约在晶格间隙的量级，而 T_F 一般都比 T_c 大 $10^3 \sim 10^4$ 倍，因此相干长度与费米长度的比值会很大. 然而，对于高温超导体，ξ_0 可以只是几倍的 l_F，而这会极大地增强涨落效应.

借助式 (7A.24)，在零温处，我们得

$$\xi(0) = \frac{1}{6}\frac{v_\mathrm{F}}{\Delta(0)} = \frac{1}{6\mathrm{e}^\gamma}\frac{v_\mathrm{F}}{\pi T_\mathrm{c}} \approx 0.0935\,\frac{v_\mathrm{F}}{\pi T_\mathrm{c}}, \tag{7A.98}$$

这差不多是式 (7A.97) 中 $T \approx T_\mathrm{c}$ 时的长度参量 ξ_0 的 1/6.

7A.6　非零温时的库珀对的动能项

在非零温时，通过由方程 (7A.45) 和 (7A.46) 计算小 $\boldsymbol{k}$ 时的激发态能量，我们将求解缓变配对场的动能项的动力学. 我们首先由 $\boldsymbol{k}=0$ 开始，在此处，不同于式 (7A.60) 和式 (7A.66)，我们得到的是

$$L_{11}(\epsilon,\mathbf{0})-L_{11}(\epsilon,\mathbf{0})=\mathcal{N}(0)\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\left[\frac{E}{E^2-\epsilon^2/4}-\frac{1}{E}\right][1-2n(E)], \tag{7A.99}$$

$$L_{12}(\epsilon,\mathbf{0})-L_{12}(0,\mathbf{0})=-\mathcal{N}(0)\frac{\epsilon^2}{4\varDelta^2}\,\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\frac{\varDelta^4}{E^3(E^2-\epsilon^2/4)}[1-2n(E)]. \tag{7A.100}$$

这两个式子可重新写为

$$L_{11}(\epsilon,\mathbf{0})-L_{12}(\epsilon,\mathbf{0})=\mathcal{N}(0)\frac{\epsilon^2}{4\varDelta^2}\gamma(\delta,\epsilon), \tag{7A.101}$$

$$L_{12}(\epsilon,\mathbf{0})-L_{12}(0,\mathbf{0})=-\mathcal{N}(0)\,\frac{\epsilon^2}{4\varDelta^2}\,\frac{1}{3}\,\bar{\gamma}(\delta,\epsilon), \tag{7A.102}$$

其中

$$\gamma(\delta,\epsilon)\equiv\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\varDelta^2}{E(E^2-\epsilon^2/4)}[1-2n(E)], \tag{7A.103}$$

$$\bar{\gamma}(\delta,\epsilon)\equiv\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\varDelta^4}{E^3(E^2-\epsilon^2/4\varDelta^2)}[1-2n(E)]. \tag{7A.104}$$

在零温时，$n(E)=0$，$\gamma(\delta,0)$ 和 $\bar{\gamma}(\delta,0)$ 二者皆由 1 开始取值，因此式 (7A.101) 与式 (7A.102) 再现了式 (7A.52) 和式 (7A.53) 中的 ϵ^2 项. 图 7A.5 绘出了 $\gamma(\delta,0)$ 和 $\bar{\gamma}(\delta,0)$ 在全温度范围内的行为.

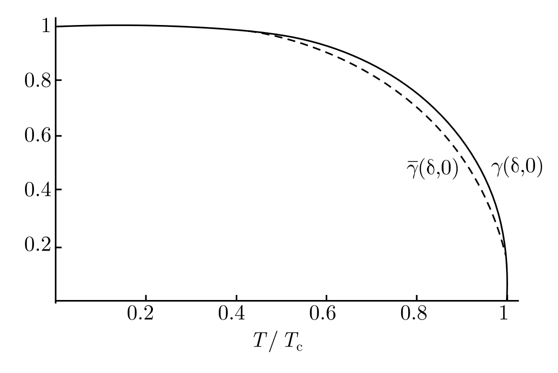


图 7A.5　式 (7A.103) 和式 (7A.104) 中函数 $\gamma(\delta,0)$ 和 $\bar{\gamma}(\delta,0)$ 随温度变化的行为

对于任意温度，利用式 (7A.6) 将 $n(E)$ 展开为 Matsubara 求和的形式，我们可以很方便地计算式 (7A.103) 和式 (7A.104)，它们取如下形式：

$$\gamma(\delta,\epsilon)=2T\sum_{\omega_m>0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\varDelta^2}{E^2-\epsilon^2/4}\frac{1}{\omega_m^2+E^2}, \tag{7A.105}$$

$$\bar{\gamma}(\delta,\epsilon)=3T\sum_{\omega_m>0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\frac{\varDelta^4}{E^2(E^2-\epsilon^2/4)}\frac{1}{\omega_m^2+E^2}. \tag{7A.106}$$

对 ξ 的积分给出

$$\gamma(\delta,\epsilon)=2\pi\frac{T}{\varDelta}\sum_{\omega_m>0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2/4\varDelta^2}}\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2+\epsilon^2/4}-\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2+\epsilon^2/4}\frac{\varDelta}{\sqrt{\omega_m^2+\varDelta^2}}\right), \tag{7A.107}$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(\delta,\epsilon)=3\pi\frac{T}{\varDelta}\sum_{\omega_m>0}\Bigg[&\frac{4\varDelta^2}{\epsilon^2}\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2+\epsilon^2/4}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2/4\varDelta^2}}-1\right)\\&+\left(\frac{\varDelta}{\sqrt{\omega_m^2+\varDelta^2}}-1\right)\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2}\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2+\epsilon^2/4}\Bigg].\end{aligned} \tag{7A.108}$$

对于 $\epsilon=0$，上述式子变为

$$\gamma(\delta,0)=2\pi\frac{T}{\varDelta}\sum_{\omega_m>0}\left(\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2}-\frac{\varDelta^3}{\omega_m^2\sqrt{\omega_m^2+\varDelta^2}}\right), \tag{7A.109}$$

且

$$\bar{\gamma}(\delta,0)=3\pi\frac{T}{\varDelta}\sum_{\omega_m>0}\left[\frac{1}{2}\frac{\varDelta^2}{\omega_m^2}+\frac{\varDelta^4}{\omega_m^4}\left(\frac{\varDelta}{\sqrt{\omega_m^2+\varDelta^2}}-1\right)\right]. \tag{7A.110}$$

这里我们可以做如下代换：

$$\sum_{\omega_m>0}\omega_m^{-k}=(1-2^{-k})\zeta(k)(\pi T)^{-k}, \tag{7A.111}$$

对于 $k=2$，它等于 $1/8T^2$，而当 $k=4$ 时为 $1/96T^4$. 在 $T\to 0$ 的极限下，Matsubara 求和 $T\sum\limits_{\omega_m>0}$ 就变成了积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega_m/2\pi$，于是我们重新获得了在式 (7A.103) 和式 (7A.104) 中得到的极限值：$\gamma(\delta)\to 1$ 以及 $\bar{\gamma}(\delta)\to 1$.

在 $T\to T_\mathrm{c}$ 的极限下，$\varDelta\to 0$，函数 (7A.107) 与 (7A.108) 具有如下极限行为：

$$\gamma(\delta,\epsilon)\to 2\pi\frac{T\varDelta}{\sqrt{1-\epsilon^2/4\varDelta^2}}\sum_{\omega_m>0}\frac{1}{\omega_m^2}=\frac{\pi\varDelta}{4T\sqrt{1-\epsilon^2/4\varDelta^2}}\to\frac{\pi\varDelta^2}{2T\sqrt{-\epsilon^2}}, \tag{7A.112}$$

$$\frac{\epsilon^2}{4\varDelta^2}\bar{\gamma}(\delta,\epsilon)\to 3\pi\frac{T\varDelta}{\sqrt{1-\epsilon^2/4\varDelta^2}}\sum_{\omega_m>0}\frac{1}{\omega_m^2}=\frac{3\pi\varDelta}{8T\sqrt{1-\epsilon^2/4\varDelta^2}}\to\frac{3\pi\varDelta^2}{4T\sqrt{-\epsilon^2}}, \tag{7A.113}$$

因此

$$L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k})-L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})\approx\mathcal{N}(0)\,\frac{\mathrm{i}\pi\epsilon}{8T}, \tag{7A.114}$$

$$L_{12}(\epsilon,\mathbf{0})-L_{12}(0,\mathbf{0})\approx-\mathcal{N}(0)\,\frac{\mathrm{i}\pi\Delta^2}{4T\epsilon}. \tag{7A.115}$$

对于 $\epsilon\gg\Delta^2$，与第一个相比，第二个函数可以忽略掉.

对于 $\Delta=0$，由式 (7A.101) 和式 (7A.100) 可直接推导出同样的结果：

$$L_{11}(\epsilon,\mathbf{0})-L_{12}(\epsilon,\mathbf{0})\approx\mathcal{N}(0)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\left[\frac{\xi}{2(\xi^2-\epsilon^2/4)}-\frac{1}{2\xi}\right]\tanh\frac{\xi}{2T}, \tag{7A.116}$$

$$L_{12}(\epsilon,\mathbf{0})\approx 0. \tag{7A.117}$$

结合式 (7A.85)、式 (7A.86) 以及式 (7A.98)，我们就得到

$$L_{11}(\epsilon,\boldsymbol{k})-L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})\equiv-\mathcal{N}(0)\left(-\mathrm{i}\frac{\pi\epsilon}{8T}+\xi_0^2\boldsymbol{k}^2+\cdots\right), \tag{7A.118}$$

$$L_{12}(\epsilon,\boldsymbol{k})=-\mathcal{N}(0)\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)+\cdots. \tag{7A.119}$$

这显示出当 $T\approx T_{\mathrm{c}}$ 时，激发态将按以下衰减率被完全阻滞掉：

$$\Gamma=2\frac{8T}{\pi}\xi_0^2\boldsymbol{k}^2. \tag{7A.120}$$

有了上述结果，我们就有了在临界温度附近建立描述超导体的金兹堡–朗道作用量的全部信息. 改作用量为包含库珀对场及其导数的低阶幂次展开

$$\mathcal{A}_2[\Delta,\Delta^*]\approx\mathcal{N}(0)\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left\{\Delta^*(x)\left[-\frac{\pi}{8T}\partial_t+\xi_0^2\boldsymbol{\nabla}^2-a_2\right]\Delta(x)\right.$$
$$\left.-\frac{a_4}{2}|\Delta(x)|^4+\cdots\right\}, \tag{7A.121}$$

其中，导数项直接由式 (7A.118) 而得. 式中省略号代表高阶展开项，包含场的更高幂次项如 $|\Delta(x)|^6,|\Delta(x)|^8,\cdots$ 或更高阶导数项如 $|\boldsymbol{\nabla}^2\Delta(x)|^2,|\partial_t\Delta(x)|^2,\cdots$. 然而这些项对于研究相变都无关紧要.

为了确定 a_2 和 a_4，我们将分解 $\Delta(x)=\Delta+\delta\Delta(x)$ 代入式 (7A.121)，发现如果 $a_2<0$，则作用量在 $\Delta=\sqrt{-a_2/a_4}$ 处具有极小值. 二次型涨落 $\delta\Delta(x)$ 不仅具有与式 (7A.121) 中同样的导数项，同时势能项 $-a_2|\Delta(x)|^2-a_4|\Delta(x)|^4/2$ 也对它有如下贡献：

$$\Delta\mathcal{A}_2\approx-\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left[\left(a_2+2a_4\Delta^2\right)\delta\Delta^*(x)\delta\Delta(x)\right.$$
$$\left.+\frac{a_4}{2}\left(\Delta^2\left\{[\delta\Delta(x)]^2+[\delta\Delta^*(x)]^2\right\}\right)\right]. \tag{7A.122}$$

在极值点处，式 (7A.122) 变为

$$\Delta\mathcal{A}_2\approx a_2\int\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left(\delta\Delta^*(x)\delta\Delta(x)+\frac{1}{2}\left\{[\delta\Delta(x)]^2+[\delta\Delta^*(x)]^2\right\}\right). \tag{7A.123}$$

按照南部–戈德斯通定理，$\delta\varDelta(x)$ 的虚部已经被拿掉，这样就保证了它的无限长波长的涨落具有无限大尺度.

将式 (7A.123) 与式 (7A.39) 对比，对于小的 $\varDelta$，我们就可确定 $a_4\varDelta^2$ 为方程 (7A.80) 中的 $L_{12}(0,\mathbf{0})$，即

$$a_4 \approx \frac{\mathcal{N}(0)}{2\varDelta^2}\phi(\delta) \approx \mathcal{N}(0)\frac{1}{\pi^2T^2}\frac{7\zeta(3)}{8} = \mathcal{N}(0)\frac{6\xi_0^2}{\hbar^2v_{\mathrm{F}}^2}. \tag{7A.124}$$

常数 a_2 则为 [参看式 (7A.35) 和式 (7A.97)]

$$a_2 = -\varDelta^2a_4 \approx \mathcal{N}(0)\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}-1\right). \tag{7A.125}$$

将此代入式 (7A.121) 中，我们看到，$\varDelta(x)$ 围绕 $\varDelta$ 的涨落具有如下的相干长度：

$$\xi(T)=\xi_0\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}-1\right)^{-1/2}, \quad T>T_{\mathrm{c}}, \tag{7A.126}$$

$$\xi_{\mathrm{size}}(T)=\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}-1\right)^{-1/2}, \quad T<T_{\mathrm{c}}. \tag{7A.127}$$

对临界温度处于 $1\sim10$ K、费米温度处于 $10^4\sim10^5$ K 区间且费米动量的量级为 $\hbar/\text{Å}$的情形，我们看到相干长度是非常大的，为 $10^3\sim10^4$ Å这个量级.

不难看出，如令①

$$\psi(x)=\sqrt{2\mathcal{N}(0)}\xi_0\,\varDelta(x), \quad \tau=\frac{1}{\xi_0^2}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}-1\right), \tag{7A.128}$$

则作用量式 (7A.121) 中的能量与式 (5.151) 中的金兹堡–朗道能量是相一致的. 于是，方程 (7A.123) 中的 a_4 就显示出式 (5.151) 中的耦合常数 g 取 BCS 值

$$g=\frac{3}{\mathcal{N}(0)\hbar^2v_{\mathrm{F}}^2\xi_0^2}. \tag{7A.129}$$

超导的凝聚能由下式给出：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{c}}=\frac{\tau^4}{4g}&=\frac{1}{4\xi_0^4}\,\frac{1}{3}\,\frac{(k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}})^2\xi_0^4}{7\xi(3)/48\pi^2}\mathcal{N}(0)\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2\\&=\frac{1}{7\xi(3)}\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{\hbar}\right)^3\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{F}}}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2,\end{aligned} \tag{7A.130}$$

它的量级为

$$\mathcal{E}_{\mathrm{c}}\approx10^{-4}k_{\mathrm{B}}\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2k_{\mathrm{B}}\mathrm{K}/\text{Å}^3\approx10^4\left(1-\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2\mathrm{erg/cm^3}. \tag{7A.131}$$

① 注意，$\psi,\mathcal{N}(0),\boldsymbol{\varDelta},g$ 的量纲分别为 (能量/长度) $^{1/2}$、能量 $^{-1}$· 长度 $^{-3}$、能量以及 (能量 · 长度)$^{-1}$.

为了对相互作用强度的大小有个更好的概念，采用在方程 (5.265) 后讨论涨落所用到的自然单位制并且用 $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}$ 作为单位来量度能量应该是比较有利. 另外，我们将用 ξ_0 作为单位来量度距离. 这样，将 $\sqrt{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}/\xi_0}$ 从 ψ 和 A 中除去，并且将 ξ_0 从 x 除去 (即 $\psi_{\mathrm{new}} = \sqrt{\xi_0/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}\psi$, $A_{\mathrm{new}} = \sqrt{\xi_0/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}A$, $x_{\mathrm{new}} = x/\xi_0$)，我们就得到了如下无量纲金兹堡–朗道哈密顿量：

$$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}} = \int \mathrm{d}^3x \left\{ \frac{1}{2}|(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A})\psi|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{c}}} - 1\right)|\psi|^2 + \frac{g}{4}|\psi|^4 + \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \right\}. \tag{7A.132}$$

在这里，耦合常数 g 和 q 为无量纲的，而它们的大小分别为

$$g = \frac{3\xi_0 k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}{N(0)\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 \xi_0^2} = \frac{3}{2}\pi^2 \sqrt{\frac{7\xi(3)}{48\pi^2}}^{-1} \left(\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2 \sim 111.08 \left(\frac{T_{\mathrm{c}}}{T_{\mathrm{F}}}\right)^2, \tag{7A.133}$$

$$q = \frac{2e}{\hbar c}\sqrt{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}\xi_0} = 2\sqrt{4\pi\alpha\frac{v_{\mathrm{F}}}{c}\sqrt{\frac{7\xi(3)}{48\pi^2}}} \sim 2.59\sqrt{\alpha\frac{v_{\mathrm{F}}}{c}}, \tag{7A.134}$$

其中，$\alpha = (e^2/4\pi)/\hbar c = 1/137$ 为精细结构常数. 由于 $T_{\mathrm{c}}/T_{\mathrm{F}} \sim 10^{-4}$ 且 $\alpha(v_{\mathrm{F}}/c) \sim 10^{-4}$，因此这两个耦合常数都非常的小，即 $g \sim 10^{-6}$, $q \sim 10^{-2}$.

Gorkov 最初的推导[5] 仅适用于完美晶体. 而在含杂质缺陷的材料中，电子的平均自由程是有限的，比如说是 ℓ. 在此情形下，式 (7A.121) 中的导数项前的长度尺度 ξ_0^2 会有一个修正因子

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+1+\xi_0/2\pi \cdot 0.18\ell)} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}, \tag{7A.135}$$

而其他项保持不变. 在洁净极限下，即 $\ell = \infty$ 时，r 等于 1. 而在重掺杂材料中，$\ell \ll \xi_0$，r 就变为 $\sim 0.18\,(\ell\xi_0)$，这个数值可以是非常小的. 如果将 $\xi_0' = r^{1/2}\xi_0$ 作为新的长度量度且将 $\sqrt{r^{1/2}\xi_0/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}$ 而不是 $\xi_0/k_{\mathrm{B}}T$ 从场量中除去的话，在约化能量中，此修正因子将会对上述常数造成如下的改变：

$$g \to gr^{-3/2}, \quad q \to qr^{1/4}. \tag{7A.136}$$

注意，约化凝聚能密度

$$\beta_{\mathrm{c}}\mathcal{E}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{4g\xi_0^3}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^2 \tag{7A.137}$$

不会有任何改变，因为 r 对于 ξ_0 和 g 的修正刚好是相反的. 这就是 Abrikosov 所给出的一个定理中的主要内容，即掺杂并不会改变超导体的整体热力学.

7B　超导体的金兹堡–朗道理论的特性

我们现在来讨论一下哈密顿量 (5.151) 所给出的金兹堡–朗道理论的一些特性. 相关的场方程为

$$\left[-(\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}q\boldsymbol{A})^2+\tau+g|\psi|^2\right]\psi=0, \tag{7B.1}$$

且

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=q\,\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}, \tag{7B.2}$$

其中，超流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}$ 由式 (5.152) 给出，方程 (7B.1) 的一个结果就是此超流是守恒的：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}=0. \tag{7B.3}$$

为了清楚地说明这一点，我们注意到微分的乘法规则同样适用于复场乘积的协变微商：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(a^\dagger b)&=(\boldsymbol{\nabla}a^\dagger)b+a^\dagger(\boldsymbol{\nabla}b)=(\boldsymbol{\nabla}+\mathrm{i}q\boldsymbol{A})a^\dagger b+a^\dagger(\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}q\boldsymbol{A})b\\&=(\boldsymbol{D}a)^\dagger b+a^\dagger\boldsymbol{D}b.\end{aligned} \tag{7B.4}$$

因此，对于乘法规则的每一项，我们可以直接将普通微商 $\boldsymbol{\nabla}$ 直接换成相应的协变微商 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}q\boldsymbol{A}$. 将此规则运用于式 (7B.3)，我们看到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{(\boldsymbol{D}\psi)^\dagger(\boldsymbol{D}\psi)+\psi^\dagger\boldsymbol{D}^2\psi-(\boldsymbol{D}\psi)^\dagger(\boldsymbol{D}\psi)-\left(\boldsymbol{D}^2\psi\right)^\dagger\psi\right\}\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\psi^\dagger\boldsymbol{D}^2\psi-\left(\boldsymbol{D}^2\psi\right)^\dagger\psi\right\},\end{aligned} \tag{7B.5}$$

根据场方程 (7B.1)，此式确实为零.

金兹堡–朗道方程 (7B.1) 和 (7B.2) 在规范变换

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\nabla}\Lambda(\boldsymbol{x}),\quad \psi(\boldsymbol{x})\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\Lambda(x)}\psi(\boldsymbol{x}) \tag{7B.6}$$

下的不变性可用来将 ψ 场的相位变换掉. 如同在式 (5.153) 中一样，我们将把该场量参数化为模和相角的形式，即 $\psi(\boldsymbol{x})=\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}$，但为了简单起见，我们省去了上面的波浪线. 我们可选 $q\Lambda(\boldsymbol{x})=-\theta(\boldsymbol{x})$，这样场方程就变为

$$\left[-(\boldsymbol{\nabla}-\mathrm{i}q\boldsymbol{A})^2+\tau+g\rho^2\right]\rho=0, \tag{7B.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=q\,\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}=-q^2\rho^2\boldsymbol{A}. \tag{7B.8}$$

将实部和虚部分开后，第一个方程就分解为一个关于 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的方程：

$$(-\nabla^2+q^2A^2+\tau+g\rho^2)\rho=0, \tag{7B.9}$$

以及一个关于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 的方程：

$$\rho\nabla\cdot\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\cdot\nabla\rho=0. \tag{7B.10}$$

第二个方程其实就是用模和相角表示的流守恒律 (7B.3)，在此表示形式下式 (5.152) 可写为

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})=\rho^2\left[\nabla\theta(\boldsymbol{x})-q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\right]. \tag{7B.11}$$

方程 (5.154) 给出了这些场变量下的哈密顿量. 在现在这种没有波浪线的写法下，不含涡旋的哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}=\int \mathrm{d}^3x\int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{1}{2}\left(\nabla\rho\right)^2+\frac{\tau}{2}\rho^2+\frac{g}{4}\rho^4+\frac{1}{2}q^2\rho^2\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{2}\left(\nabla\times A\right)^2\right\}. \tag{7B.12}$$

现在，从这个表达式中我们来给出一些相应的实验特性. 5.2.1 节中我们已经给出了超导相中有限穿透深度 λ 的推导. 在现在这个自然单位制下，其结果为

$$\lambda=1/q\rho. \tag{7B.13}$$

下面我们将进一步给出一些重要的特性.

7B.1　临界磁场

金兹堡–朗道方程对临界磁场 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}$ 的存在给出了解释，在临界磁场下，磁场侵入超导体中，迈斯纳效应消失，超导电流从而遭到破坏. 通过研究**磁焓**，其密度为

$$\mathcal{E}_H=\mathcal{H}_{\mathrm{GL}}-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}}, \tag{7B.14}$$

上述结论是很容易给出的. 我们可以看到，对于 $H^{\mathrm{ext}}<H_{\mathrm{c}}=(1/\sqrt{2})|\tau|/\sqrt{g}$，焓 $\mathcal{E}_H$ 在 $\rho_0=\sqrt{-\tau/g}$ 同时 $\boldsymbol{A}=0$ 时取极小，其极小值为

$$\mathcal{E}_H=-\frac{\tau^2}{4g}=\mathcal{E}_{\mathrm{c}}. \tag{7B.15}$$

然而，当 $H^{\mathrm{ext}}>H_{\mathrm{c}}$ 时，式 (7B.14) 的极小值处于 $\rho=0$ 且 $H=H^{\mathrm{ext}}$ 处，它在此处的值为

$$\mathcal{E}_H=-\frac{(\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}})^2}{2}. \tag{7B.16}$$

由于现在序参数为零，因此这个态不再超导.

当 $H^{\mathrm{ext}}=H_{\mathrm{c}}$ 时，系统可处于二者中的任意一个态. 在 cgs 单位制下，临界磁场由 $(H_{\mathrm{c}}^{\mathrm{ext}})^2/2=\mathcal{E}_{\mathrm{c}}$ 给出，根据式 (7A.130) 和式 (7A.131)，它的大小约为几个高斯.

金兹堡–朗道方程一个很有趣的结论是，它允许在同一个样品中超导态和常态同时存在，他们中间由畴壁分隔开来. 这种**混合态**也被称为是 **Shubnikov 态**， 这在实验中非常重要，值得我们对它进行一些细致的讨论.

7B.2　两个长度尺度以及第一类和第二类超导体

在场的期待值为 $\rho = \rho_0 = \sqrt{-\tau/g}$ 的超导相中，ρ 地涨落 $\delta\rho = \rho - \rho_0$ 有一个相干长度，由方程 (7A.127) 给定，在自然单位制下为

$$\xi_{\text{size}}(T) = \frac{1}{\sqrt{-2\tau}}. \tag{7B.17}$$

将此与式 (7B.13) 进行对比，我们就得到了穿透深度和相干长度的比值，即金兹堡–朗道参数 κ [参看式 (5.259)]

$$\kappa \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{2}\xi_{\text{size}}} = \sqrt{\frac{g}{q^2}}. \tag{7B.18}$$

对于 $\kappa > 1/\sqrt{2}$ 或者 $< 1/\sqrt{2}$，磁场的穿透深度则大于或者小于序参数的相干长度. 这两种情形分别被称为是第二类和第一类超导性.

将式 (7A.134) 代入，我们可估算出

$$\kappa \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{2}\xi_{\text{size}}} \approx 4.06 \frac{1}{\sqrt{\alpha v_{\text{F}}/c}} \frac{T_{\text{c}}}{T_{\text{F}}}, \tag{7B.19}$$

它的大小约为 1/10. 因此，一个洁净的超导体一般来讲是第一类的.

在一个掺杂的超导体中，相应的结果会有 r^{-1} 这样一个修正因子，这正是方程 (7A.136) 的结果.

因此，杂质可以将 κ 调入第二类超导体的区域内. 例如，在铝中，0.1% 的杂质就可达到这个效果.

现在，我们来考察一下超导和常体间畴壁的类型，这在不同的超导体间差别是很大的. 为此，将场变量进一步约化为 $\hat{\rho} = \rho/(-\tau/g)^{1/2}$ 会比较方便，这个量在超导态中将围绕单位 1 来震荡，$\rho_0 = (-\tau/g)^{1/2}$. 类似地，我们也将定义约化的矢势 $\hat{A} = A/\kappa(-\tau/g)^{1/2}$ 并且以温度相关的相干长度 $r^{1/2}\xi_0/(-\tau)^{1/2}$ 而不是 $r^{1/2}\xi_0$ 为单位来量度长度. 于是，对于 $\tau < 0$，式 (7A.132) 和式 (7B.12) 中的哈密顿量就变成

$$\hat{H}_{\text{GL}} \equiv \frac{g}{\tau^2} H_{\text{red}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left\{ |\left(\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}\boldsymbol{A}\right)\psi|^2 - |\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \frac{\kappa^2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)^2 \right\}, \tag{7B.20}$$

如用模和相角来表示的话为

$$\hat{H}_{\text{GL}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left\{ \left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2 - \rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4 + \left[\rho^2 \boldsymbol{A}^2 + \kappa^2\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right)^2\right] \right\}, \tag{7B.21}$$

这里，为了简便起见，我们已将场量上的尖帽符号省去了. 相应的超导电流密度为

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\psi^{\dagger}\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{A}|\psi|^2 = -\rho^2\boldsymbol{A}. \tag{7B.22}$$

我们还定义了一个约化磁场

$$\boldsymbol{H} \equiv \kappa\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \tag{7B.23}$$

以使磁场能量取通常的形式 $\boldsymbol{H}^2/2$，且临界磁场 H_{c} 等于 $1/\sqrt{2}$. 在此单位制下，场方程 (7B.7) 和 (7B.8) 就可简单写为

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}^2 + \boldsymbol{A}^2 - 1 + \rho^2\right)\rho = 0, \tag{7B.24}$$

$$\kappa^2\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \kappa\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = -\rho^2\boldsymbol{A}. \tag{7B.25}$$

对于缓慢变化的 H 和 ρ，比方说它们随着 x 的变化而缓慢变化且 $\boldsymbol{H}$ 指向 y- 方向，上述方程是可以求解的. 因此，我们取势函数沿 z 方向

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (0, 0 - A(x)), \tag{7B.26}$$

于是 (记 $' \equiv \partial_x$)

$$H(x) = \kappa A'(x). \tag{7B.27}$$

场方程于是变为

$$-\rho''(x) + A^2\rho(x) = \rho(x) - \rho^3(x), \tag{7B.28}$$

$$\kappa^2 A''(x) = \kappa H'(x) = \rho^2 A(x). \tag{7B.29}$$

对第二个方程进行求导，它就退化为了一个关于磁场的方程

$$\rho^2 H = \kappa^2(H'' - 2H'\rho'/\rho) = \kappa^2\rho^2\left(\frac{1}{\rho^2}H'\right)'. \tag{7B.30}$$

在第一个方程中，利用第二个方程式的另一种写法

$$A = \kappa^2 A''/\rho^2 = \kappa H'/\rho^2, \tag{7B.31}$$

我们可用磁场将 A 替换掉，于是有

$$-\rho'' + \kappa^2 H'^2/\rho^3 = \rho - \rho^3. \tag{7B.32}$$

现在，我们注意到，对于 $\kappa = 1/\sqrt{2}$，磁涨落和序参数场的模的涨落具有同样的长度尺度，上述方程将变得异常简单. 因为，如果我们做一个试探性假设

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\rho^2), \tag{7B.33}$$

并将之代入式 (7B.30)，就得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\rho^2\right)\rho^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho\rho'' - \rho'^2\right). \tag{7B.34}$$

而这恰好与第二个场方程 (7B.32) 是吻合的. 另外，引入 $\sigma = 2\log\rho$ 后我们看到式 (7B.34) 就约化为一个刘维型的微分方程

$$\frac{\sigma''}{2} = \mathrm{e}^{\sigma} - 1. \tag{7B.35}$$

对此进行积分就得到

$$\frac{\sigma'^2}{4} = \mathrm{e}^{\sigma} - 1 - \sigma, \tag{7B.36}$$

或

$$x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\sigma} \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\sqrt{\mathrm{e}^{\zeta} - 1 - \zeta}}. \tag{7B.37}$$

当 $x \to -\infty$，σ 将按 $\mathrm{e}^{x/\sqrt{2}}$ 趋于零，于是 $\rho \sim \exp(\mathrm{e}^{x/\sqrt{2}}/2) \to 1$. 因此对于 $x \to -\infty$ 的情形，体系存在超导有序而没有磁场；当 $x \to \infty$ 时体系是无序的，即 $\rho = 0$，相应的临界磁场为 $H = H_{\mathrm{c}} = 1/\sqrt{2}$. 对于 $\kappa = 1/\sqrt{2}$ 的畴壁，重要的一点是在 $H^{\mathrm{ext}} = 1/\sqrt{2}$ 的外磁场中，这些畴壁是可以不耗费任何能量就可以形成的. 为了看清楚这一点，我们现在在约化单位制下来计算磁焓 (对任何的 κ)，它为

$$\begin{aligned}\hat{E}_H &= \int \mathrm{d}^3x\, \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{GL}} - \int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}} \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 - \rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4 + \left(\rho^2\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)\right] - \int \mathrm{d}^3x\, \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}}.\end{aligned} \tag{7B.38}$$

从此式中将凝聚能 $\hat{E}_{\mathrm{c}} = -(1/4)\int \mathrm{d}^3x$ 减掉，并将场方程 (7B.24) 代入，我们得

$$\hat{E}_H - \hat{E}_{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}^3x \left[\left(1-\rho^4\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{ext}}\right]. \tag{7B.39}$$

这就是畴壁的能量. 当在指向 y 方向的临界磁场 $H^{\mathrm{ext}} = H_{\mathrm{c}} = 1/\sqrt{2}$ 中时它为

$$\hat{E}_H - \hat{F}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \left[-\frac{\rho^4}{2} + \left(H - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]. \tag{7B.40}$$

将 $\kappa = 1/\sqrt{2}$ 代入方程 (7B.33) 中，结果确实为零. 即对于 $\kappa = 1/\sqrt{2}$，畴壁的形成将不需要耗费能量.

假定畴壁能量是 κ 的单调函数，则畴壁能量在 $\kappa > 1/\sqrt{2}$ 和 $\kappa < 1/\sqrt{2}$ 两个不同的区域内将取不同的正负号. 事实上，对上述不同方程所进行的数值讨论也确实证实这个猜测. 图 7B.1 给出了场方程的解. 将它们代入式 (7B.40) 中显示，对于 $\kappa < 1/\sqrt{2}$ 能量 $\hat{F}_H - \hat{F}_{\rm c}$ 是正的，而对于 $\lambda < 1/\sqrt{2}$ 则是负的. 因此，我们可以得出结论，第一类超导体倾向于形成单一态，而第二类超导体则更喜欢混合态.

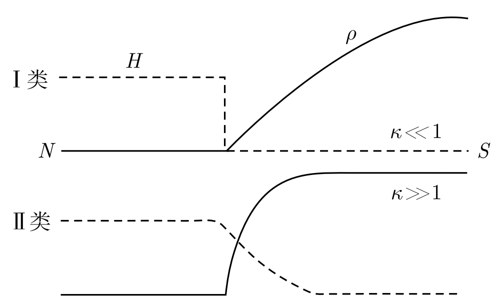


图 7B.1　正常态 N 和超导态 S 间平面畴壁附近的序参量 ρ 和磁场 H 的空间变化. 磁场方向平行于该畴壁

其实，上面所计算的平面畴壁在形成混合态时并不具有能量优势. 一个更好的构型则由一丛磁通涡旋构成. 为了阐明这一点，接下来我们将考察具有单个涡旋的解的性质.

7B.3　单涡旋线和临界磁场 H_{c_1}

在第二类超导体中，混合态在磁场远低于临界值 $H_{\rm c} = 1/\sqrt{2}$ 的区域就已经形成了. 原因在于，存在这样一个解，它允许一个很小的磁通侵入超导体，该磁通为

$$\varPhi_0 = \frac{ch}{q} = \pi\frac{c\hbar}{e} \approx 2\times 10^{-7}\,\mathrm{Gs\cdot cm^2}. \tag{7B.41}$$

这个解具有涡旋线的形式. 这样一个涡旋线可以被看作单一超导态中的一个线状缺陷. 在这个意义下，它类似于 ^{4}He 超流中的涡旋线. 然而，这两种对象其实具有非常不同的物理特性，我们接下来将对此进行讨论.

假定系统处于超导态且没有外加电压，因此系统中不存在电流 j. 现在，我们沿着 z 轴引入一个涡旋线. 然后，我们就可以用式 (7B.22) 中的电流公式得到相应的矢势

$$\boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{j}_{\rm s}}{|\psi|^2} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{|\psi|^2}\psi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\nabla}} \psi. \tag{7B.42}$$

在远离涡旋线的区域，系统的态不会受到扰动，即 $\boldsymbol{j}_{\rm s}$ 等于零，于是我们就有关系式

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{|\psi|^2}\psi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{\nabla}} \psi. \tag{7B.43}$$

在极坐标分解下，$\psi(\boldsymbol{x})=\rho(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(\boldsymbol{x})}$，对 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的导数相互抵消掉了，则 $A_i(\boldsymbol{x})$ 只依赖于序参数的相角

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}). \tag{7B.44}$$

到此，我们就可建立起与 $^4\mathrm{He}$ 超流中相关讨论的联系. 在那个讨论中，超流速度正比于相角变量 θ 的梯度. 而 θ 的多值性则直接导致了相应的量子法则，即任何沿着围绕涡旋线的闭合回路对 $\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})$ 所做的积分都只可能是整数倍的 2π. 该法则同样也适用于这里：

$$\oint_{\mathrm{B}}\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{x})=\oint_{\mathrm{B}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})=2\pi n. \tag{7B.45}$$

将 $\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})$ 通过式 (7B.44) 用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 来表示，并且利用式 (4.21) 中的斯托克斯定理，这就等于穿过回路所包围面积的磁通 [请回顾方程 (7B.23)]

$$\varPhi=\int_{S_{\mathrm{B}}}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}=\kappa\int_{S_{\mathrm{B}}}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}]=\kappa\oint_{\mathrm{B}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}=2\pi n\kappa. \tag{7B.46}$$

此式采用自然单位制. 对此采用物理单位制下的量子化条件，并且采取同先前探讨式 (5.152) 中与式 (5.151) 中能量相关的流时同样的观点，我们就得

$$\varPhi=n\varPhi_0, \tag{7B.47}$$

其中，$\varPhi_0$ 已在式 (7B.41) 中给出[7].

注意，当我们沿着一个很靠近涡旋轴的环线积分的时候，我们是无法将 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$ 忽略掉的，因此式 (7B.44) 就变为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}}{|\psi|^2}=\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}). \tag{7B.48}$$

角量积分 $\oint\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta$ 仍然保持量子化，且等于 $2\pi n$. 这样，我们就得到量子化规则

$$\oint_{\mathrm{B}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\left(\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}}{|\psi|^2}\right)=2\pi n, \tag{7B.49}$$

或

$$\varPhi=-\frac{1}{|\psi|^2}\oint_{\mathrm{B}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}+2\pi n\kappa. \tag{7B.50}$$

此方程显示出积分回路越小，它所包含的磁通就越少. 量子化磁通 $2\pi n\kappa$ 的一部分会被围绕涡旋线的超导电流所产生的磁场破坏掉.

定量上，通过在柱坐标中求解场方程 (7B.24) 和 (7B.25)，我们可以给出涡旋线的特性. 将第二个方程代入到第一个中，我们得

$$-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}+\frac{\kappa^2}{\rho^3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}H\right)^2-(1-\rho^2)\rho=0. \tag{7B.51}$$

对第二个方程取旋度就会得到柱坐标下类似于式 (7B.30) 的方程，即

$$H=\kappa^2\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{f}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}H. \tag{7B.52}$$

对于 $r\to\infty$ 我们有如下边界条件：$\rho=1$, $H=0$ (具有迈斯纳效应的超导态) 且 $\boldsymbol{j}_\mathrm{s}=0$ (没有超导电流). 由于对于稳定的超导电流，根据式 (1.188) 中的安培定律，我们有 $\boldsymbol{j}_\mathrm{s}\propto\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}$，则上面最后一个边条件等价于

$$H'(r)=0,\quad r\to\infty. \tag{7B.53}$$

在柱坐标中，磁通量子化可写为如下形式：

$$\varPhi=2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}rrH=2\pi n\kappa. \tag{7B.54}$$

将方程 (7B.52) 代入这一结果中，就给出

$$\varPhi=2\pi\kappa^2\left[\frac{r}{\rho^2}H'\right]_0^\infty=-2\pi\kappa^2\left[\frac{r}{\rho^2}H'\right]_{r=0}, \tag{7B.55}$$

因此，量子化条件就转化为了原点处的边界条件：

$$H'\to-\rho^2\frac{n}{\kappa}\frac{1}{r},\quad r\to 0. \tag{7B.56}$$

将此条件代入式 (7B.51) 我们看到，靠近原点时 $\rho(r)$ 满足以下方程：

$$-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\rho(r)+\frac{n^2}{r^2}\rho-(1-\rho^2)\rho\sim 0, \tag{7B.57}$$

这等价于如下行为：

$$\rho(r)=c_n\left(\frac{r}{\kappa}\right)^n+O(r^{n+1}). \tag{7B.58}$$

将此回代入式 (7B.56)，我们就得

$$H(r)=H(0)-\frac{c_n^2}{2\kappa}\left(\frac{r}{\kappa}\right)^{2n}+O(r^{2n+1}). \tag{7B.59}$$

对于大的 r，$\rho\to 1$，我们可以利用变形贝塞尔函数 K_0，外加一个参数 α，来求解方程 (7B.52)，即[①]

$$H(r)\to\alpha K_0\left(\frac{r}{\kappa}\right),\quad r\to\infty. \tag{7B.60}$$

① 对于很大的 r, 有如下极限：$\sqrt{\pi\kappa/2r}\mathrm{e}^{-r/k}$.

H 在超过某个长度尺度上会有变化，这个尺度为 κ. 相较于此，对于大的 $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$ (即在第二类超导区域的深处)，ρ 会很快地趋于 1. 因此，式 (7B.60) 中的行为在非常靠近原点的区域内有效. 我们可以通过令式 (7B.60) 与式 (7B.56) 相一致来确定参数 α，其结果为

$$\alpha \approx \frac{n}{\kappa}, \tag{7B.61}$$

其中，我们已经利用了小 r 行为 $K_0' = K_1 \sim -1/r$. 一般来讲，$H(r)$ 和 $\rho(r)$ 需通过数值方法来获得. 对于 $n = 1$，图 7B.2 显示了 $\kappa = 10$ 时的一个典型的解. 涡旋线的能量可以通过式 (7B.21) 来计算. 将运动方程代入，并像式 (7B.39) 中那样将凝聚能 $\hat{E}_{\mathrm{c}} = -(1/4)\displaystyle\int \mathrm{d}^3 x$ 减掉，我们发现

$$\hat{E}_{\mathrm{v}} = \hat{E}_{\mathrm{H}} - \hat{E}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \left[\frac{1}{2}\left(1-\rho^4\right) + \boldsymbol{H}^2\right]. \tag{7B.62}$$

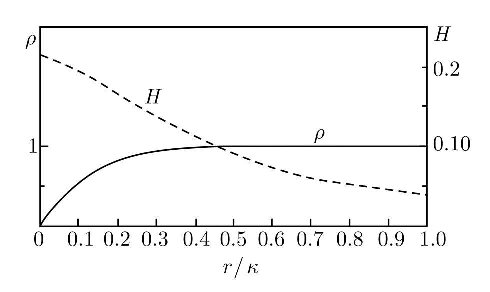


图 7B.2　在深度第二类超导区域 ($\kappa = 10$) 中具有 $n = 1$ 基本磁通单位的涡旋的序参数 ρ 与磁场 H. ρ 趋于 1 的半径就是涡旋核的半径 r_{c} (此处 $r_{\mathrm{c}} \approx 0.5\kappa$)

当 $\kappa \gg 1/\sqrt{2}$，我们可以将半径 $r \leqslant 1$ 的区域忽略掉，因为在这个区域上 ρ 会很快地由零升到它的渐近值 $\rho = 1$. 而在 $r \geqslant 1$ 但 $r \leqslant \kappa$ 的区域，H 由式 (7B.60) 给出. 将此代入式 (7B.51) 并结合式 (7B.58)，我们得

$$\rho(r) \sim 1 - \frac{n^2}{2r^2}. \tag{7B.63}$$

对此区域，即 $1 \leqslant r \leqslant \kappa$，它对单位长度涡旋线能量的贡献为

$$\frac{1}{L}\hat{E}_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}2\pi\int_1^\kappa \mathrm{d}r\ r\left[\frac{1}{2}\left(1-\rho^4\right)+H^2\right] = \pi n^2\int_1^\kappa \mathrm{d}r\ r\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\kappa^2}K_0^2\left(\frac{r}{\kappa}\right)\right]. \tag{7B.64}$$

当 $\kappa \to \infty$，第二个积分就趋于一个常数 $\left[\text{因为} \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x x K_0^2(x) = \frac{1}{2}\right]$. 然而，第一个积分却有一个对数型发散，因此我们得出涡旋线的能量为

$$\frac{1}{L}\hat{E}_{\mathrm{v}} \approx \pi n^2 \left[\log\kappa + \text{const.}\right]. \tag{7B.65}$$

更精确细致的估算给出的结果为 $\pi n^2(\log\kappa+0.08)$.

现在我们来研究一下在怎样的外磁场下这样的一个涡旋线才可以形成. 为此，我们再一次考察 (7B.39) 中的磁焓并从 $(1/L)\hat{E}_{\rm v}$ 中将磁耦合 $HH^{\rm ext}$ 减掉，这样，对于单位长度而言，就有

$$\frac{1}{L}\hat{E}_H=\pi n^2(\log\kappa+0.08)-2\pi\int_0^\infty {\rm d}r rHH^{\rm ext}. \tag{7B.66}$$

对 H 的积分，很简单，就是与涡旋线相关的式 (7B.46) 中的磁通量子，即

$$\frac{1}{L}\hat{E}=\pi n^2\left(\log\kappa+0.08\right)-2\pi n\kappa H^{\rm ext}. \tag{7B.67}$$

当此值小于零时，涡旋线就会沿着 z 轴穿透超导体. 相应的临界磁场为

$$H_{{\rm c}_1}=\frac{n}{2\kappa}\left(\log\kappa+0.08\right). \tag{7B.68}$$

对大的 κ，这个场可以是非常小的. 在图 7B.3 中，对 $n=1,2,3,\cdots$，我们对比了以上渐近结果和相应的数值结果. 为了与试验数据相比较，我们将该场用临界磁场 $H_{\rm c}=1/\sqrt{2}$ 来表示并测量它们之间的比值

$$\frac{H_{{\rm c}_1}}{H_{\rm c}}=\frac{n}{\sqrt{2}\kappa}\left(\log\kappa+0.08\right). \tag{7B.69}$$

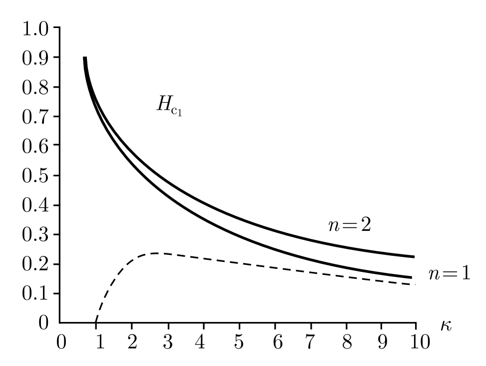


图 7B.3　当磁场首次穿透第二类超导体并形成一个强度为 n 的涡旋线时的临界场 $H_{{\rm c}_1}/n$ 同参数 κ 的关系图. 点线给出了式 (7B.68) 中的渐进结果 $(1/2\kappa)\log\kappa$. 磁场 $H_{{\rm c}_1}$ 以 $\sqrt{2}H_{\rm c}$ 为单位量度，在 $H_{\rm c}$ 处磁能与凝聚能相等

作为一个例子，我们知道，纯的铅是第一类超导体，它的临界磁场为 $H_{{\rm c}_1}=H_{\rm c}\approx 550$ Gs. 15% 铱或 30% 铊的掺杂会分别使 $H_{\rm c}$ 上升至 650 或 430，且使 $H_{{\rm c}_1}$ 降低到 250 或 145 (表 7B.1).

7B.4　超导性遭到破坏的上临界磁场 $H_{{\rm c}_2}$

当磁场增大到 $H_{{\rm c}_1}$ 以上后，越来越多的涡旋线将穿透超导体. 当 $H\sim H_{\rm c}$ 时，

表 7B.1　不同掺杂下 Pb 和 Nb 中的临界磁场(以高斯为单位)

材料	H_c	H_{c_1}	H_{c_2}	T_c/K
Pb	550	550	550	4.2
0.850 Pb, 0.150 Ir	650	250	3040	4.2
0.750 Pb, 0.250 In	570	200	3500	4.2
0.700 Pb, 0.300 Tl	430	145	2920	4.2
0.976 Pb, 0.042 Hg	580	340	1460	4.2
0.916 Pb, 0.088 Bi	675	245	3250	4.2
Nb	1608	1300	2680	4.2
0.500 Nb, 0.500 Ta	252	—	1470	5.6

这些涡旋线将形成一个六角阵列，如图 7B.4 所示. 如果磁场进一步增大，分隔涡旋线的超导区域将变得越来越薄，最终，整个材料中将充满磁场，超导性就丧失殆尽了. 这样一种情况发生的临界磁场记为 H_{c_2}. 根据 Abrikosov 的理论，这个临界磁场的值很容易估算. 他注意到，当接近 H_{c_2} 时，序参量是如此的小，以至于那些非线性项是可以忽略不计的，于是金兹堡–朗道方程就变为

$$\left[\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{A}\right)^2-1\right]\psi(\boldsymbol{x})=0. \tag{7B.70}$$

对于 H 沿 z 方向的情况，我们可以选取

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\left(0,\frac{1}{\kappa}Hx,0\right) \tag{7B.71}$$

于是就有了如下的方程：

$$\left[-\partial_x^2-\left(-\mathrm{i}\partial_y-\frac{1}{\kappa}Hx\right)^2-\partial_z^2-1\right]\psi(\boldsymbol{x})=0. \tag{7B.72}$$

相应的最低的非平庸本征态为

$$\psi(\boldsymbol{x})=\text{const. }\mathrm{e}^{-(1/\kappa)H(x-p_y\kappa/H)^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_y y}. \tag{7B.73}$$

为了得到这个解，能量本征值 $H/\kappa-1$ 必须为负. 而这在 $H<H_{c_2}=\kappa$ 时是成立的. 该场 H_{c_2} 比临界磁场 H_c 要大 $\sqrt{2}\kappa$ 倍，而在第二类超导区域的深处这个值还要大. 举个例子，纯的铅的临界磁场为 $H_{c_2}=H_c=550$ Gs. 而 15% 铟或 30% 铊的掺杂分别会将 H_c 提高到 650 或 430，却会将 H_{c_2} 提高到 3040 或 2920 Gs. 图 7B.5 给出了一个临界磁场 H_c、H_{c_1} 和 H_{c_2} 随 T 变化的典型行为.

通过在图 7B.6 中将第一类超导体和第二类超导体的磁化曲线

$$-M=H^{\text{ext}}-H \tag{7B.74}$$

进行比较，我们不难看出，涡旋线的这种穿透行为是很明显的.

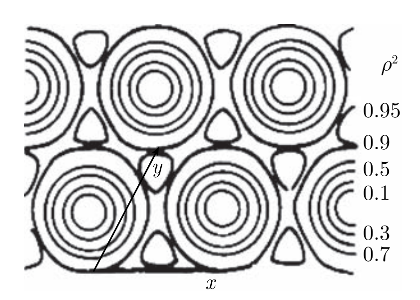


图 7B.4　典型的混合态中序参数 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的等值线，在此混合态中涡旋线形成了一个三角晶格[8]

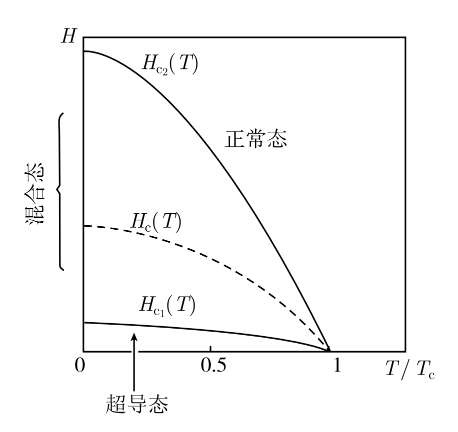


图 7B.5　第二类超导体中临界磁场随温度的变化行为：H_{c_1} (此时第一条涡旋线穿透超导体)、H_{c_2} (此时超导性消失) 以及 H_c (此时磁场能量同凝聚能相等)

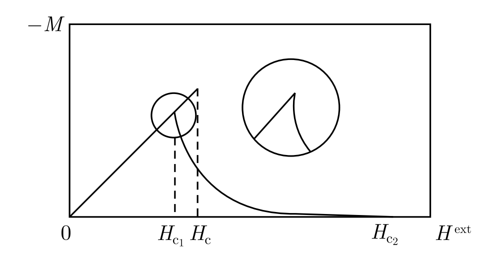


图 7B.6　磁化曲线同外磁场 H^{ext} 的关系图，虚线给出第一类超导体中的行为

文献与注记

[1]　经典磁流体动力学方程的相关讨论见：

J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1975, Sects. 6.12-6.13;

W.F. Hughes and F.J. Young, *The Electromagnetodynamics of Fluids*, Wiley, New York, 1966.

[2] F. London and H. London, Proc. R. Soc. London, A **149**, 71 (1935); Physica A **2**, 341 (1935);
H. London, Proc. R. Soc. A **155**, 102 (1936);
F. London, *Superfluids*, Dover, New York, 1961.

[3] H. Kleinert, *Collective Quantum Fields,* Lectures presented at the First Erice Summer School on Low-Temperature Physics, 1977, in Fortschr. Physik **26**, 565-671 (1978) (`kl/55`). See Eq. (4.118).

[4] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957);
M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, New York, 1975.

[5] L.P. Gorkov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **36**, 1918 (1959); [Sov. Phys.-JETP **9**, 1364 (1959)]; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **37**, 1407 (1959); [Sov. Phys.-JETP **10**, 998 (1960)].

[6] V.A. Adrianov and V.N. Popov, Theor. Math. Fiz. **28**, 340 (1976).

[7] 座位交叉验证，我们通过将二次约化场变量变换到物理的变量来再次对磁通的值进行计算. 为此，我们在物理的磁通中 $\Phi^{\rm phys} = \oint d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}^{\rm phys}$ 代入物理的场变量 $\boldsymbol{A}^{\rm phys} = \sqrt{k_{\rm B}T_{\rm c}/\xi_0}\,\sqrt{-\tau/g}\,\kappa\boldsymbol{A}$ 和 $x^{\rm phys}/x = \xi_0/\sqrt{-\tau}$，得到 $\Phi^{\rm phys} = \sqrt{\xi_0 k_{\rm B}T_{\rm c}}(1/q)\int d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} = \sqrt{\xi_0 k_{\rm B}T_{\rm c}}\,2\pi n/q = n(ch/2e)$，其中我们用到了方程 (7A.134)，据此 $q = (2e/\pi e)\sqrt{k_{\rm B}T_{\rm c}\xi_0}$.

[8] A.A. Abrikosov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 1442 (1957) [Sov. Phys.-JETP **5**, 1174 (1957)];
W.M. Kleiner, L.M. Roth, and S.H. Autler, Phys. Rev. A **133**, 1225 (1964);
E.H. Brandt, Phys. Status Solidi B **51**, 345 (1972);
J.L. Harden and V. Arp, Cryogenics **3**, 105 (1963).

第 8 章　相对论性磁单极与电荷禁闭

Do not confine your children to your own learning,
for they were born in another time.
Hebrew Proverb

第 4 章关于电磁学中的多值场论可以很容易地扩展为一个关于电荷和磁单极的完整的相对论性理论[1, 2]. 为此，我们转向四维时空，并且令其为欧几里得空间，它的第四个空间分量为 $\mathrm{d}x^4 = ic\mathrm{d}t$，这样就可避免因子 i.

8.1　磁单极规范不变性

麦克斯韦方程 (4.54) 的协变推广是方程 (1.200) 的一个自然修正，并且完全类比于式 (1.196) 中的麦克斯韦方程，可写为

$$\partial_b \tilde{F}^{ab} = -\frac{1}{c}\,\tilde{\jmath}^a, \tag{8.1}$$

其中，$\tilde{\jmath}_a$ 为磁单极流密度

$$\tilde{\jmath}_a = (c\rho_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}). \tag{8.2}$$

方程 (8.1) 说明磁流密度是守恒的：

$$\partial_a \tilde{\jmath}^a = 0. \tag{8.3}$$

式 (8.1) 的第零分量再一次给出了式 (4.54) 中磁场的散度方程 [请参阅式 (1.172) 中场分量的定义]. 其空间分量则给出了麦克斯韦方程 (1.18) 的扩展：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\,\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} \qquad (\text{扩展法拉第定律}). \tag{8.4}$$

对于沿着由参数 $q_a(\sigma)$ 表示的世界线 L 运动的强度为 g 的磁单极，磁流密度 $\tilde{\jmath}_a$ 可用世界线上的 δ 函数

$$\delta_a(x; L) \equiv \int \mathrm{d}\sigma \frac{\mathrm{d}\bar{x}_a(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\delta^{(4)}(x - \bar{x}(\sigma)) \tag{8.5}$$

表示为

$$\tilde{\jmath}_a = g\,c\,\delta_a(x; L). \tag{8.6}$$

这个表达式满足式 (8.3) 磁流守恒律，这是因为闭合世界线上的 δ- 函数具有如下散度性质：

$$\partial_a \delta_a(x;L) = 0, \tag{8.7}$$

而这正是式 (4.10) 的四维形式.

因此，磁流密度的时空分量就为 [请与式 (1.211) 和式 (1.212) 对照]

$$c\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t) = gc\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\gamma c\,\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\tau)), \tag{8.8}$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{x},t) = gc\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\,\gamma \boldsymbol{v}\,\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\tau)). \tag{8.9}$$

采用此种标记，式 (1.213) 中世界线上一个粒子的电流密度可写为

$$j_a = e\,c\,\delta_a(x;L), \tag{8.10}$$

并且满足电流守恒定律 $\partial_a j^a = 0$，这同样是因为式 (8.7) 中的恒等式.

方程 (8.1) 显示 F_{ab} 无法表示成一个单值矢势 A_a 的旋度，因为方程左边等于 $\dfrac{1}{2}\epsilon_{abcd}(\partial_a\partial_c - \partial_c\partial_a)A_d$. 微分算子的不对易性就说明了对施瓦茨可积条件的背离以及 A_d 的多值性. 如同在第 4.6 节中讨论静磁场那样，将磁单极世界线加入到电磁场理论中的最简单的方法就是额外引入一个磁单极规范场. 在四维时空中，它取如下形式：

$$F_{ab}^{\mathrm{M}} \equiv g\,\tilde{\delta}_{ab}(x;S), \tag{8.11}$$

其中，$\tilde{\delta}_{ab}(x;S)$ 为 δ 函数 $\delta_{cd}(x;S)$ 的**对偶张量**：

$$\tilde{\delta}_{ab}(x;S) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\delta_{cd}(x;S), \tag{8.12}$$

而 $\delta_{ab}(x;S)$ 则为世界面 S 上奇异：

$$\delta_{ab}(x;S) \equiv \int \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\left[\frac{\partial\bar{x}_a(\sigma,\tau)}{\partial\sigma}\frac{\mathrm{d}\bar{x}_b(\sigma,\tau)}{\partial\tau} - (a\leftrightarrow b)\right]\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\sigma,\tau)). \tag{8.13}$$

此 δ 函数的散度为

$$\partial_a\delta_{ab}(x;S) = \delta_b(x;L), \tag{8.14}$$

其中，L 为此曲面的边界线. 这可直接通过以下简单计算得到：

$$\begin{aligned}\partial_a\delta_{ab}(x;S) = &\int \mathrm{d}\tau\left[\frac{\mathrm{d}\bar{x}_b(\sigma_b,\tau)}{\partial\tau}\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\sigma_b,\tau)) - \frac{\mathrm{d}\bar{x}_b(\sigma_a,\tau)}{\partial\tau}\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\sigma_a,\tau))\right]\\ &-\int \mathrm{d}\sigma\left[\frac{\mathrm{d}\bar{x}_b(\sigma,\tau_b)}{\partial\sigma}\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\sigma,\tau_b)) - \frac{\mathrm{d}\bar{x}_b(\sigma,\tau_a)}{\partial\sigma}\delta^{(4)}(x-\bar{x}(\sigma,\tau_a))\right],\end{aligned}$$

其中，$\sigma_{a,b}$ 和 $\tau_{a,b}$ 分别为曲面参数的下界值和上界值，因此 $\bar{x}(\sigma_a,\tau)$、$\bar{x}(\sigma,\tau_a)$、$\bar{x}(\sigma_b,\tau)$ 以及 $\bar{x}(\sigma,\tau_b)$ 就是沿着曲面的边界跑动. 对于式 (8.12) 中的对偶 δ 函数，基于恒等式 (1A.24) 的欧几里得形式，我们知道它相应于式 (8.14) 的关系式为

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\partial_b\tilde{\delta}_{cd}(x;S)=\delta_a(x;L). \tag{8.15}$$

我们于是就得到了斯托克斯定理局域表达式 (4.24) 的四维形式.

将此 δ 函数用磁单极规范场 (8.11) 以及磁流密度 (8.6) 表示的话，式 (8.15) 中的关系给出

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\partial_a F^{\mathrm{M}}_{cd}=\frac{1}{c}\,\tilde{\jmath}_b. \tag{8.16}$$

上述曲面 S 为狄拉克弦的世界面. 对于任意给定的曲线 L，存在很多种可能的曲面 S. 固定边界 L，我们可以如下从一个曲面 S 变到另一个曲面 S'：

$$\tilde{\delta}_{ab}(x;S)\to\tilde{\delta}_{ab}(x;S')=\tilde{\delta}_{ab}(x;S)+\partial_a\tilde{\delta}_b(x;V)-\partial_b\tilde{\delta}_a(x;V), \tag{8.17}$$

其中，$\tilde{\delta}_a(x;V)$ 为 δ 函数

$$\tilde{\delta}_a(x;V)\equiv\epsilon_{abcd}\delta_{bcd}(x;V), \tag{8.18}$$

且

$$\delta_{abc}(x;V)\equiv\frac{1}{3!}\int\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda\left[\sum_{P(abc)}\epsilon_P\frac{\partial\bar{x}_a}{\partial\sigma}\frac{\partial\bar{x}_b}{\partial\tau}\frac{\partial\bar{x}_c}{\partial\lambda}\right]\delta^{(4)}\left(x-\bar{x}(\sigma,\tau,\lambda)\right), \tag{8.19}$$

其中的求和遍历所有六个指标的排列，且 ϵ_P 表示它们的手征性 ($\epsilon_P=+1$ 和 -1 分别表示偶排列和奇排列). 这些 δ 函数在四维空间中的三维区域 V 上是奇异的，此三维区域是曲面 S 在四维空间中运动而扫过的区域. 式 (8.17) 中的变换关系很显然是式 (4.29) 的推广.

一个无相互作用的多磁单极子系综可以用具有多个叠加的曲面 S 的规范场 (8.11) 来描述.

现在我们就可以来构造具有任意数目磁单极的系统的电磁作用量. 类比于方程 (4.86) 和 (5.27)，它只依赖于可积矢势 A_a 的总场强 $F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a$ 和式 (8.11) 中磁单极规范场 F^{M}_{ab} 之间的差，即该作用量为[3~6]

$$\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_{\mathrm{mg}}\equiv\mathcal{A}_{0,\mathrm{mg}}=\int\mathrm{d}^4x\,\frac{1}{4c}\left(F_{ab}-F^{\mathrm{M}}_{ab}\right)^2. \tag{8.20}$$

对 F^{M}_{ab} 的减除是很重要的，这就避免了麦克斯韦作用量

$$\mathcal{A}_0\equiv\int\mathrm{d}^4x\,\frac{1}{4c}F^2_{ab} \tag{8.21}$$

中的无穷大能量密度问题，这个发散是由狄拉克弦中 F_{ab} 的磁通流管引起的. 这个差

$$F_{ab}^{\text{obs}} \equiv F_{ab} - F_{ab}^{\text{M}} \tag{8.22}$$

是一个非奇异的可观测场强. 因为只有具有有限作用的场才是物理的，因此，就像它最初可能显现的那样，作用量不会包含 δ 函数平方项的贡献.

式 (8.20) 中的作用量呈现出两种规范不变性. 第一种就是原始的电磁规范不变性，相应的规范变换为 [请与式 (2.104) 进行对比]

$$A_a(x) \longrightarrow A'_a(x) = A_a(x) + \partial_a \Lambda(x), \tag{8.23}$$

其中，$\Lambda(x)$ 为任一满足可积条件的光滑函数，即

$$(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)\Lambda(x) = 0, \tag{8.24}$$

在此规范变换下 F_{ab}^{M} 显然是不变的. 第二种规范不变性体现在下面这个**磁单极规范变换**下：

$$F_{ab}^{\text{M}} \to F_{ab}^{\text{M}} + \partial_a \Lambda_b^{\text{M}} - \partial_b \Lambda_a^{\text{M}}, \tag{8.25}$$

其中，$\Lambda_a^{\text{M}}(x)$ 为可积矢量函数. 利用方程 (8.17)，这些函数的一般形式应是

$$\Lambda_a^{\text{M}}(x) = g\,\delta_a(x; V), \tag{8.26}$$

其中，三维区域 V 可以任意选取. 如果式 (8.11) 中的磁单极规范场包含多个跃变曲面 S 的话，则函数 $\Lambda_a^{\text{M}}(x)$ 将包含多个区域 V 的叠加.

为了得到作用量 (8.20) 的不变性，式 (8.25) 中的变换必须同时伴有下面这个电磁规范场的变换[3~6]：

$$A_a \to A_a + \Lambda_a^{\text{M}}. \tag{8.27}$$

由方程 (8.11)、(8.15) 和 (8.17) 我们看到，式 (8.25) 中磁单极变换部分的物理意义在于它可改变狄拉克世界曲面的形状但不改变其边界线，即不改变磁单极世界线. 但是有一个例外，就是式 (8.27) 中的涡旋规范变换取梯度形式，在此形式中 Λ_a^{M} 为 g 乘以以下所示的四维区域 V_4 上的 δ 函数的梯度：

$$\delta(x; V_4) \equiv \epsilon_{abcd} \int \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\kappa \, \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{x}_b}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{x}_c}{\partial \lambda} \frac{\partial \bar{x}_d}{\partial \kappa} \delta^{(4)}\left(x - \bar{x}(\sigma, \tau, \lambda, \kappa)\right), \tag{8.28}$$

即

$$A_a \to A_a + g\partial_a \delta(x; V_4). \tag{8.29}$$

这并不会对 F_{ab}^{M} 造成任何的改变，因为这就是原始电磁规范变换 (8.23) 的一个特殊形式.

当然，当时空中的狄拉克弦被形变后，场强 F_{ab} 肯定会相应地改变，不变的是可观测场强 $F_{ab}^{\text{obs}} = F_{ab} - F_{ab}^{\text{M}}$.

式 (8.27) 中的磁单极规范变换所显示的事实是，当存在磁单极时，规范场 A_a 必须是一个**周期变量**，在每一点 x 上对任何整数 n，$A_a(x)$ 与 $A_a(x)+gn$ 是一样的.

在此处，我们需要再次强调 (这点对于已经读过前面几章的读者来说当然都是很清楚的)，涡旋规范变换与式 (8.23) 中原始的规范变换之间没有任何关系. 有时候会在文献中看到一些错误的概念[7, 8]，即由于狄拉克弦可以通过以下变换来实现移动：

$$A_a \to A_a + g\partial_a \varOmega, \tag{8.30}$$

其中，$\varOmega$ 为弦所扫过的球面角，因此此弦的不可见性或许与电磁规范不变性 (连同波函数的单值性) 是有联系的. 毕竟，如果令 $\varLambda = g\varOmega$ 的话，式 (8.30) 与式 (8.23) 形式上确实很像. 然而，这样的讨论是无效的，因为此球面角是一个多值函数，它不满足式 (8.24) 中的可积条件. 因此，不管式 (8.30) 的形式怎样，它都**不是**一个规范变换. 这样一个论断同时也是因为它改变了沿狄拉克弦的磁场. 有时候，式 (8.30) 也被称为是 “奇异规范变换” 或 “广义规范变换”. 这样一种术语其实很容易引起误解，我们必须避免加以使用. 毕竟，如果我们允许式 (8.23) 中有这样的 “奇异” (即不可积) 变换 $\varLambda$ 的话，我们会发现我们可以从 $F_{ab}\equiv 0$ 得到任意的 F_{ab}，这样的话，在此变换下所谈论的物理肯定不再是不变的了[8].

这两个规范在概念上的完全独立性其实很容易从第 4.6 节中所讨论的例子中看到，在此例中并不存在普通的规范不变性，而在曲面 S 的形变下的不变性却对正确获得电流环周围的磁场至关重要.

磁单极及其电磁相互作用系统的配分函数由如下泛函积分给出：

$$Z = \int \mathcal{D}A_a^{\mathrm{T}} \int \mathcal{D}F_{ab}^{\mathrm{M}}\, \mathrm{e}^{-\mathcal{A}_{0,\mathrm{mg}}^{\mathrm{E}}}, \tag{8.31}$$

其中，$\mathcal{A}_{0,\mathrm{mg}}^{\mathrm{E}}$ 为式 (8.20) 中作用量的欧几里得形式. 在此，我们对积分测度已经采用了与式 (5.275) 中一样的简单表示形式，用 $\int \mathcal{D}F_{ab}^{\mathrm{M\,T}}$ 来表示关于震荡的跃变曲面 S (即狄拉克弦的世界面) 含规范固定的求和 $\sum_{\{S\}} \varPhi[F_{ab}^{\mathrm{M}}]$. 符号 $\int \mathcal{D}A_a^{\mathrm{T}}$ 表示在洛伦兹规范 $\partial_a A_a = 0$ 下对 A_a 的规范固定泛函积分.

8.2 电荷的量子化

现在我们将带电粒子引入作用量 (8.20). 这其实就是在作用量中加入式 (2.83) 中电流相互作用部分的欧几里得形式，即

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{i}}{c^2}\int \mathrm{d}^4 x_{\mathrm{E}}\, j_a(x) A_a(x), \tag{8.32}$$

其中，$j_a(x)$ 为带电粒子世界线 L 的电流

$$j_a = ec\,\delta_a(x;L). \tag{8.33}$$

为了简洁起见，我们在本章中将略去所有的上标 E.

根据电流守恒

$$\partial_a j_a = 0, \tag{8.34}$$

式 (8.32) 中的作用量很明显在电磁规范变换 (8.23) 下是不变得. 与之相反，只有当磁单极荷满足之前在式 (4.109) 中所推导出的著名的**狄拉克量子化条件**时，该作用量才能在磁单极规范变换下保持不变. 我们现在来看看在目前的四维理论中，上述结论会怎样.

在磁单极规范变换 (8.27) 下，总作用量

$$\mathcal{A}_{\rm tot} \equiv \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_{\rm mg} + \mathcal{A}_{\rm int} = \int {\rm d}^4x\,\frac{1}{4c}\left(F_{ab} - F^{\rm M}_{ab}\right)^2 + \frac{\rm i}{c^2}\int {\rm d}^4x\,j_a(x)A_a(x) \tag{8.35}$$

中只有 $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_{\rm mg}$ 部分是明显不变的. 而电学部分 $\mathcal{A}_{\rm int}$ 进而总的作用量将有如下变化：

$$\varDelta\mathcal{A}_{\rm tot} = \varDelta\mathcal{A}_{\rm int} = {\rm i}\frac{eg}{c}I, \tag{8.36}$$

其中，I 表示以下积分：

$$I \equiv \int {\rm d}^4x\,\delta_a(L)\delta_a(V). \tag{8.37}$$

如果 L 通过 V，则这个积分为一个整数，而如果它不通过 V 则为零. 在前一种情形中，操作式 (8.17) 中的弦扫过 L, 而在另一个情形中却不会. 为了证明这一点，我们让 L 沿着第一个坐标轴而令 V 为 234 子空间的整个区域. 这样 $\delta_a(x;L)$ 和 $\delta_a(x;V)$ 只在第一个方向上有不为零的分量：$\delta_1(x;L) = \delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_4)$，而 $\delta_1(x;V) = \delta(x_1)$. 将此代入积分式 (8.37) 就得出 $I = 1$.

狄拉克电荷量子化规则是量子理论的结果. 正如我们在第 2.8 节中所阐述的，几率振幅由对所有可能的场构型的求和来确定

$$振幅 = \sum_{场构型} {\rm e}^{{\rm i}\mathcal{A}/\hbar}, \tag{8.38}$$

其中，$\mathcal{A}$ 为系统的经典作用量. 此振幅在经典作用量的 $2\pi\hbar\times$ 整数的跃变下是不变的，因为这个改变量并不会对相因子 ${\rm e}^{{\rm i}\mathcal{A}/\hbar}$ 有任何贡献.

在欧几里得表示中，相应的求和就给出了式 (2.162) 中系统的配分函数. 该函数在欧几里得作用量的 $2\pi{\rm i}\hbar\times$ 整数的跃变下是不变的，因为这种变化并不会对求和式 (2.162) 中的波尔兹曼因子 ${\rm e}^{-\mathcal{A}^{\rm E}/\hbar}$ 给出任何贡献. 因此式 (8.36) 中欧几里得作用量的特性表明如果所有的电荷满足关系式

$$\frac{eg}{\hbar c} = 2\pi \times \text{整数} \tag{8.39}$$

的话，则该系统的物理在狄拉克弦的任何形变下都保持不变. 这种不变性使得狄拉克弦对于所有的带电粒子都是不可见的.

这个结果也可以用一种无量纲的方式来表述，我们可以用式 (1.145) 中的精细结构常数 $\alpha \approx 1/137.0359\cdots$ 将 e 表示为 $e^2 = 4\pi\hbar c\,\alpha$， 这样，电荷量子化条件就变为了①

$$g/e = \text{整数}/2\alpha. \tag{8.40}$$

这里我们需要强调，以上推导 (8.40) 的过程比很多文献中的推导过程所需的量子力学信息要少得多，在那些推导中我们需要将磁单极场中带电粒子的波函数包含进来[1, 2, 7]. 而在我们以上的推导中，粒子的轨道是固定的，只是狄拉克弦的世界面在磁单极规范变换下有所扰动. 量子化的得到只不过是要求系统在此变换下是不变的.

我们看到，电荷被量子化后，总的作用量 (8.35) 变为双规范不变的 — 它同时在普通的电磁规范变换 (8.23) 和磁单极规范变换 (8.25) 下是不变的.

这里需要提及的是，狄拉克量子化条件 (8.39) 只在带电粒子为整数自旋的情况下保证狄拉克弦的不可见性. 对于电子以及所有的半整数自旋粒子，波函数是双值的，因为该函数只能在将它转过 4π 后才能回到原值. 对于这些粒子，它们的电荷必须得是那些整数自旋粒子的两倍，且满足**施温格量子化条件**[9]

$$\frac{eg}{\hbar c} = 2 \times 2\pi \times \text{整数}. \tag{8.41}$$

8.3 电流和磁流间的相互作用

如果在与式 (8.35) 中作用量相联的配分函数中将 A_a 场积掉，我们就得到该相互作用

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^4x \Bigg\{ & \frac{1}{4c}\left[\left(F^{\mathrm{M}}_{ab}\right)^2 + 2\partial_a F^{\mathrm{M}}_{ab}\left(-\partial^2\right)^{-1}\partial_c F^{\mathrm{M}}_{cb}\right] \\ & + \frac{1}{2c^3} j_a(-\partial^2)^{-1} j_a + \frac{\mathrm{i}}{c^2}\partial_a F^{\mathrm{M}}_{ab}(-\partial^2)^{-1} j_b\Bigg\}. \end{aligned} \tag{8.42}$$

第二项

$$\mathcal{A}_{jj} = \frac{1}{2c^3}\int \mathrm{d}^4x j_a(-\partial^2)^{-1} j_a \tag{8.43}$$

① 在很多教科书中，作用量 (8.20) 具有一个系数 $1/4\pi$，这使得狄拉克电荷量子化条件的形式变为 $2eg/\hbar c =$ 整数. 在此约定中，$\mathrm{e}^2 = \hbar c\,\alpha$，因此最终的条件方程 (8.40) 是一样的.

就是通常的电流间相互作用，其中 $(-\partial^2)^{-1}$ 表示矢势 $A^a(x)$ 的**推迟格林函数**的欧几里得形式

$$(-\partial^2)^{-1}(x,x') = G(x-x') \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2}. \tag{8.44}$$

确实，将四分量电流密度 $j^a=(c\rho,\boldsymbol{j})$ [请参看式 (1.197)] 代入后，式 (8.43) 中的相互作用就变为

$$\mathcal{A}_{jj} = \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x'\,\rho(x)G(x,x')\rho(x') + \frac{1}{2c^3}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x'\,\boldsymbol{j}(x)G(x,x')\boldsymbol{j}(x'). \tag{8.45}$$

对于闵可夫斯基时空中的静电荷和电流，此式变为 [请与式 (4.98) 进行对比]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{jj} =& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\,\rho(t,\boldsymbol{x})\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\rho(t,\boldsymbol{x}')\\ &-\frac{1}{2c^2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\,\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x}').\end{aligned} \tag{8.46}$$

第一项就是**库仑相互作用**，第二项则是任意电流分布的**毕奥–萨伐尔相互作用**.

相互作用 (8.42) 中的前两项化为磁流间的相互作用 [请对比式 (4.100)]

$$\mathcal{A}_{\tilde{j}\tilde{j}} = \frac{1}{2c^3}\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{j}_a(-\partial^2)^{-1}\tilde{j}_a. \tag{8.47}$$

利用式 (1A.23) 中张量公式的欧几里得形式进行一些简单的计算不难得到

$$\tilde{j}^2 = \left(\frac{c}{2}\epsilon_{abcd}\partial_b F^{\mathrm{M}}_{cd}\right)^2 = \frac{c^2}{2}\left[(\partial_b F^{\mathrm{M}}_{cd})(\partial_b F^{\mathrm{M}}_{cd}) - 2(\partial_a F^{\mathrm{M}}_{ab})^2\right], \tag{8.48}$$

据此，从式 (8.16) 中我们就可得到上述的结果. 同方程 (8.45) 一样，磁相互作用 (8.47) 可以分解为时间和空间分量，只不过这里所包含的是磁荷和磁流密度.

式 (8.42) 中的最后一项

$$\mathcal{A}_{\tilde{j}j} = \int \mathrm{d}^4x\,\frac{\mathrm{i}}{c^2}\partial_a F^{\mathrm{M}}_{ab}(-\partial^2)^{-1}j_b \tag{8.49}$$

给出了电流和磁流间的相互作用，这正是式 (4.102) 中相互作用的相对论形式.

上述三个相互作用在磁单极规范变换 (8.25) 下均保持不变. 对于电流相互作用 (8.43) 以及磁流相互作用 (8.47) 来说这点是很明显的，因为它们只依赖于电荷或磁荷的世界线. 而对于混合相互作用 (8.49)，这种不变性却不是那么明显. 事实上，当我们作一个磁单极规范变换 (8.25) 后，并利用式 (8.10) 中电流 4-矢量的世界线表示式，该相互作用表达式可变为

$$\varDelta\mathcal{A}_{\tilde{j}j} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\frac{g}{c^2}\partial^2\delta_b(x;V)(-\partial^2)^{-1}j_b = \mathrm{i}\frac{ge}{c}\int \mathrm{d}^4x\delta_b(x;V)\delta(x;L) = \mathrm{i}\frac{ge}{c}I, \tag{8.50}$$

其中，I 在式 (8.37) 中有定义. 这个值并不为零，但该理论依然是不变的，因为依照狄拉克电荷量子化条件 (8.39)，$(ge/c)I$ 等于 $2\pi\hbar$ 乘以一个整数. 于是 $\mathrm{e}^{-\Delta\mathcal{A}_{\tilde{\jmath}j}/\hbar}$ 等于 1，则此理论是不变的. 读者可能已经注意到了与三维情形中混合相互作用 (4.102) 之间的相似性.

8.4 对偶规范场表述

我们现在要对总的作用量 (8.35) 进行如式 (4.86) 中哈密顿量那样的对偶变换，正是通过这样的方法我们才得到了式 (4.91) 中相应的对偶规范形式. 为此，我们引入一个独立的波动场 f_{ab} 并且将作用量 (8.20) 替换为如下等价形式 [与式 (4.87) 相类比的 4 维形式]：

$$\tilde{\mathcal{A}}_{0,\mathrm{mg}} = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{4c}f_{ab}^2 + \frac{\mathrm{i}}{2c}f_{ab}\left(F_{ab} - F_{ab}^{\mathrm{M}}\right)\right], \tag{8.51}$$

其中，A_a 和 f_{ab} 为两个独立的场变量. 将 $F_{ab} \equiv \partial_a A_b - \partial_a A_a$ 代入，则配分函数 (8.31) 变为

$$Z = \int \mathcal{D}A_{\mathrm{T}}^a \int \mathcal{D}f_{ab} \int \mathcal{D}F_{ab}^{\mathrm{M}}\, \mathrm{e}^{-\tilde{\mathcal{A}}_{0,\mathrm{mg}}}. \tag{8.52}$$

这里，我们可以将矢势 A_a 积掉，就得到了如下限制条件：

$$\partial_b f_{ab} = 0. \tag{8.53}$$

通过引入一个对偶电磁矢势 $\tilde{A}_a$ 并令 [请与式 (4.89) 相对照]

$$f_{ab} \equiv \epsilon_{abcd}\partial_c\tilde{A}_d, \tag{8.54}$$

上述限制调件就可以自动得到满足 (即比安基恒等式). 如果我们同时还引入下述对偶张量场：

$$\tilde{F}_{ab} \equiv \partial_a\tilde{A}_b - \partial_b\tilde{A}_a, \tag{8.55}$$

则式 (8.51) 中的作用量将取下述对偶形式

$$\tilde{\mathcal{A}}_{0,\mathrm{mg}} \equiv \tilde{\mathcal{A}}_0 + \tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{mg}} = \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{1}{4c}\tilde{F}_{ab}^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2}\tilde{A}_a\tilde{\jmath}_a\right), \tag{8.56}$$

其中

$$\tilde{\jmath}_a \equiv \frac{c}{2}\epsilon_{abcd}\partial_b F_{cd}^{\mathrm{M}} \tag{8.57}$$

为电磁源项. 将式 (8.11) 和式 (8.15) 代入，我们看到 $\tilde{\jmath}_a$ 就是式 (8.6) 中的磁流密度. 由于式 (8.57) 满足流守恒定律 $\partial_a\tilde{\jmath}_a = 0$ [请回顾式 (8.3)]，因此式 (8.56) 中作用量允许另外一组电磁规范变换

$$\tilde{A}_a \to \tilde{A}_a + \partial_a \tilde{\Lambda}, \tag{8.58}$$

其中，$\tilde{\Lambda}$ 为一个任意的可积函数

$$(\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a)\tilde{\Lambda} = 0. \tag{8.59}$$

如果我们将电流 (8.33) 包含进 (8.56) 中作用量的对偶形式中，那它就变成

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{1}{4c} f_{ab}^2 + \frac{\mathrm{i}}{2c} f_{ab} \left(F_{ab} - F_{ab}^{\mathrm{M}} \right) + \frac{\mathrm{i}}{c^2}\, j_a A_a \right]. \tag{8.60}$$

将此对 A_a 求极值，我们就得到

$$\partial_a f_{ab} = -\frac{1}{c}\, j_b, \tag{8.61}$$

而不是式 (8.53). 这个结果就要求引入一个与式 (8.11) 相似的规范场，即**电荷**规范场

$$\tilde{F}_{ab}^{\mathrm{E}} = e\, \tilde{\delta}_{ab}(x; S'). \tag{8.62}$$

于是，式 (8.61) 的解为

$$f_{ab} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} (\tilde{F}_{cd} - \tilde{F}_{cd}^{\mathrm{E}}). \tag{8.63}$$

式 (8.15) 中的恒等式保证了式 (8.61) 的成立.

当我们将式 (8.63) 代入式 (8.60) 后，发现

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{1}{4c} (\tilde{F}_{ab} - \tilde{F}_{ab}^{\mathrm{E}})^2 - \frac{\mathrm{i}}{4c} \tilde{F}_{ab}\, \epsilon_{abcd} \tilde{F}_{cd}^{\mathrm{M}} + \frac{\mathrm{i}}{4c} \tilde{F}_{ab}^{\mathrm{E}}\, \epsilon_{abcd} \tilde{F}_{cd}^{\mathrm{M}} \right]. \tag{8.64}$$

将第二项分部积分，并利用方程 (8.16)，我们就得

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{1}{4c} (\tilde{F}_{ab} - \tilde{F}_{ab}^{\mathrm{E}})^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2} \tilde{A}_a \tilde{\jmath}_a \right] + \Delta \mathcal{A}, \tag{8.65}$$

其中

$$\Delta \mathcal{A} = \frac{\mathrm{i}}{4c} \int \mathrm{d}^4 x\, \tilde{F}_{ab}^{\mathrm{E}}\, \epsilon_{abcd} F_{cd}^{\mathrm{M}}. \tag{8.66}$$

结合方程 (8.11) 和 (8.62)，我们发现此式的结果为整数倍的 eg/c:

$$\Delta \mathcal{A} = eg\, \frac{\mathrm{i}}{4c} \int \mathrm{d}^4 x\ \tilde{\delta}_{ab}(x; S)\, \epsilon_{abcd}\, \tilde{\delta}_{cd}(x; S') = \mathrm{i} \frac{eg}{c}\, n, \quad n = \text{整数}. \tag{8.67}$$

为了看清这一点，我们只需选取曲面 S 为 12 平面且 S' 为 34 平面. 于是 $\tilde{\delta}_{12}(x; S) = -\tilde{\delta}_{21}(x; S) = \delta(x_1)\delta(x_2)$ 且 $\tilde{\delta}_{34}(x; S') = -\tilde{\delta}_{43}(x; S') = \delta(x_3)\delta(x_4)$，其他的分量都为零，这样 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4 x\, \epsilon_{abcd} \tilde{\delta}_{ab}(x; S) \tilde{\delta}_{ab}(x; S') = 4 \int \mathrm{d}^4 x\, \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_4) = 4$. 此证明

可以很容易地推广至其他任意的 S 和 S' 的曲面构型.

现在，我们加上狄拉克量子化条件 (8.39) 以保证在磁单极规范变换 (8.25) 下的不变性，并从而保证在弦的形变 (8.17) 下的不变性. 这就使得相因子 $\mathrm{e}^{-\Delta\mathcal{A}/\hbar}$ 等于单位一，因此它对于任何量子过程并无影响.

于是，电荷与磁荷系统总作用量 (8.35) 的对偶作用量就为

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}} \equiv \tilde{\mathcal{A}}_0 + \tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{int}} + \tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{mg}} = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{4c}(\tilde{F}_{ab} - \tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab})^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2}\tilde{A}_a \tilde{\jmath}_a\right]. \tag{8.68}$$

它与式 (8.35) 中的作用量所描述的物理是相同的. 这里，磁单极是局域耦合的而带电粒子的世界线则由电荷规范场 (8.62) 来描述. 然而，由于自然界中电荷的绝对优势，这个对偶作用量也只是在纯学术的讨论下有意义.

请注意，对偶电磁作用量 (8.68) 与方程 (8.35) 中含有磁单极的电磁作用量具有同样的双规范不变性. 借助于狄拉克电荷量子化条件，不难看出它在电磁规范变换 (8.58) 和曲面 S 形变的磁单极规范变换 (8.25) 下是不变的.

8.5 磁单极规范固定

首先，我们需要将多余的磁单极规范变换 (8.29) 剔除掉，该变换含有特殊的规范函数 $\Lambda^{\mathrm{M}}_a = g\partial_a \sum_{V_4} \delta(x; V_4)$，这种剔除并不会对 F^{M}_{ab} 造成任何的改变. 而这可以通过以下规范固定条件来实现：

$$n_a \Lambda^{\mathrm{M}}_a \equiv 0, \tag{8.69}$$

其中，n_a 为一个任意的固定的单位矢量.

剩下的磁单极规范自由度可用来使所有的狄拉克弦呈一个标准形状，这样 $F^{\mathrm{M}}_{ab}(x)$ 就变成只是边界线 L 的函数. 事实上，对于任何一种单位矢量 n_a 的选择，我们都可以选取**磁单极轴规范**，它定义为

$$n_a F^{\mathrm{M}}_{ab} = 0. \tag{8.70}$$

为说明这一点，我们令 n_a 沿 4 轴并且来考查以下规范固定方程：

$$F_{4i} + \partial_4 \Lambda^{\mathrm{M}}_i - \partial_i \Lambda^{\mathrm{M}}_4 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8.71}$$

方程 (8.69) 要求 $\Lambda^{\mathrm{M}}_4 \equiv 0$. 而其空间分量 Λ^{M}_i 可由式 (8.71) 来确定. 如果他们只是一些通常的实函数，这个很简单. 然而，这些分量是 δ 函数的叠加这样一个事实使证明变得比较微妙，但依然是可以证明的，因此轴规范 (8.70) 总是可以选取的.

这可以通过类似于第 5.1.4 节中的过程加以演示. 我们可以将 4 维空间近似为一个细分的超立方晶格，其晶格常数为 a，并且设 F^{M}_{ab} 的 $d(d-1)/2$ 个分

量为定义在这些晶格面上的函数. 于是，上述 δ 函数 (8.28)、(8.26)、(8.5) 以及 (8.13) 就分别对应于整数函数 $\delta(x;V_4)\hat{=}N(x)$，$\delta_a(x;V)\hat{=}N_a/a$，$\delta_{ab}(x;S)\hat{=}N_{ab}/a^2$ 以及 $\delta_a(x;L)\hat{=}N_a/a^3$. 导数 ∂_a 对应于定义在式 (5.40) 中的晶格导数 ∇_a. 于是，$F^{\rm M}_{ab}$ 就可写为 $gN_{ab}(x)/a^2$，其中 $N_{ab}(x)$ 为整数. 规范固定 (8.71) 以及上述对规范函数的限制就等于要求解以下形式的整数值方程：

$$N_{4i}+\nabla_4 N^{\rm M}_i-\nabla_i N_4=0,\quad i=1,\,2,\,3, \tag{8.72}$$

其中，$N_4\equiv 0$. 文献 [10] 已经通过相似的方程证明这总是可行的.

这样固定规范后，我们就可以唯一地求解方程 (8.1)，所求得的磁单极规范场为

$$F^{\rm M}_{ab}=-2\epsilon_{abcd}n_c(n\partial)^{-1}\tilde{\jmath}_d. \tag{8.73}$$

利用此结果，式 (8.42) 最后一项中的电流与磁流间的相互作用就变为

$$\mathcal{A}_{j\tilde{\jmath}}=\epsilon_{abcd}\int \mathrm{d}^4x\, j_a(n\partial\,\partial^2)^{-1}n_b\partial_c\tilde{\jmath}_d. \tag{8.74}$$

这样的相互作用已在专著 [11] 中给出.

8.6 无自旋带电粒子的量子场论

带电以及带磁荷的粒子的完整的欧几里得量子场论可以通过对带有作用量 (8.35) 的玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\mathcal{A}_{\rm tot}/\hbar}$ 作泛函积分而得到. 这个泛函积分需要对所有的电磁场 A_a 以及对所有的电荷和磁荷世界线构型 L 和 L' 进行积分. 而这，反过来又可用描述世界线巨正则系综波动的无序场来替换掉[12]. 多体量子力学中的这种代换，即**二次量子化**的欧几里得类比，已在第 7 章中进行了阐述.

现在，我们假定对于磁单极来说系统中只存在少数一些固定的世界线 L. 而对于电子世界线，我们假定不仅包含一些固定的世界线 L'，而且还包含闭合世界线 L'' 的一个涨落的巨正则系综. 后者可以化为一个单一的复无序场 $\psi_{\rm e}$，它的费曼图就给出那些线 L''[13]. 相关技术我们已经在第 5.1.10 节中加以了叙述，并且它就对应着多体量子力学中的二次量子化. 换句话说，我们将研究**无序场论**的配分函数

$$Z=\int\mathcal{D}A^{\rm T}_a\mathrm{e}^{-\mathcal{A}_{\rm tot}}\int\mathcal{D}\psi_e\int\mathcal{D}\psi^*_e\,\mathrm{e}^{-\mathcal{A}_{\psi_e}}, \tag{8.75}$$

震荡电子轨道的场作用量为

$$\mathcal{A}_{\psi_e}=\int \mathrm{d}^4x\,\frac{1}{2}\left[|D\psi_e|^2+m^2|\psi_e|^2+\lambda|\psi_e|^4\right], \tag{8.76}$$

其中，D_a 表示包含规范场 A_a 的协变导数：

$$D_a \equiv \partial_a - \mathrm{i}\frac{e}{c}A_a. \tag{8.77}$$

当我们对此泛函积分按耦合常数 λ 的幂次进行微扰展开的话，ψ_{e} 场的费曼圈图将给出带电粒子闭合世界线系综中不同形式相互作用的直观图景.

8.7 磁荷禁闭理论

上述涨落的带电粒子的场的作用量就是金兹堡–朗道哈密顿量 (5.151) 的 4 维形式. 在前一章中我们已经讨论过，这样的哈密顿量可使我们通过调节 (8.76) 中的质量参数 m^2 而获得一个相变. 即 m^2 存在一个临界值，在这个点处系统将从一个有序相变到一个无序相. 在平均场论中，这个临界值为零. 当 $m^2>0$ 时，只有少数的一些涡旋环线可以被激发出来. 在此相中，场变量的期待值 $\langle\psi_e\rangle$ 为零. 另外，当协变导数 (8.77) 中的电荷 e 低于某个临界值 e_{c} 时，构型熵将压倒玻尔兹曼抑制，于是无限长的涡旋线就可以被热涨落激发出来. 相应地，质量参数 m^2 将变得小于零，同时无序场 ψ_{e} 开始具有不为零的期待值 $\langle\psi_e\rangle$，该期待值的绝对值为 $\sqrt{-m^2/2\lambda}$. 在此相中，电荷的世界线将激增且变得无限长，这个相因此是一个凝聚相. 这种 e 穿过 e_{c} 的变迁就是一种**相变**. 从导数项 $|D\psi_{\mathrm{e}}|^2$ 中，矢量场 $\boldsymbol{A}_a$ 可获得一个质量项 $(m_A^2/2c)\boldsymbol{A}_a^2$，其中 m_A^2 等于 $q^2c|m^2|/\lambda$. 对于非常小的 $e\ll e_{\mathrm{c}}$，矢势的穿透深度 $1/m_A$ 远大于无序场的相干长度 $1/m$，因此该体系具有类似于第二类超导体的行为.

在不同正负号磁单极之间，磁力线被挤压在一个四维的类似于 Abrikosov 磁通的流管内. 在目前这个泛函积分内，最初那些无关紧要的由荷的世界线 L 所包围的曲面 S 将通过相变而获得一个与其面积成正比的能量，这就消除了作用量的荷的规范不变性. 这样，它们就变成了实实在在的波动的物理对象，并且在荷之间产生出一个线性增长的静态势，于是就导致了磁荷的禁闭.

这个禁闭机制可以很简单地在流体力学极限或伦敦极限下加以描述. 在此极限下，场的大小 $|\psi_e|$ 已固定，因此它可用一个常数 $|\psi_e|$ 乘以一个依赖于时空位置的相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)}$ 来替换掉. 于是式 (8.75) 中关于 ψ_e 和 ψ_e^* 的泛函积分就退化为

$$\sum_{\{V\}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}\theta\exp\left\{-\frac{m_A^2c}{2q^2}\int\mathrm{d}^4x\left[\partial_a\theta-\theta_a^{\mathrm{v}}(x)-\frac{e}{c}A_a\right]^2\right\}, \tag{8.78}$$

其中，$\theta_a^{\mathrm{v}}(x)$ 为四维涡旋规范场

$$\theta_a^{\mathrm{v}}(x)\equiv 2\pi\delta_a(x;V). \tag{8.79}$$

对此，我们可以选取一个特殊的规范，例如，轴规范 $\delta_4(x;V)=0$，这样 V 就可以唯一地由它的表面 S，也即 ϕ_e 场中涡旋线的世界面来确定. 因此，在流体力学极

限中，式 (8.75) 中的作用量为

$$\mathcal{A}^{\mathrm{hy,v}}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{4c}(F_{ab}-F_{ab}^{\mathrm{M}})^2+\frac{\mathrm{i}}{c^2}j_a(x)A_a(x)+\frac{m_A^2c}{2q^2}\left[\partial_a\theta-\theta_a^{\mathrm{v}}(x)-\frac{e}{c}A_a\right]^2\right\}. \tag{8.80}$$

如果我们将涡旋忽略掉并且将 θ 涨落从此泛函积分中积掉，我们就得到一个横向的质量项

$$\frac{m_A^2}{2c}A_a^{\mathrm{T}2}, \tag{8.81}$$

其中，$A_a^{\mathrm{T}}\equiv(g_{ab}-\partial_a\partial_b/\partial^2)A_b$. 这就导致了超导中著名的迈斯纳效应. 于是该作用量变为

$$A^{\mathrm{hy}}=\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{4c}(F_{ab}-F_{ab}^{\mathrm{M}})^2+\frac{m_A^2}{2c}A_a^{\mathrm{T}2}\right]. \tag{8.82}$$

此时，如果我们在配分函数 (8.75) 中将 A_a 场积掉，我们就得到了电荷世界线 L 以及磁单极世界线所包围的曲面 S 之间的相互作用

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{hy}}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{4c}\left[(F_{ab}^{\mathrm{M}})^2-2\partial_aF_{ab}^{\mathrm{M}}(-\partial^2+m_A^2)^{-1}\partial_cF_{cb}^{\mathrm{M}}\right]-\frac{\mathrm{i}}{c^2}\partial_aF_{ab}^{\mathrm{M}}(-\partial^2+m_A^2)^{-1}j_b+\frac{1}{2c^3}j_a(-\partial^2+m_A^2)^{-1}j_a\right\}. \tag{8.83}$$

这就是之前式 (8.42) 中所给出的电流磁流相互作用的推广，在那个式子中 $m_A=0$. 将式 (8.48) 中的右手部分应用于式 (8.83) 的前两项，并引入带质量的关联函数

$$(-\partial^2+m_A^2)^{-1}(x,x')=G_{m_A}(x-x')\equiv\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\frac{1}{k^2+m_A^2}, \tag{8.84}$$

我们就得

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{hy}}=\int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4x'\left[\frac{{m_A}^2}{4c}F_{ab}^{\mathrm{M}}(x)G_{m_A}(x-x')F_{ab}^{\mathrm{M}}(x')+\frac{1}{2c^3}\tilde{j}_a(x)G_{m_A}(x-x')\tilde{j}_a(x')-\frac{\mathrm{i}}{c^2}\partial_aF_{ab}^{\mathrm{M}}(x)G_{m_A}(x-x')j_a(x')+\frac{1}{2c^3}j_a(x)G_{m_A}(x-x')j_a(x')\right]. \tag{8.85}$$

质量项 m_A 的出现使得第二项和最后一项中的电荷和磁荷的相互作用为短程的汤川型. 第三项为曲面及边界线间的短程相互作用.

第一项是最有意思的一个. 它给最初无关要紧的由磁荷世界线 L 所包围的曲面 S 赋予了能量. 该能量覆盖了整个曲面以及其上下垂直距离在 $1/m_A$ 内的区域. 它将纯数学的曲面 S 转化为一个厚度为 $1/m_A$ 的连接磁荷的带有能量的世界面.

近似到厚度的首阶项，这会给出曲面的张力，从而导致磁荷间线性增长的相互作用势，因此产生禁闭效应. 次阶修正则给出曲率刚度[14].

按照 Wilson 的理论，被磁单极世界线包围的曲面的能量导致禁闭这一事实可以看成是禁闭的一个判据. 从作用量的磁单极部分由式 (8.35) 到式 (8.56) 的对偶变换中，我们看到磁单极规范场 F_{ab}^{M} 中的曲面 S 就对应着对偶作用量中的具有耦合 $(\mathrm{i}/c)\int \mathrm{d}^4x\,\tilde{A}_a\tilde{\jmath}_a$. 这说明，指数函数

$$\left\langle \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{c}\oint_L \mathrm{d}^4x\,\tilde{A}_a\tilde{\jmath}_a\right)\right\rangle \tag{8.86}$$

的期待值在含有相互作用 (8.85) 的禁闭相中按 exp(−由 L 包围的面积) 衰减，而在相互作用为式 (8.42) 的非禁闭相中却只按 exp($-L$ 的长度) 衰减.

如果载荷粒子为电子的话，则场 $\psi_{\mathrm{e}}(x)$ 必须由四个反对易的 Grassmann 分量组成且作用量必须取狄拉克形式，这在闵可夫斯基时空中为

$$\mathcal{A}_e^{\mathrm{Dirac}} = \int \mathrm{d}^4x \left\{\bar{\psi}_e(x)\left[\gamma^a\left(\mathrm{i}\hbar\partial_a - \frac{e}{c}A_a\right)\psi_e(x) - m_ec^2\bar{\psi}_e(x)\psi_e(x)\right]\right\}, \tag{8.87}$$

其中，m_e 为电子质量而 $\psi_e(x)$ 为标准的狄拉克场. 因为费米场并不能形成凝聚，因此不存在单极子的禁闭. 该理论的二次量子化就给出了具有如下最小电磁相互作用的标准的电磁学量子场论 (QED)：

$$\mathcal{A}_{\mathrm{int}} = \frac{\mathrm{i}}{c^2}\int \mathrm{d}^4x\,A_aj_a, \quad j_a = ec\,\bar{\psi}\gamma_a\psi. \tag{8.88}$$

8.8　磁单极场的二次量子化

对于由作用量 (8.76) 描述的磁单极场，第一眼看过去似乎对它的二次量子化是不可行的，因为配分函数中所包含的求和是对曲面 S 的巨正则系综求和而不是对曲线的. 迄今为止，还没有一个成功的二次量子化理论可以替换掉这个求和. 按目前已知，某些非阿贝尔规范理论的真空涨落可以如此这样做，但我们仍然缺乏一个令人信服的理论框架.

幸运的是，作用量 (8.35) 在磁单极规范变换 (8.25) 下的不变性使得曲面 S' 的绝大多数构型都是物理无关的，这就使得我们终究还是可以回到磁单极的世界线描述. 我们只需如前所述那样固定规范，这样就可使磁单极规范场可以唯一地确定下来. 其表达式已在方程 (8.73) 中给出，且完全由磁单极世界线 L' 确定. 借此，我们就可将作用量重新写为[15]

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_1' + \mathcal{A}_{\mathrm{int}} + \mathcal{A}_{\lambda 1} + \mathcal{A}_{\lambda 2}\\ &= \int \mathrm{d}^4x \left\{\left[\frac{1}{4c}(F_{ab} - f_{ab}^{\mathrm{M}})^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2}A_aj_a\right] + \frac{\mathrm{i}}{c^2}\lambda_{ab}\left(n_\sigma\partial_\sigma f_{ab}^{\mathrm{M}} + 2\epsilon_{abcd}n_c\tilde{\jmath}_d\right)\right\},\end{aligned} \tag{8.89}$$

其中，f_{ab}^{M} 和 λ_{ab} 现在为两个**任意**的波动场，即 f_{ab}^{M} 不再限于式 (8.11) 中给出的 δ 函数形式. 这个限制现在由涨落的 λ_{ab} 场来保证. 作用量中包含 λ_{ab} 的两项记为 $\mathcal{A}_{\lambda 1}$ 和 $\mathcal{A}_{\lambda 2}$. 磁单极世界线只出现在磁流耦合项中：

$$\mathcal{A}_{\mathrm{mg}} \equiv \mathcal{A}_{\lambda 2} = \frac{\mathrm{i}}{c^2} \int \mathrm{d}^4 x \, \tilde{A}_d^n \, \tilde{\jmath}_d, \tag{8.90}$$

其中，$\tilde{A}_a^n$ 为以下矢量场的简写：

$$\tilde{A}_d^n \equiv 2\lambda_{ab} \epsilon_{abcd} n_c. \tag{8.91}$$

在与此作用量相关的配分函数中，类似于推导式 (8.75) 那样，我们现在可以通过将对磁单极世界线 L 的巨正则系综的求和化成对单一震荡磁单极场 ϕ_g 的泛函积分来进行求解. 如果磁单极不携带自旋的话，很明显，这就是将对所有带有磁相互作用 (8.90) 的震荡磁单极世界线的求和替换为以下泛函积分：

$$\int \mathcal{D}\phi_g \mathcal{D}\phi_g^* \, \mathrm{e}^{-\mathcal{A}_g^n}, \tag{8.92}$$

其中，$\mathcal{A}_g$ 为复磁单极场的作用量

$$\mathcal{A}_g^n = \int \mathrm{d}^4 x \frac{1}{2} \left[|D_a^n \phi_g|^2 + m_g^2 |\phi_g|^2 + \lambda |\phi_g|^4 \right], \tag{8.93}$$

且 D_a^n 为协变微商

$$D_a^n \equiv \partial_a - \frac{g}{c} \tilde{A}_a^n. \tag{8.94}$$

通过让所有的场变量 ψ_e, ϕ_g、A_a、f_{ab}^{M} 以及 λ_{ab} 以一个欧几里得振幅 $e^{-\mathcal{A}/\hbar}$ 震荡，我们就可得到我们所想要的带电粒子和狄拉克磁单极的量子场论[16]. 于是，1/2 自旋带电粒子荷零自旋磁单极系统的总的作用量为

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{1}{4c} (F_{ab} - f_{ab}^{\mathrm{M}})^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2} \lambda_{ab} n_\sigma \partial_\sigma f_{ab}^{\mathrm{M}} \right] + \mathcal{A}_e^{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{A}_g^n. \tag{8.95}$$

请注意，磁单极规范不变性的效应比纯 QED 中通常的规范不变性要强烈的多. 电磁规范变换 $A_a \to A_a + \partial_a \varLambda$ 值只不过是消除了光子的纵向极化. 而磁单极规范变换 (8.25) 却将涨落的**维度**由曲面 S 降为了曲线 L，而这对于建立式 (8.92) 中的无序场论是非常关键的.

很明显，此理论存在一个对偶形式，相应的作用量为

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4 x \left[\frac{1}{4c} (\tilde{F}_{ab} - \tilde{f}_{ab}^{\mathrm{E}})^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2} \lambda_{ab} n_\sigma \partial_\sigma \tilde{f}_{ab}^{\mathrm{E}} \right] + \mathcal{A}_g + \mathcal{A}_e^{\mathrm{Dirac}\, n}, \tag{8.96}$$

其中，$\mathcal{A}_g$ 为式 (8.92) 中的作用量，含有协变微商

$$D_a \equiv \partial_a - \frac{g}{c} \tilde{A}_a, \tag{8.97}$$

而 $\mathcal{A}_e^{\mathrm{Dirac}n}$ 是与矢势 (8.91) 最小耦合的狄拉克作用量：

$$\mathcal{A}_e^{\mathrm{Dirac}n} = \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \bar{\psi}_e(x) \left[\gamma^a \left(\mathrm{i}\hbar\partial_a - \frac{e}{c} A_a^n \right) \psi_e(x) - m_e c^2 \bar{\psi}_e(x) \psi_e(x) \right] \right\}. \tag{8.98}$$

8.9　电荷禁闭的量子场论

很早人们就知道，对于足够大的电荷 e，晶格上具有周期矢势的量子电动力学 (称为**紧致** QED) 会显示出夸克禁闭. 这个系统包含一个磁单极的巨正则系综，这些磁单极子在某个临界值 e_c 处会发生凝聚. 这个凝聚会将由电荷发出的电力线挤压进一个细管内从而给出禁闭势[17~19]. 在三维时空中，禁闭是恒久的. 这是因为德拜屏蔽的磁学形式总会在对偶矢势 $\tilde{A}_a$ 中产生一个质量项，因此就导致了两个电荷之间会有一个物理的通量流管.

我们有可能将此配分函数变换到对偶形式，这个对偶配分函数所描述的是一个与对偶矢势 $\tilde{A}_a$ 最小耦合的标准的希格斯模型[20]. 此希格斯场就是磁单极的**无序场**，即它的费曼图就是系综中磁单极世界线的直观图像. 在此模型中，两个带电粒子由 Abrikosov 涡旋线相连，这就给出了俩电荷间线性增长的相互作用势，于是导致禁闭. 因此，该体系是完全介电的. 虽然对夸克禁闭的对偶希格斯场描述可以取连续统极限[20]，然而很显然，对于用规范场 A_a 表示的原始形式却无法这样做. 原因是对于电磁规范场 A_a 在穿越由磁单极世界线所张成的曲面时的整数值跃变缺乏一个恰当的连续性描述. 现在，有了上一节所发展的理论，我们就很容易可以构建一个显示电荷禁闭的简单的量子场论. 这基于对对偶电磁作用量 (8.68) 的一个微小的修正. 这样一个修正会导致不同性电荷间的电通量流管的形成.

对于一组固定的电荷和磁荷，相应的欧几里得作用量为 [参看式 (8.35)]

$$\mathcal{A}_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{4c} \int \mathrm{d}^4 x \left[F_{ab}(x) - F_{ab}^{\mathrm{M}}(x) \right]^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2} \int \mathrm{d}^4 x j_a(x) A_a(x), \tag{8.99}$$

其中，$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ 为电磁场张量，

$$j_a(x) \equiv ec\, \delta_a(x; L) \tag{8.100}$$

为式 (8.10) 中的电流密度，而

$$F_{ab}^{\mathrm{M}}(x) = g \tilde{\delta}_{ab}(x; S) \tag{8.101}$$

为式 (8.11) 中的**磁单极规范场**.

在第 8.4 节中，我们推导给出了完全等价的对偶作用量 [参看式 (8.68)]

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{4c} \int \mathrm{d}^4 x \left[\tilde{F}_{ab}(x) - \tilde{F}_{ab}^{\mathrm{E}}(x) \right]^2 + \frac{\mathrm{i}}{c^2} \int \mathrm{d}^4 x \tilde{j}_a(x) \tilde{A}_a(x), \tag{8.102}$$

其中, $\tilde{F}_{ab}=\partial_a\tilde{A}_b-\partial_b\tilde{A}_a$ 为对偶张量场 $\tilde{F}_{ab}\equiv(1/2)\epsilon_{abcd}F_{ab}$ 且

$$\tilde{j}_a(x)=gc\,\delta_a(x;\tilde{L}) \tag{8.103}$$

为式 (8.6) 中与磁单极世界线 $\tilde{L}$ 相联的对偶磁流密度. 现在，电荷由方程 (8.62) 中的**电荷规范场** $\tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab}$ 来描述，该场在电荷世界线 L 包围的世界面 S 上是奇异的：

$$\tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab}(x)=e\,\tilde{\delta}_{ab}(x;S). \tag{8.104}$$

在泛函积分内，将玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}}}$ 对所有的场构型 $\tilde{A}_a$、$\tilde{\jmath}^a$ 中所有的曲线构型 $\tilde{L}$ 以及 $\tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab}$ 中所有的曲面构型 S 进行求和就得到了系统的欧几里得量子配分函数. 式 (8.102) 中的作用量在**电磁规范变换**

$$\tilde{A}_a\to\tilde{A}_a+\partial_a\tilde{\varLambda} \tag{8.105}$$

以及离散**电荷规范变换**

$$\begin{aligned}\tilde{A}_a&\to\tilde{A}_a+\tilde{\varLambda}^{\mathrm{E}}_a,\\ \tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab}&\to\tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab}+\partial_a\tilde{\varLambda}^{\mathrm{E}}_b-\partial_b\tilde{\varLambda}^{\mathrm{E}}_a\end{aligned} \tag{8.106}$$

下是不变的.

我们所进行的处理过程就像推导 (8.75) 中无序场论一样，只不过现在我们是在对偶的形式下. 这样得到的二次量子化的作用量为

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{tot}}=\int\mathrm{d}^4x\frac{1}{4c}(\tilde{F}_{ab}-\tilde{F}^{\mathrm{E}}_{ab})^2+\int\mathrm{d}^4x\left[|\tilde{D}\phi_g|^2+m^2|\phi_g|^2+\lambda|\phi_g|^4\right], \tag{8.107}$$

其中

$$\tilde{D}_a\equiv\partial_a-\frac{g}{c}\tilde{A}_a. \tag{8.108}$$

如选取磁单极场 ϕ_g 的质量参数 m^2 为负的话，则 ϕ_g 会获得一个非零的期待值 $(-m^2/2\lambda)^{1/2}$，这就为对偶矢势 $\tilde{A}_a$ 提供了一个迈斯纳质量 $m^2_{\tilde{A}}$. 能量于是再次取式 (8.85) 中的形式，只不过将电和磁的源进行了对调：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\mathrm{hy}}_{\mathrm{int}}=\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4x'\Bigg[&\frac{{m_{\tilde{A}}}^2}{2c}F^{\mathrm{E}}_{ab}(x)G_{m_{\tilde{A}}}(x-x')F^{\mathrm{E}}_{ab}(x')+\frac{1}{2c^3}j_a(x)G_{m_{\tilde{A}}}(x-x')j_a(x')\\ &-\frac{\mathrm{i}}{2c^2}\partial_aF^{\mathrm{E}}_{ab}G_{m_{\tilde{A}}}(x-x')\tilde{\jmath}_a(x-x')+\frac{1}{2c^3}\tilde{\jmath}_a(x)G_{m_{\tilde{A}}}(x-x')\tilde{\jmath}_a(x')\Bigg].\end{aligned} \tag{8.109}$$

这使得由电荷世界线所包围的曲面 S' 具有了前述性质的能量，造成了**电荷**的禁闭. 此曲面具有张力，且由于其有限的厚度 $1/m_{\tilde{A}}$，它同时具有曲率刚度. Polyakov[22] 与本书作者[21] 分别独立地计算出了重子弦的世界面的这种结果.

在电荷禁闭的情形中，Wilson 环 (8.86) 的对偶形式的期待值

$$\left\langle\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{c}\oint_L\mathrm{d}^4x\,A_a\tilde{\jmath}_a\right)\right\rangle \tag{8.110}$$

的行为同 $\exp(-被L所包围的面积)$ 是一样的.

不用说，为了将此理论应用于夸克模型，式 (8.87) 中的作用量必须替换为具有三色六味规范不变相互作用的狄拉克作用量

$$\mathcal{A}_{\mathrm{D}} = \int \mathrm{d}^4 x\, \bar{\psi}(1D - \mathcal{M})\psi, \tag{8.111}$$

其中，$D_\mu + \mathrm{i}G_\mu$ 为色空间中的协变导数，G_μ 为一个 3×3 无迹色–电规范场矩阵，相应的场作用量为

$$\mathcal{A}_{G_\mu} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 x\, \mathrm{tr}\left(\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - [G_\mu, G_\nu]\right)^2. \tag{8.112}$$

符号 $\mathcal{M}$ 表述 u、d、c、s、t、b 6 维味空间中的质量矩阵.

如果我们将式 (8.109) 中的相互作用模型应用于夸克的话，通过将其近似为一个 4 费米相互作用，我们就可以去研究它的低能唯象行为. 对于标量、赝标量、矢量、轴矢量介子，这可以通过泛函积分方法将其转化为一个手征不变有效作用量 (**强子化**)[23]. 该有效作用量可定性地再现这些粒子的很多低能行为尤其是它们的手征对称性及其自发破缺，还有观测到的夸克质量和作用量 (8.111) 中的夸克质量 (**流夸克质量**) 的差别. 它同时也解释了为什么核子中的夸克 u 和 d 的质量大约是核子质量的 1/3 而它们在作用量 (8.111) 中的质量 $\mathcal{M}_{\mathrm{u}}$ 和 $\mathcal{M}_{\mathrm{d}}$ 却非常小①.

文献 [23] 中所发展出来的强子化方法已经通过几种不同的方式进行了推广，尤其是在其中加入色自由度[24]. 它也可用来描述低能重子以及热效应导致的手征对称性的恢复[25].

式 (8.85) 一个有意思的方面是，与 $1/\tilde{m}_A^2$ 成正比的 4 费米相互作用中的局域部分是由和禁闭势能同样的机制给出的，该势能的张力正比于 $\tilde{m}_A^2 \log(\Lambda^2/\tilde{m}_A^2)$，其中 Λ 为一个紫外截断参数. 因此，我们可以预测，当温度升高到 $\tilde{m}_A$ 的幅度，由 4 费米相互作用引起的自发对称破缺与势能的退禁闭行为会发生在同一个温度. 这个最初令人惊奇的巧合早已在格点规范理论的蒙特卡罗模拟中观察到了.

目前，将上述流体力学讨论形式推广至色胶子情形依然是一个十分重要的未决问题. 尤其是，三线及四线顶角的存在必须有一个简单的解释. 在此方面一个有希望的初步结果则是基于't Hooft[26] 的阿贝尔磁单极占主导这一假说[27].

文献与注记

[1] 磁单极首先在下述文献中提出：
P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **133**, 60 (1931); Phys. Rev. **74**, 817 (1948).

① 作用量 (8.111) 中的夸克质量为 $\mathcal{M}_{\mathrm{u}} \approx 4\,\mathrm{MeV}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{d}} \approx 8\,\mathrm{MeV}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{c}} \approx 1.5\,\mathrm{GeV}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{s}} \approx 0.150\,\mathrm{GeV}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{t}} \approx 176\,\mathrm{GeV}$, $\mathcal{M}_{\mathrm{b}} \approx 4.7\,\mathrm{GeV}$.

[2] M.N. Saha, Ind. J. Phys. **10**, 145 (1936);
J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields*, Vols. 1 and 2, Addison Wesley, Reading, Mass., 1970 and 1973;
G. Wentzel, Progr. Theor. Phys. Suppl. **37**, 163 (1966);
E. Amaldi, in *Old and New Problems in Elementary Particles*, ed. by G. Puppi, Academic Press, New York (1968);
D. Villaroel, Phys. Rev. D **14**, 3350 (1972);
Y.D. Usachev, Sov. J. Particles Nuclei **4**, 92 (1973);
A.O. Barut, J. Phys. A **11**, 2037 (1978);
J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1975, Sects. 6.12-6.13.

[3] H. Kleinert, *Defect Mediated Phase Transitions in Superfluids, Solids, and Relation to Lattice Gauge Theories*, Lecture presented at the 1983 Cargèse Summer School on Progress in Gauge Theories, publ. in *Gauge Theories*, ed. by G. 't Hooft et al., Plenum Press, New York, 1984, pp 373-401 (`kl/118`)，其中`kl` 为网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的缩写.

[4] H. Kleinert, *The Extra Gauge Symmetry of String Deformations in Electromagnetism with Charges and Dirac Monopoles,* Int. J. Mod. Phys. A **7**, 4693 (1992) (`kl/203`).

[5] H. Kleinert, *Double-Gauge Invariance and Local Quantum Field Theory of Charges and Dirac Magnetic Monopoles*, Phys. Lett. B **246**, 127 (1990) (`kl/205`).

[6] H. Kleinert, *Abelian Double-Gauge Invariant Continuous Quantum Field Theory of Electric Charge Confinement*, Phys. Lett. B **293**, 168 (1992) (`kl/211`).

[7] 特别地，请参阅 [1] 中由 Jackson 所著专著的第 258 页，其中提到“弦的位置的不同的选择就等价选择了不同的 (电磁) 规范”. 也请同时参看这段话下面的方程 (6.162). 在 258 页没有编号的方程中，Jackson 给出物理的磁单极场为 $F_{ab}^{\rm monop} = F_{ab} - F_{ab}^{\rm M}$. 然而，他没有注意到 $F_{ab}^{\rm M}$ 的规范独立性以及需要的作用量是 (8.20) 而不是 (8.21).

[8] 同以下论文比较：
P. Goddard and D. Olive, Progress in Physics **41**, 1357 (1978),
他们采用了所谓的“一般规范变换”[他们文章中的式 (2.46)]. 他们看到，由’t Hooft 引入到他的带有希格斯场 $\varPhi$ 的 $SU(2)$ 规范理论中的描述磁单极的场张量 $F_{ab}^{\rm obs} = F_{ab} + (1/a^3 a)\boldsymbol{\varPhi}\cdot(\partial_a\boldsymbol{\varPhi}\times\partial_b\boldsymbol{\varPhi})$ 可以通过 SU(2) 规范群里的一个规范变换而取如下形式 $F_{ab}^{\rm obs} \equiv F_{ab} - F_{ab}^{\rm M}$. 这就将磁场由 F_{ab} 变到了 $F_{ab}^{\rm M}$ 而不改变 $F_{ab}^{\rm obs}$ [参看他们给出的式子 (4.30) 以及第 4.5 节中的最后两个式子]. 这些并不是允许的电磁规范变换，但与我们的**磁单极规范变换** (8.27) 有类似的效应，尽管由于更加一般的 SU(2) 对称性，它有比 (8.26) 更一般的规范变换函数.

[9] J. Schwinger, Phys. Rev. **144**, 1087 (1966).

[10] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I, *Superflow and Vortex Lines*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b1`).

[11] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, Vol. 1, Addison Wesley, Reading, Mass., 1970, p. 235.

[12] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets,* 4th ed., World Scientific, Singapore, 2006 (`kl/b5`).

[13] K. Symanzik, Varenna Lectures 1986, in *Euclidean Quantum Field Theory*, ed. R. Jost, Academic Press, New York, 1969.

[14] 对于生物膜，下列文献计算了来源于相互作用如 (8.85) 中第一项的表面张力和刚度系数：

H. Kleinert, *Dynamical Generation of String Tension and Stiffness in Strings and Membranes*, Phys. Lett. B **211**, 151 (1988) (`kl/177`).

[15] 参看 [10] (`kl/b1/gifs/v1-570s.html`) 中的 570–578 页.

[16] 在下列文献中所提的理论中无法构造磁单极的量子场论：

T.T. Wu and C.N. Yang, Phys. Rev. D **14**, 437 (1976); Phys. Rev. D **12**, 3845, (1075); D **16**, 1018 (1977); Nuclear Physics B **107**, 365 (1976);

C.N. Yang, Lectures presented at the 1976 Erice summer school, in *Gauge Interactions*, Plenum Press, New York 1978, ed. by A. Zichichi and at the 1982 Erice summer school, in *Gauge Interactions*, Plenum Press, New York 1984, ed. by A. Zichichi.

[17] Y. Nambu, Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974).

[18] S. Mandelstam, Phys. Rep. C **23**, 245 (1976); Phys. Rev. D **19**, 2391 (1979).

[19] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974); and in *High Energy Physics*, ed. by A. Zichichi, Editrice Compositori, Bologna, 1976.

[20] H. Kleinert, *Higgs Particles from Pure Gauge Fields*, Lecture presented at the Erice Summer School, 1982, in *Gauge Interactions*, ed. by A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1984 (`kl/117`).

[21] H. Kleinert, Phys. Lett. B **174**, 335 (1986) (`kl/149`).

[22] A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B **268**, 406 (1986)；同时请参看他的专题论文集*Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic, Chur, 1987.

[23] H. Kleinert, *On the Hadronization of Quark Theories*, Lectures presented at the Erice Summer Institute 1976, *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*, Plenum Press, New York, 1978, A. Zichichi (ed.), pp. 289-390 (`kl/53`)，*Hadronization of Quark Theories and a Bilocal form of QED*, Phys. Lett. B **62**, 429 (1976).

[24] 例如，参看：

K. Rajagopal and F. Wilczek, *The Condensed Matter Physics of QCD*, (hep-ph/0011333);

S.B. Ruster, V. Werth, M. Buballa, I.A. Shovkovy, D.H. Rischke, *Phase Diagram of Neutral Quark Matter at Moderate Densities*, Phys. Rev. D **73**, 034025 (2006) (nucl-th/0602018),

以及其中的引用文献.

[25] R. Cahill, C.D. Roberts, and J. Praschifka, Aust. J. Phys. **42**, 129 (1989);
R. Cahill, J. Praschifka, and C.J. Burden, Aust. J. Phys. **42**, 161 (1989);
R. Cahill, Aust. J. Phys. **42**, 171 (1989);
H. Reinhardt, Phys. Lett. B **244**, 316 (1990);
V. Christov, E. Ruiz-Arriola, K. Goeke, Phys. Lett. B **243**, 191 (1990);
R. Cahill, Nucl. Phys. A **543**, 63c (1992).

[26] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **190**, 455 (1981).

[27] A.S. Kronfeld, G. Schierholz, and U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B **293**, 461 (1987);
A.S. Kronfeld, M.L. Laursen, G. Schierholz, and U.-J. Wiese, Phys. Lett. B **198**, 516 (1987);
F. Brandstaeter, G. Schierholz, and U.-J. Wiese, DESY preprint 91-040 (1991);
T. Suzuki and I. Yotsuyanagi, Phys. Rev. D **42**, 4257 (1991);
S. Hioki, S. Kitahara, S. Kiura, Y. Matsubara, O. Miyamura, S. Ohuo, and T. Suzuki, Phys. Lett. ***B*** 272, 326 (1991);
J. Smit and A.J. Van der Sijs, Nucl. Phys. B **355**, 603 (1991);
V.G. Bornyakov, E.M. Ilgenfritz, M.L. Laursen, V.K. Mitrijushkin, M. Müller-Preussker, A.J. Van der Sijs, and A.M. Zadorozhyn, Phys. Lett. B **261**, 116 (1991);
J. Greensite and J. Winchester, Phys. Rev. D **40**, 4167 (1989);
J. Greensite and J. Iwasaki, Phys. Lett. B **255**, 415 (1991);
A. Di Giacomo, M. Maggiore, and Š. Olejník, Nucl. Phys. B **347**, 441 (1990);
M. Campostrini, A. Di Giacomo, H. Panagopoulos, and E. Vicari, Nucl. Phys. B **329**, 683 (1990);
M. Campostrini, A. Di Giacomo, M. Maggiore, Š. Olejník, H. Panagopoulos, and E. Vicari, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **17**, 563 (1990);
L. Del Debbio, A. Di Giacomo, M. Maggiore, and S. Olejník, Phys. Lett. B **267**, 254 (1991);
L. Polley and U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B **356**, 629 (1991);
H.G. Evertz, K. Jansen, J. Jersak, C.B. Lang, and T. Neuhaus, Nucl. Phys. B **285**, 590 (1987);
T.L. Ivanenko, A.V. Pochinsky, and M.I. Polikarpov, Phys. Lett. **B** 302, 458 (1993);
P. Cea and L. Cosmai, Nuovo Cim. **A** 106, 1361 (1993).

第 9 章　从理想晶体到含缺陷晶体的多值映射

Better die than live mechanically a life
that is a repetition of repetitions.

D. H. Lawrence (1885~1930)

在上一章中我们讲述了多值规范变换是如何使我们可以将无场空间中的理论变换到与电磁场耦合在一起的理论. 类似地，我们期望多值坐标变换也可以用来将一个平直空间中的理论变换到一个具有曲率和挠率空间中的理论. 其实，这完全是可行的. 因为相关的数学方法已经在研究晶体中线状缺陷的理论中发展起来了[1~3]. 本章中，我们将对此部分的理论进行一个简要的回顾，而这对于我们之后的讨论是相当有必要的.

9.1　缺　　陷

自然界以及我们在实验室中生长的晶体没有一个是完美的，他们总含有大量的缺陷. 这些缺陷可以是化学的、电性的，并且也包含很多杂质原子. 这些缺陷可以用它们的空间维度来进行分类. 最简单的一类缺陷就是点状缺陷. 这类缺陷在一个特定的临近区域内只会使一个晶胞显著地偏离理想晶体对称性. 这种点状缺陷最常见的来源为辐照或是强剪切应力下的各向同性机械形变. 一般有两类内禀的点状缺陷. 或者是正常晶格点上原子的缺失 (空穴)，或者是存在额外原子 (间隙原子)(图 9.1). 　空穴和间隙原子均为可移动缺陷. 如果一空穴附近的原子从它的晶格点阵位置上移动到了这个空穴位置上，则这个空穴就从原来的位置移动到了

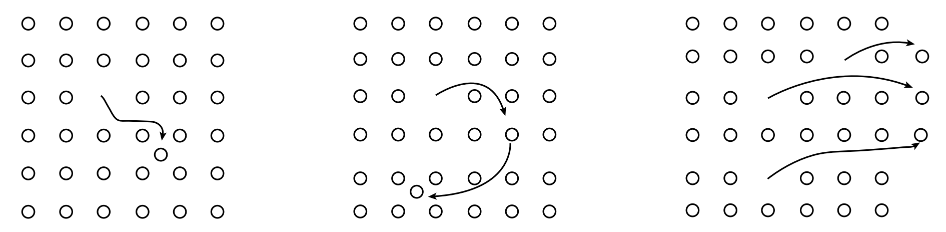


图 9.1　晶体中内在的点状缺陷. 一个原子可能会成为一个间隙原子而留下一个空穴. 它可以在晶体中通过一系列间隙位置而做无规运动，直至在另一个空穴处重新结合进去. 而晶体的外部则可看成是一个空穴库

那个原子原来所处的晶格点上. 一个间隙原子的移动可以有两种方式. 它可以直接从一个间隙位置跳跃到另一个间隙位置. 这种情形一般发生在强各向异性的材料中，比若说石墨，当然在一些简单立方结构的材料中，比如说硅和锗，也存在这种方式. 另一种移动方式同原子替代的空穴移动方式更接近，即一个正常的原子被推到某个间隙位置上，而原来的间隙原子则填补了那个原子所留下来的空位.

这种点状缺陷的一个内在属性是成片的点状缺陷的总能量会小于单个点状缺陷能量之和. 这个原因是很明显的. 例如，如果简单立方中的两个空穴一个挨一个排列的话，则只有 10 个化学键被破坏掉，而如果他们分离的话会有 12 个. 而如果一组大量的空穴肩并肩组成一整个空穴盘面的话，则可以通过晶面的移动来消除这个空穴盘面 (图 9.2). 通过这种方法，就可以修复晶格结构. 然而，当靠近边界线时，这种修复就不可能了. 这个边界线就构成一个线状缺陷.

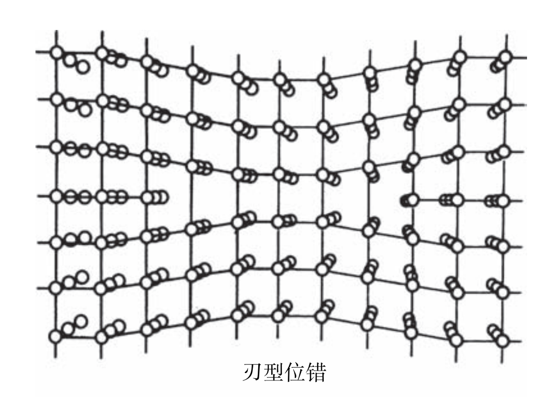


图 9.2 由原子层缺失而形成的 (刃型) 位错线. 在缺失原子层上面和下面的原子层将相对靠近以弥补该缺陷，而在此区域的边界上却无法这样

当然，线状缺陷也可以以相反的过程，即间隙原子的聚集，来形成. 如果这些间隙原子相互紧挨着而形成一个间隙原子盘的话，相关的晶面会相互远离以使原有的晶格点阵可以容下这些额外的原子，而边界线又会是个例外. 这一类线状缺陷称为**位错线**.

很明显，位错线也可通过几个空穴盘或几个间隙原子盘上下相邻叠在一起来构造. 这些边界将形成一个高强度的位错线. 这种高强度的位错线的能量大约以其强度的平方增长. 如果应力超过特定的临界值后，则位错就会产生且开始运动. 这就是为什么它们首先在 19 世纪塑性形变实验中以滑移带的形式被观察到的原因. 而对此问题理解的理论基础则在相当晚的时候才由 Y. Frenkel 提出，为了理解为什么材料的剪切塑性形变会比基于简单估算的预期要容易 1000 倍 (图 9.3)，他提出了存在晶格缺陷的假设.

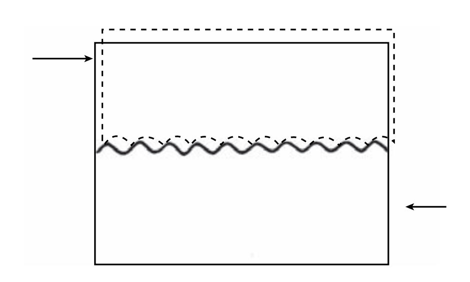


图 9.3 对箭头所示的剪切作用下晶体所能承受的最大应力的一个幼稚的估算. 上下两部分试图进行相对滑动. 假定 $\sigma = \sigma_{\max} \sin(2\pi x/a)$ 具有这样的周期行为，这会约化为 $\sigma \sim \sigma_{\max} 2\pi(x/a) \sim \mu(x/a)$. 于是可估计出 $\sigma_{\max} = \mu/2\pi$. 然而，实验上的结果却是 $\sigma_{\max} \sim 10^{-3}\mu$ 到 $10^{-4}\mu$

Frenkel 注意到，由于缺陷的存在，塑性滑移的产生并不是由于两部分整体的相对移动而造成的，这一过程其实阶梯式逐步进行的，这就解释了上述巨大的差异. 1934 年，Orowan、Polany 和 Taylor 确定这些缺陷为位错线. 一个移动的刃型位错的存在就可使晶体的一半相对于另一半产生一个塑性剪切位移. 这个移动的过程同毛毛虫爬行的过程极为相似. 这一过程如图 9.4 所示. 它的一条腿总是悬空的从而破坏了平移不变性. 而这将一步一步与其前面的那条腿交换下去. 图 9.4 的下半部分给出了晶体中的示意图，那条单腿就对应着过剩原子平面. 在沿着箭头所指方向的应力的作用下，这条腿将向右移动. 当此一过程完整扫过晶体一遍后，上半部分相对于下半部分就恰好移动了一个晶格间距.

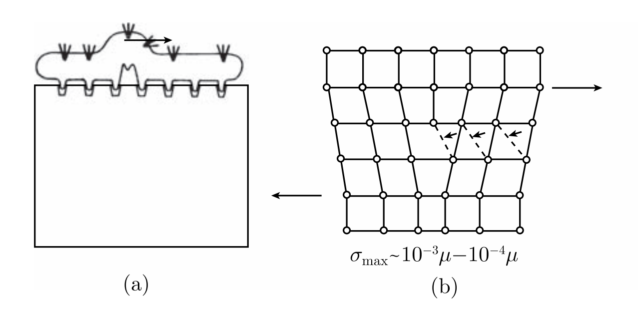


图 9.4 位错线使得晶体上下两部分可以像毛毛虫在地上爬行那样相对滑动. 原子键可以依次反转方向，这是一个相当容易的过程

如果有多个空穴或过剩原子盘面相互紧密排列的话，我们就可观察到进一步的协同现象. 图 9.5 给出了一个相应的示意图. 在左图中，无穷多个原子半平面 (半无界盘面) 从理想晶体中移除. 如果这些半平面本身一起构成了一个有规律的晶格阵列的话，则它们可以平滑地嵌入原始的晶格中. 只是在原点处才会表现出晶格对

称性的破缺. 而在其他地方，晶体只不过是有些微的形变. 这样就再一次形成了一种线状缺陷，称为**旋错**. 位错与旋错在我们以后的讨论中将起到关键性的作用.

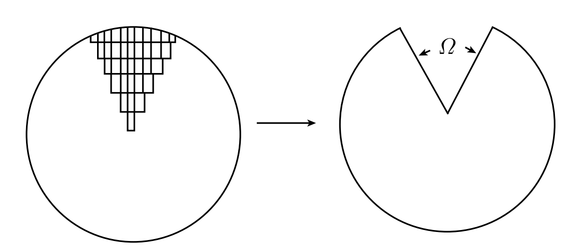


图 9.5　由一叠缺失原子层而构造产生的旋错 (图 9.2). 与此等价，我们也可从晶体中切掉一整块. 在真实晶体中，切掉的这部分必须同对称角相一致. 在连续统近似下，此角度 Ω 可以非常小

在开始具体讨论之前，我们先来完成对二维缺陷的分类. 二维缺陷主要有三类.

第一类叫做**晶界**，是两个相邻的不同取向的规则晶体部分的分界面 (图 9.6). 晶界可以看作是位错线的阵列，在其中点缺陷半平面以一定的间隔上下堆积，中间夹有完全规则的晶格平面.

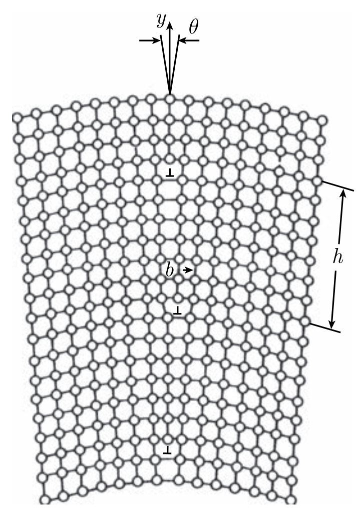


图 9.6　两个取向不同的晶格区域相交就形成了晶界，这两个晶格区域在相交处并不是每个原子层都能吻合 (图中所示情形是原子层每隔一个可以相吻合)

第二类面缺陷为**堆垛层错**. 这类面缺陷的两边也是完全规则的晶体部分，不过不同于第一类中的取向差异，这类缺陷两边的晶体部分是相对有个滑移 (图 9.7).

第三种，并且是总也无法避免的，则由晶体表面构成.

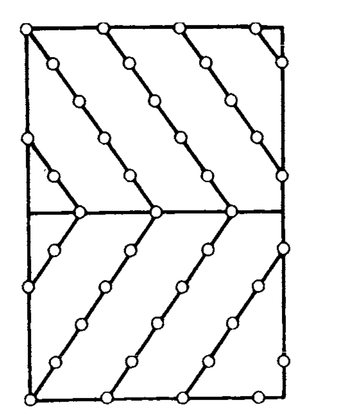
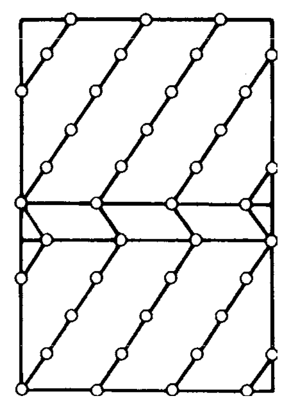



图 9.7 两种典型的堆垛层错. 第一个为生长堆垛层错或称作孪晶边界，第二个是形变堆垛层错

在本书中起重要作用的是线状缺陷. 我们将看到，这些缺陷的存在将使得时空具备离散的黎曼–嘉当几何. 而它的连续统极限则是引力理论的基础.

9.2 位错线与伯格斯矢量

我们首先来看如何用数学来表征一个位错线. 为此，我们来看图 9.8，此图中一个理想晶体中的闭合回路被映射到一个有缺陷的晶体上. 我们可以随意取该回路的取向为逆时针方向. 这一映射的方法是，对于原回路中沿着晶格方向的每一步，在缺陷晶体中都相应地走一步. 如果原晶格点记为 $\boldsymbol{x}_n$ 的话，相应的像点则由 $\boldsymbol{x}'_n = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n)$ 给出，其中 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n)$ 为位移场：在每一步中，像点相比于原格点都会有一个细微的移动. 当原格点走完一个闭合回路 B 后，像点却不会回到原来的出发点. 闭合环路 B 的像不再是闭合的了. 这种闭合的缺失可以精确地由一个晶格矢量 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 来描述，该矢量称为**局域伯格斯 (Burgers) 矢量**，它从环路的起点指向终点[①]. 于是，位错线就由以下方程来表征：

$$\sum_B \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}, \tag{9.1}$$

其中，$\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n)$ 为每一步的位移矢量的增量. 如果在连续统极限下考虑同样的过程，则我们有

$$\int_B \mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \tag{9.2}$$

此闭合回路 B 称为**伯格斯回路**.

① 我们这里的正负号的约定与 Bilby 的相反，而与 Read 的是一致的 (请参阅注记和参考文献). 注意，不同于局域伯格斯矢量，真伯格斯矢量是定义在完美晶格上的.

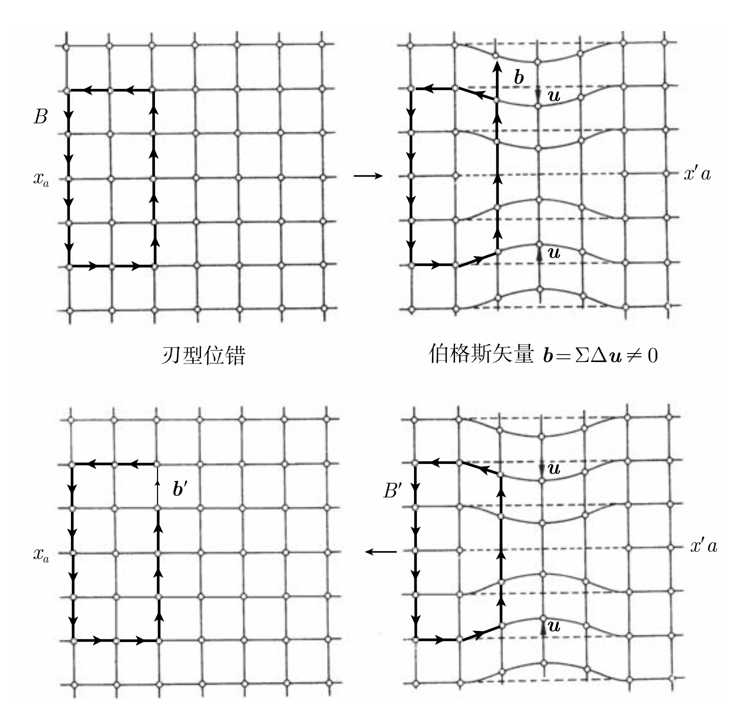


图 9.8 伯格斯矢量的定义. 在存在位错线的情形下，原本在理想晶体中闭合的伯格斯回路，当映射到含缺陷的晶体中后就不再闭合了. 反过来也一样. 这个闭合的缺失可以用一个晶格矢量来量度，这个矢量就称为是**伯格斯矢量** $\boldsymbol{b}$. 图中的位错线为刃型位错，相应的伯格斯矢量垂直于该线

与此等价，我们可以考虑缺陷晶体中的一个闭合回路 B'，则会发现它在理想晶体中的逆像将不会闭合，会差一个矢量 $\boldsymbol{b}'$，该矢量称为**真伯格斯矢量**，它从该回路的终点指向起点. 如果这两个回路均足够大且深深地位于理想晶体部分的话，则这两个伯格斯矢量是一样的. 否则它们之间会差一个弹性形变.

在伯格斯矢量定义的约定上我们需要澄清几点. 原则上，奇异线 L 是无方向，我们可以给它任选一个方向. 相应的伯格斯回路则围绕这一取定方向取右手螺旋方向. 如果我们取相反的方向，相应的伯格斯矢量就要变号. 然而，乘积 $\boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在此变换下是不变的，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 为 L 的无穷小切矢. 注意，这与第 II 部分所讨论过的磁场的情形很相似，在那部分中电流的方向定义为**正电荷**流动的方向. 伯格斯回路给出 $\oint \mathrm{d}u = I$. 当然，我们也可改变这一约定而取负电荷电流方向. 这样的话 $\oint \mathrm{d}u$ 就为 $-I$. 同样，$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 是不变得. 并且，也只有这个不变量的乘积才能出现在物理可观测量中，比如毕奥–萨伐尔定律.

$\boldsymbol{b}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在方向逆转变换下的不变性具有很简单的物理含义. 为了看清楚这一点，

我们再一次考查图 9.8 中的位错线，该位错线是通过将一层原子**移除**而得到的. 它的矢量积 $\boldsymbol{b}\times \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 指向**内**，即指向空穴. 现在我们来考虑一种相反的情形，即一层新的原子被插进来从而使得它两边的原子层相互背离而释放局域应力. 如果我们现在来计算 $\oint_{\mathrm{B}} \mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$，我们会发现 $\boldsymbol{b}\times \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 指向**外**，即背离插入的原子. 而这又是指向原子稀少处的方向. 上述两个讨论与伯格斯回路方向的选择是无关的. 由于在第二种情况中回路包围着额外的原子而在第一种情况中所包围的是空穴，因此这两个缺陷可以相互看作是对方的反缺陷. 如果这两条线恰巧紧挨着的话，则它们可以相互抵消，然后回归到一个完美的晶体. 这种湮灭可以分段发生，此时，一个大的位错就会分解成几个小的不相连的片段.

在上述这个例子中，伯格斯矢量在任何地方都垂直于位错线，我们称此位错为纯**刃位错**(图 9.2).

不难构造另一种位错：将晶体沿一个晶格半平面切割至某个直线 L，然后将此割开的两部分沿着 L 的方向做一个相对的移动. 这样我们就得到了如图 9.9 所示的**螺型位错**，它的伯格斯矢量的指向平行于 L.

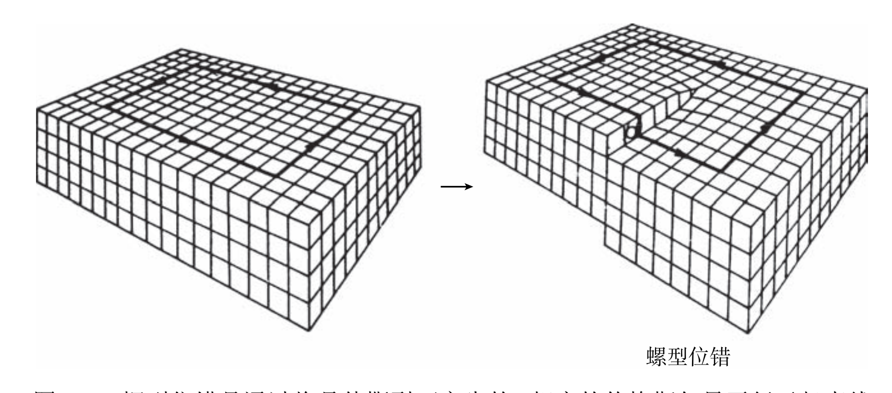


图 9.9　螺型位错是通过将晶体撕裂而产生的. 相应的伯格斯矢量平行于竖直线

当使晶体远离熔解点时，系统中总是存在有一定比例的位错. 甚至在洁净样品中在 10^6 个原子中也最少有一个会脱位. 这些缺陷的边界在空间中指向非常任意. 我们很快会看到，它们的伯格斯矢量对于任意一个闭合的位错环是一个拓扑不变量. 因此，位错线的特性，即“刃”或“螺”并不是不变的. 它将随着位错线相对于不变伯格斯矢量 $\boldsymbol{b}_i$ 的方向而改变. 从图 9.2 到图 9.9 很容易看出，位错线以几倍的晶格矢量的偏差破坏了晶体的平移不变性. 如果系统只有很少的几根位错线的话，这种破坏并不十分明显. 局域上，也即在不太靠近位错线的微小样本区域内，晶体仍然可以表述为原子的周期阵列，只不过它的晶格序存在轻微的扰动，这种扰动可用光滑位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 来描述.

9.3 旋错线与弗兰克矢量

由于晶体不仅仅在离散的平移变换下是不变的，它同时在某些特定的离散转动下也是不变的，因此我们料想应该存在另一类缺陷，这类缺陷会破坏整体转动序，却在局域上还保持这一不变性. 这就是旋错线，图 9.5 给出了一个范例. 它由一堆堆缺失原子层叠加而成. 在这里，我们通过下面这个思想实验来对它进行构造会比较有帮助. 取一个状入圆饼奶酪的规则的晶体，然后将其中张角为 Ω 的一块儿拿掉 (图 9.10). 之后，将这两个断面粘合在一起. 对于比较大的 Ω，这是需要花费相当的能量的. 进一步，如果这两个断面上的原子层可以完美地匹配在一起的话，则局域上晶体又重新建立起了它的周期结构. 而这相对于晶体的任何一种对称操作都是可以的. 例如，在一个简单立方晶体中，Ω 可以是 90°、180° 或 270°. 图 9.11 给出了角度为 90° 的情形. 在此图中，我们同时还给出了另一个相反的过程，即从图 9.10 的右图开始到左图. 晶体先被切开，然后将两个断面分开 Ω 角，之后再插入一块没有形变的晶状物并使各相接断面上的原子层相契合. 这就是具有负角度的旋错，此图中 Ω 为 $-90°$.

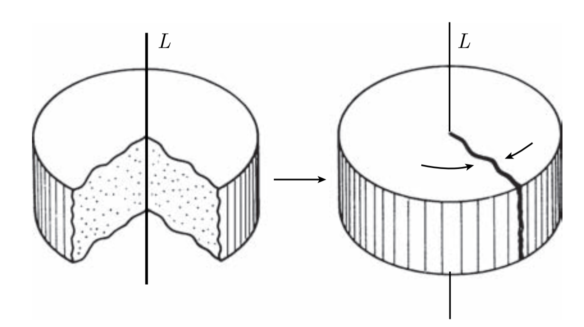


图 9.10 Volterra 切割与粘接过程给出一个楔型旋错 (disclination)

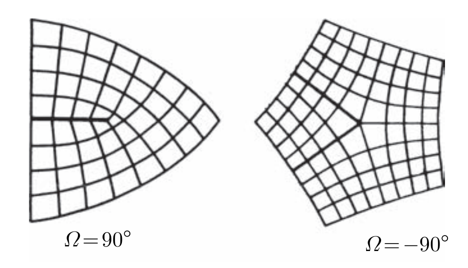


图 9.11 简单立方晶格中楔型旋错处的晶格结构. 相应的弗兰克角 Ω 等于对称角 90° 或 $-90°$. 除了在接近旋错线的地方，晶体在局域上是完美的

在上述情形中，局域晶体结构只在沿着这个奶酪轴的奇异线上会破坏. 为了

使断面粘合在一起而强加于其上的转动可以用一个转动矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 来表示，在上述例子中，这个矢量的指向平行于 L 和切割线. 我们称这种旋错为**楔型旋错** (wedge disclination). 不难构造出其他类型的转动缺陷. 图 9.12 给出了三种可能性. 每一种情形都用一个矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 来表征. 第一种情况中 $\boldsymbol{\Omega}$ 的指向平行于 L 和切割线. 在第二种情形中，$\boldsymbol{\Omega}$ 垂直于 L 但平行于切割线. 我们称之为**散状旋错** (splay disclination). 而在第三种情形中，$\boldsymbol{\Omega}$ 的指向同时垂直于那条线和切割线. 称此为**扭型旋错** (twist disclination).

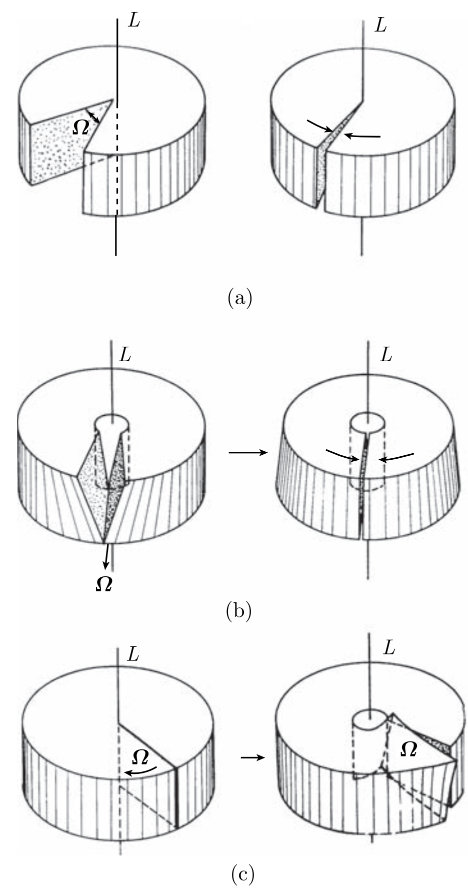


图 9.12　构造旋错的三种不同的可能性：(a) 楔型、(b) 散状以及 (c) 扭型旋错

矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 被称为旋错的**弗兰克矢量**.　如同在构造位错中所讨论的，不同部分粘合的那个交界面其实并没有任何实际的物理含义. 例如，在图 9.12(a) 中，我们可以沿任意方向来切取这一块，只要它的这两个断面可以光滑地接合在一起就可以 (图 9.10)，而这相对于最初的那个只不过是绕 L 转过了一定的角度而已. 体系中只有那条奇异线才是物理对象.

旋错最初是由 F.C. Frank 在 1958 年研究液晶时发现并加以归类的. 液晶是中间相. 它们是由棒状分子构成的液体. 因此，它们无法只用位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 来描述，还需要一个额外的方位场 $n_i(\boldsymbol{x})$. 这个方位场是**独立于**旋转场 $\omega_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_j u_k(\boldsymbol{x})$ 的. Frank 所定义旋错线正是关于这个**独立**的方位自由度的旋转缺陷线. 因此，他们**先验地**就与旋转场 $\omega_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_j u_k(\boldsymbol{x})$ 中的旋错线无关. 事实上，液体内总是充满了位错和 ω 旋错，甚至在方位场 $n_j(\boldsymbol{x})$ 完全有序的情形下也是如此.

J.P. Friedel 在他的一本关于位错的书中将这些 n_j 旋错称为**旋转位错** (请参看本章末尾的注记与参考文献). 但后来旋错这个名词就变得约定俗成了 (请参看注记与参考文献中所引的 Kléman's 论文). 一般来讲，当人们知道在讨论哪个系统哪个相的话，这样做并不会引起什么误解.

以上这种将晶体切割开，移除或者塞进一块，然后再将断面光滑地粘接起来的思想实验最初是由 Volterra 在 1907 年提出的. 由于这个原因，人们将这种产生缺陷的方式称为 **Volterra 过程**， 而将切割面，即断面粘合的地方，称为 **Volterra 面**.

9.4 位错与旋错的相互依赖性

必须指出，位错与旋错并不是完全独立的. 在图 9.5 中我们已经看到，旋错线是通过从晶体中移除相邻层叠的原子层而获得的. 然而，每一层都可以认为在其边界有一个位错线. 因此，很显然，旋错线与等间距层叠在一起的一堆位错线是不可分的. 反过来，一根位错线与一对方向相反距离很近的旋错对则非常相似. 图 9.13 对这一点加以了说明. 我们这里给出了一对相反的旋错的 Volterra 手续. 我们首先切下了张角为 Ω 一块，但是并没有把它完全移走，而只是将它偏移了一个晶格间隔 a. 这相当于构造了一个弗兰克矢量为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的旋错线和一个具有相反弗兰克矢量为 $-\boldsymbol{\Omega}$ 的旋错线，只是后者的转动轴相对前者有一个 a 的位移. 从图上很明显看

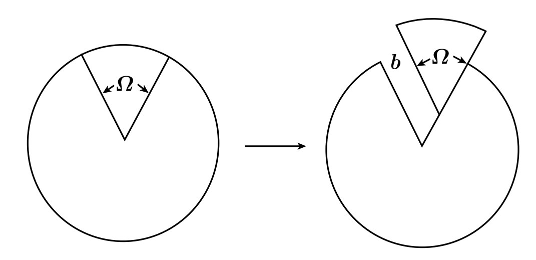


图 9.13 由一对方向相反且固定距离 b 的旋错线来构造一个位错线. 此 Volterra 手续是将一块切下后再重新将它插入，但有一个 $\boldsymbol{b}$ 的移动

出这一结果就是一个伯格斯矢量为 $\boldsymbol{b}$ 的位错线. 正是因为位错和旋错的这种相互依赖关系，真实晶体中的线状缺陷一般来讲就就是这两种的混合.

此处讨论的这个相互依赖性纯粹是个拓扑特性. 它并不意味着等价的缺陷构型 (如图 9.13 所示情形) 的弹性能必须相等. 这种能量的同一性只在具有位移场一阶梯度的线性弹性体中才成立. 这样一个模型将在方程 (10.9) 中给出.

在一个真实晶体中，弹性能总包含位移场的高阶导数项，而这将使得拓扑等价的缺陷构型会具有不同的能量. 方程 (10.9) 会给出一个这类型的模型.

出人意料的是，这种相互依赖性在爱因斯坦–嘉当引力理论中会起到重要的作用. 在第 21 章中我们会看到，爱因斯坦的相对论存在另一种表述，在此表述中引力效应都来自于挠率而不是曲率. 这就是所谓的引力的绝对平行理论. 在下一章中，我们将看到，曲率和挠率可以看作时空的旋错和位错，而绝对平行理论正是基于上述相互依赖关系，即有可能从挠率场的组合中得到曲率.

9.5　连续统介质中具有无穷小间断的线缺陷

现在就有个问题了 ，如何才能恰当地描述晶体中存在的多种多样的线缺陷? 一般来讲，这应该是一个非常困难的问题，因为晶体的对称性多种多样. 不过，为了获得一些对此问题的深层理解，我们有必要先来考查连续的各向同性介质中的情形. 则此时缺陷可由任意小的伯格斯矢量和弗兰克矢量来产生. 这中无穷小的缺陷对于对此问题的微分分析大有用处. 这对于简化处理旋转缺陷至关重要. 它使得我们可以给出旋错的一种特征描述，这个描述与利用伯格斯回路积分而给出位错的特征很相似. 作为一个例子，我们来考虑沿直线 L 的一个契型旋错 [如图 9.5、图 9.10、图 9.11 和图 9.12(a) 中所示]，并且绕 L 做一个沿回路 B 的积分.

如同在讨论位错时的情形一样，这给出了 Volterra 手续中所移除的部分的厚度. 与位错情形不一样的是，这个厚度会随着离开这个线的距离的增加而增大. 如果 $\boldsymbol{\Omega}$ 非常小的话，则穿过割线的位移场会有一个不连续性，这个可以通过以下**无穷小**转动：

$$\Delta u_i = (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{x})_i \tag{9.3}$$

计算而得，其中 $\boldsymbol{x}$ 为一个指向积分开始和结束的地方的矢量. 为了将此叙述转化为一个回路积分，我们需要去除对 $\boldsymbol{x}$ 的明显的依赖性，并且所考查的不是位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$，而是伴随着位移场的**局域旋转场**. 这个场由以下反对称张量给出：

$$\omega_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{2}\left[\partial_i u_j(\boldsymbol{x}) - \partial_j u_i(\boldsymbol{x})\right]. \tag{9.4}$$

当考察形变下无穷小距离的变化量

$$\mathrm{d}x_i' - \mathrm{d}x_i = (\partial_j u_i)\,\mathrm{d}x_j = u_{ij}\,\mathrm{d}x_j - \omega_{ij}\,\mathrm{d}x_j \tag{9.5}$$

时，张量场 ω_{ij} 上的旋转性就很明显. 与这个张量场相联的矢量 ω_i 如下：

$$\omega_{ij}(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{ijk}\omega_k(\boldsymbol{x}), \tag{9.6}$$

即

$$\omega_i(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \times \boldsymbol{u}\right)_i. \tag{9.7}$$

式 (9.6) 的右边将局域形变分解为局部形状变化和局部转动的和. 现在，当再次审视图 9.12(a) 中的楔形旋错时，我们看到，由于式 (9.3)，场 $\omega_i(\boldsymbol{x})$ 在穿越切割线时有一个常数间断 Ω. 这可用下面这个积分式表示出来：

$$\Delta\omega_i = \oint_B \mathrm{d}\omega_i = \Omega_i. \tag{9.8}$$

不论选取怎样的积分回路 B，只要它环绕该旋错线 L，则上述积分值就是一样的.

这样一个简单的表征基本上依赖于缺陷的无穷小尺寸. 如果 Ω 是有限的，则式 (9.3) 中的微分表达式将不再是一个转动，且如果不确定积分回路 B 的话那个穿越割线后的不连续值也将不能再由式 (9.8) 中的形式给出. 对于有限角度的这种困难性来自于转动群的非阿贝尔特性.

只有无穷小局域转动才具有转角的叠加性，因为此时二次以及更高阶修正可以忽略不计.

9.6 位移场的多值性

位移场其实是一种典型的**多值**场. 在一个完美晶体中，原子偏离其平衡位置 $\boldsymbol{x}$ 非常小，因此非常自然地我们可以通过从晶格格点 $\boldsymbol{x}$ 到**最近邻**原子画出其相应的位移矢量. 然而，原则上，由于晶体中原子的全同性，这样一种明确的分配认定是不可能. 由于热振动的存在，这些原子不停地在交换着位置，这就是所谓的**自扩散**过程. 经过很长一段时间后，甚至在规则晶体中，位移矢量也将跑遍整个晶格. 因此，如果我们最初用很小的位移矢量场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 来描述一个规则晶体的话，则经过相当长时间后，他们就会变为晶格所有矢量的一个置换，外加围绕它们的一些小的涨落. 因此，位移矢量内禀地就是多值的，$u_i(\boldsymbol{x})$ 与 $u_i(\boldsymbol{x}) + aN_i(\boldsymbol{x})$ 是无法区分的，其中 $N_i(\boldsymbol{x})$ 为整数而 a 为晶格间距.

很有趣的是，这个特性使得位移场与 $^4\mathrm{He}$ 超流中的相角变量 $\gamma(\boldsymbol{x})$ 地位相当. 当然，在超流中 $\gamma(\boldsymbol{x})$ 与 $\gamma(\boldsymbol{x}) + 2\pi N(\boldsymbol{x})$ 的不可区分性源于完全不同的起因：它直接来自与物理场是复场 $\psi(\boldsymbol{x}) = |\psi(\boldsymbol{x})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma(\boldsymbol{x})}$ 这样一个事实，而这个复场在变换 $\gamma(\boldsymbol{x}) \to \gamma(\boldsymbol{x}) + 2\pi N(\boldsymbol{x})$ 下是不变的.

因此，尽管 $\gamma(\boldsymbol{x})$ 与 $u_i(\boldsymbol{x})$ 所描述的物理完全不同，它们却共享多值性这样一种特性. 这就好比将 $u_i(\boldsymbol{x})$ 重新标度过的变量 $\gamma_i(\boldsymbol{x}) = (2\pi/a)u_i(\boldsymbol{x})$ 可作为以下三个复场得相角：

$$\psi_i(\boldsymbol{x}) = |\psi_i(\boldsymbol{x})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_i(\boldsymbol{x})},$$

而这些复场用来表示晶体中原子的位置.

在一个规则晶体中，$u_i(\boldsymbol{x})$ 的多值性并没有重要的物理结果. 此种情况中原子都被强烈地限制在它的位置上，而很少发生位置交换. 而这种交换由于原子的全同性以及体系多体波函数的对称性也是无关紧要的. 这也就是为什么 $u_i(\boldsymbol{x})$ 对应于最近邻平衡位置 $\boldsymbol{x}$ 这种自然的分派不会出问题的原因. 然而，一旦存在缺陷，这种分派的不确定性马上就显现出来了：当移除一个原子层 S 后，我们所得到的就是沿着这个原子层边界的位错线. 当穿越这个面时位移矢量 $u_i(\boldsymbol{x})$ 会有一个晶格间距大小的跃变. 这意味着，这个面两边的原子相互靠近了. 图 9.14 显示，同样的位错线可以通过移除另外一个完全不同的原子层 S' 来构造，只要它具有与前一个相同的边界线. 从物理上来讲，这并没任何的不同. 不同仅仅是在**描述**上，不同的描述等同于不同的分派，即从哪个平衡位置来计量位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$. 不同于规则晶体，这里我们已经没有一个最近平衡点可供选择了. 也正是这种多值性才提供了建立固体线缺陷几何描述的基础.

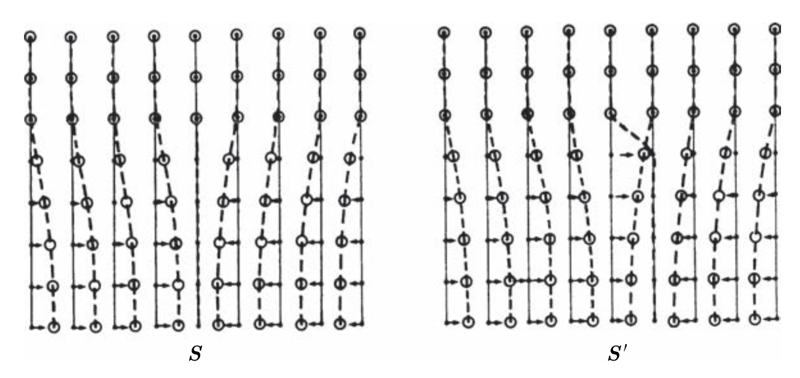


图 9.14　当存在位错线时，位移场只能以晶格矢量为模数来定义. 这种不确定性来源于在 Volterra 手续中所移除的原子层的任意性，唯一的限制是边界线确定. 移动 S 就意味着改变确定位移 $u_i(\boldsymbol{x})$ 的参考点

9.7　位移场的光滑性和 Weingarten 定理

为了对一般的线缺陷进行分类，我们必须首先给出远离奇异点处位移场光滑性的特性描述. 用物理的语言来讲，就是我们必须保证在割开然后将断面重新粘合

时晶体能够很好地相契合.

在第 4.2 节中磁学的微分表示中，磁场的存在是通过可积条件 [请参看式 (4.37)]

$$(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\,\Omega(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{9.9}$$

的破坏来表征的. 而在晶体中，这一可积性在远离切割面 S 的地方都成立，在这些地方 $u_i(\boldsymbol{x})$ 完全是光滑的且满足如下可积条件

$$(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\,u_k(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.10}$$

而当穿越这个表面时，$u_i(\boldsymbol{x})$ 就变得不连续了. 当然，这两个断面必须能够互相完美地粘合在一起. 这意味着应变和它的第一阶导数在这个切割面 S 的两侧应具有相同的值：

$$\Delta u_{ij} = 0, \tag{9.11}$$

$$\Delta\partial_k u_{ij} = 0. \tag{9.12}$$

这些条件就非常严格地限制了 $u_i(\boldsymbol{x})$ 穿越 S 的不连续性. 为了说明这一点，我们令 $\boldsymbol{x}(1)$ 和 $\boldsymbol{x}(2)$ 为非常靠近 S 的上方和下方的两个不同的晶格点，而 C^+ 和 C^- 为连接这两点的两条线 (图 9.15). 于是，我们就可以来如下计算这两点处突变的差：

$$\begin{aligned}\Delta u_i(1) - \Delta u_i(2) &= \left[u_i(1^-) - u_i(1^+)\right] - \left[u_i(2^-) - u_i(2^+)\right] \\ &= \int_{\substack{1^+ \\ C^+}}^{2^+} \mathrm{d}x_j \partial_j u_i - \int_{\substack{1^- \\ C^-}}^{2^-} \mathrm{d}x_j \partial_j u_i.\end{aligned} \tag{9.13}$$

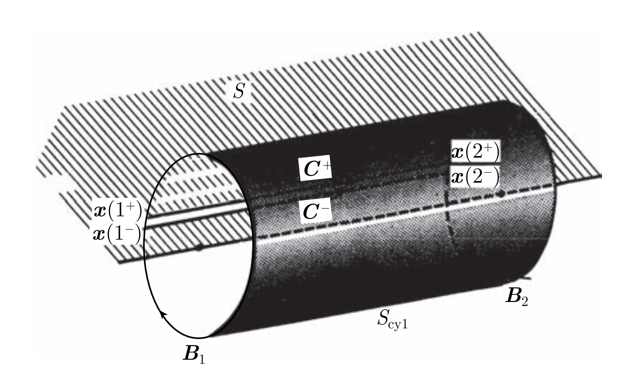


图 9.15 在推导 Weingarten 定理时所用到的几何表述. 参看方程 (9.13)~(9.22)

利用局域旋转场 $\omega_{ij}(\boldsymbol{x})$，我们可以将此式改写为

$$\Delta u_i(1) - \Delta u_i(2) = \int_{\substack{1^+ \\ C^+}}^{2^+} \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j(u_{ij} - \omega_{ij}) - \int_{\substack{1^- \\ C^-}}^{2^-} \mathrm{d}x_j(u_{ij} - \omega_{ij}). \tag{9.14}$$

ω_{ij} 的部分可以通过分部积分而得

$$
\begin{aligned}
&-\left(x_j-x_j(1^+)\right)\omega_{ij}\Big|_{1^+}^{2^+}+\int_{1^+}^{2^+}\mathrm{d}x_k\left(x_j-x_j(1^+)\right)\partial_k\omega_{ij}\\
&+\left(x_j-x_j(1^-)\right)\omega_{ij}\Big|_{1^-}^{2^-}\mathrm{d}x_k\left(x_j-x_j(1^-)\right)\partial_k\omega_{ij}\\
=&\left[-\left(x_j(2^+)-x_j(1^+)\right)\omega_{ij}(2^+)+\int_{1^+}^{2^+}\mathrm{d}x_k\left(x_j-x_j(1^+)\right)\partial_k\omega_{ij}\right]-[+\to-]. \quad (9.15)
\end{aligned}
$$

由于

$$x_j(1^+)=x_j(1^-),\quad x_j(2^+)=x_j(2^-),$$

我们于是就得到关系

$$
\begin{aligned}
\Delta u_i(1)-\Delta u_i(2)=&-\left(x_j(1)-x_j(2)\right)\left(\omega_{ij}(2^-)-\omega_{ij}(2^+)\right)\\
&+\oint_{C^{+-}}\mathrm{d}x_k\left\{u_{ik}+(x_j-x_j(1))\partial_k\omega_{ij}\right\}, \quad (9.16)
\end{aligned}
$$

其中，C^{+-} 为由 C^+ 和 $-C^-$ 构成的一个闭合回路. 由于 C^+ 和 $-C^-$ 正是在切割面上下方的一个来回路径，因此这个闭合回路积分可以重新写为一个沿 $-C^-$ 的单个积分，而将 u_{ik} 和 $\partial_k\omega_{ij}$ 用它们穿越切割面 S 的跃变值来替换掉. 此外，$\partial_k\omega_{ij}$ 的跃变可以通过以下方法进行分解：

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(\partial_k\omega_{ij}\right)=&\frac{1}{2}\partial_k\left(\partial_i u_j-\partial_j u_i\right)(\boldsymbol{x}^-)-\left(\boldsymbol{x}^-\to\boldsymbol{x}^+\right)\\
=&\partial_i u_{kj}(\boldsymbol{x}^-)-\partial_j u_{ki}(\boldsymbol{x}^-)+\frac{1}{2}\left(\partial_k\partial_i-\partial_i\partial_k\right)u_j(\boldsymbol{x}^-)\\
&-\frac{1}{2}\left(\partial_k\partial_j-\partial_j\partial_k\right)u_i(\boldsymbol{x}^-)+\frac{1}{2}\left(\partial_j\partial_i-\partial_i\partial_j\right)u_k(\boldsymbol{x}^-)-\left(\boldsymbol{x}^-\to\boldsymbol{x}^-\right). \quad (9.17)
\end{aligned}
$$

基于位移场在曲面上方或者下方都是光滑的，因此在 $\boldsymbol{u}(x^{\pm})$ 之前的两个微分算符是对易的. 于是式 (9.16) 中的积分就变为

$$-\int_{C^-}dx_k\left\{\Delta u_{ij}+(x_j-x_j)(1)\Delta(\partial_i u_{kj}-\partial_j u_{ki})\right\}. \quad (9.18)$$

由于式 (9.11) 和式 (9.12) 中的物理要求，这个表达式的值为零. 这样导致的一个结果就是我们发现在这个面上 1 和 2 这任意两点上的跃变由如下简单关系：

$$\Delta u_i(2)=\Delta u_i(1)-\varOmega_{ij}\left(x_j(2)-x_j(1)\right), \quad (9.19)$$

其中，$\varOmega_{ij}$ 为一个固定的无穷小转动矩阵，它由下式给出：

$$\varOmega_{ij}=\Delta\omega_{ij}(2)=\omega_{ij}(2^-)-\omega_{ij}(2^+). \quad (9.20)$$

我们现在来定义旋转矢量 $\boldsymbol{\Omega}$，它的分量为

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{ij} \tag{9.21}$$

利用此量，式 (9.19) 就可写为

$$\Delta\boldsymbol{u}(2) = \Delta\boldsymbol{u}(1) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x}(2) - \boldsymbol{x}(1)). \tag{9.22}$$

这就是 **Weingarten 定理**的内容，它表明，位移场穿过切割面的跃变只能是一个常矢量加一个固定的转动.

注意，这些正是固体连续统的对称性要素. 当我们再重新来看图 9.2～ 图 9.12 中的位错和旋错线时，我们发现所有的跃变确实都遵循这一定理. 矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 正是旋错线的弗兰克矢量. 对于一个单纯的位错线，$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$，则 $\Delta\boldsymbol{u}(1) = \Delta\boldsymbol{u}(2) = \boldsymbol{b}$ 就是它的伯格斯矢量.

9.8 位移场的可积特性

旋转场 $\omega_{ij}(\boldsymbol{x})$ 也具有非平凡的可积特性. 对 Weingarten 定理 (9.19) 求导，我们看到 $\omega_{ij}(\boldsymbol{x})$ 场的跃变必须是一个常数，即 Ω_{ij}. 因此，除了在缺陷上，ω_{kl} 同样也在其他任何地方满足可积条件

$$(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\,\omega_{kl} = 0. \tag{9.23}$$

这个理由同涡旋线中的是一样的. 很简单，利用式 (4.21) 中的斯托克斯定理，我们看到对它沿着伯格斯回路所作的围道积分

$$\Delta\omega_{ij} = \oint_B \mathrm{d}\omega_{ij} = \oint_B \mathrm{d}x_k\partial_k\omega_{ij} \tag{9.24}$$

可化为如下形式：

$$\Delta\omega_{ij} = \int_{S^B} \mathrm{d}S_m\epsilon_{mkl}\partial_k\partial_l\omega_{ij}, \tag{9.25}$$

其中，S^B 为伯格斯回路所围成的某个曲面. 由于这个结果与环绕线缺陷 L 的伯格斯回路的大小、形状以及其位置都无关系，因此，这就意味着在离开 L 的任何地方都有

$$\epsilon_{mkl}\partial_k\partial_l\omega_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{9.26}$$

而这也正是我们想要加以证明的结果.

其实，ω_{ij} 的跃变为常数这一特性可以更加直接地推导得出，而不必经过从式 (9.23) 到式 (9.26) 的过程. 我们只需再次取图 9.15 中的曲线 C^+ 和 C^-，然后计算

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{ij}(1)-\Delta\omega_{ij}(2)&=\int_{\substack{1^+\\C^+}}^{2^+}\mathrm{d}x_k\partial_k\omega_{ij}-\int_{\substack{1^-\\C^-}}^{2^-}\mathrm{d}x_k\partial_k\omega_{ij}\\&=-\int_{\substack{1^-\\C^-}}^{2^-}\mathrm{d}x_k\Delta\left(\partial_k\omega_{ij}\right).\end{aligned}\tag{9.27}$$

由式 (9.11)、式 (9.12) 以及式 (9.17)，我们不难看出 $\partial_k\omega_{ij}(\boldsymbol{x})$ 在穿越 Volterra 曲面 S 时并不发生跃变，因此式 (9.27) 就说明 $\Delta\omega_{ij}$ 是一个常数.

现在我们来考察位移场本身. 作为 Weingarten 定理的一个例子，沿图 9.15 中所给伯格斯回路 B_2 的下列积分给出：

$$\Delta u_i(2)=\oint_{B_2}\mathrm{d}u_i=\Delta u(1)-\varOmega_{ij}\left[x_j(2)-x_j(1)\right],\tag{9.28}$$

$$\Delta u_i(1)-\varOmega_{ij}\left[x_j(2)-x_j(1)\right]=\oint_{B_2}\mathrm{d}x_k\left\{u_{ik}+\left[x_j-x_j(2)\right]\partial_k\omega_{ij}\right\}.\tag{9.29}$$

这里我们看到，由于式 (9.24) 以及 $\Delta\omega_{ij}=\varOmega_{ij}$，$x_i(2)$ 这个因子因此可以从方程两边去掉. 利用式 (4.21) 中的斯托克斯定理，剩余的部分就变成了一个包含 S^{B_2} 上曲面积分的方程：

$$\begin{aligned}\Delta u_i(1)+\varOmega_{ij}x_j(1)&=\int_{S^{B_2}}\mathrm{d}S_l\,\epsilon_{lmk}\partial_m\left(u_{ik}+x_j\partial_k\omega_{ij}\right)\\&=\int_{S^{B_2}}\mathrm{d}S_l\,\epsilon_{lmk}\left[\left(\partial_m u_{ik}+\partial_k\omega_m\right)+x_j\partial_m\partial_k\omega_{ij}\right].\end{aligned}\tag{9.30}$$

只要 B_2 环绕线缺陷 L，则式 (9.30) 的结果将不依赖于这个回路的大小、形状和位置. 对所有这些不同的构型，式 (9.30) 的左侧都是一个常数. 我们因此得出结论，对于任何**不**包围 L 的曲面 S，有

$$\int_S\mathrm{d}S_l\left[\epsilon_{lmk}\left(\partial_m u_{ik}+\partial_k\omega_{im}\right)+x_j\epsilon_{lmk}\partial_k\omega_{ij}\right]=0.\tag{9.31}$$

此外，由式 (9.23) 我们看到式 (9.31) 最后一项并无贡献. 而另外，利用式 (9.18) 中对 $\partial_k\omega_{im}$ 的分解，前面两项可写为

$$-\int_S\mathrm{d}S_l\,\epsilon_{lmk}\left(S_{kmi}-S_{mik}+S_{ikm}\right)=\int_S\mathrm{d}S_l\,\epsilon_{lmk}S_{mki},\tag{9.32}$$

其中，我们引入了缩写

$$S_{kmi}(\boldsymbol{x})\equiv\frac{1}{2}\left(\partial_k\partial_m-\partial_m\partial_k\right)u_i(\boldsymbol{x}).\tag{9.33}$$

因为这个结果对任何 S 都须为零，我们因此得出结论，在离开线缺陷一定距离上，位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 同样也满足可积条件

$$\left(\partial_k\partial_m-\partial_m\partial_k\right)u_i(\boldsymbol{x})=0.\tag{9.34}$$

而在线 L 上，通常来讲，u_i 和 ω_{ij} 的可积条件均不成立. 我们先来看 ω_{ij}. 为了从式 (9.25) 得出 $\varDelta_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \varOmega_{ij}$，其可积条件沿 L 必须违反且取式 (4.10) 中 δ 函数的形式，即

$$\epsilon_{lmk}\partial_m\partial_k\omega_{ij} = \varOmega_{ij}\delta_l(\boldsymbol{x}; L). \tag{9.35}$$

于是，利用

$$\int_{S^B} \mathrm{d}S_l\, \delta_l(\boldsymbol{x}; L) = 1, \tag{9.36}$$

式 (9.25) 就给出 $\Delta\omega_{ij} = \varOmega_{ij}$. 而为了弄清 $u_i(\boldsymbol{x})$ 的可积条件是如何被破坏的，我们现在来看式 (9.30) 中的积分并将式 (9.32) 中的结果代入. 这给出

$$\Delta u_i(1) + \varOmega_{ij}x_j(1) = \int_{S^{B_2}} \mathrm{d}S_l\, \epsilon_{lmk}\left(S_{mki} + x_j\partial_m\partial_k\omega_{ij}\right). \tag{9.37}$$

右边是一个与曲面 S^{B_2} 的位置无关的常数. 而这意味着沿 L 的奇异性须取如下形式：

$$\epsilon_{lmk}\left(\partial_m\partial_k u_i + x_j\partial_m\partial_k\omega_{ij}\right) = b_i\delta_l(\boldsymbol{x}; L), \tag{9.38}$$

其中，我们已经引入一个新的变量为：

$$b_i \equiv \Delta u_i(1) + \varOmega_{ij}x_j(1). \tag{9.39}$$

将式 (9.35) 代入式 (9.38) 就得出，沿 L $u_i(\boldsymbol{x})$ 的可积条件被破坏了：

$$\epsilon_{lmk}\partial_m\partial_k u_i = \left(b_i - \varOmega_{ij}x_j\right)\delta_l(\boldsymbol{x}; L). \tag{9.40}$$

利用式 (9.33) 中的张量，这可表示为

$$\epsilon_{lmk}S_{mki} = \left(b_i - \varOmega_{ij}x_j\right)\delta_l(\boldsymbol{x}; L). \tag{9.41}$$

9.9 位错与旋错密度

对位移场和旋转场可积条件得破坏正比于沿线 L 上的 δ 函数，这类似于第 4 章中对磁场的多值描述的情形. 这种类比还可以进一步扩展. 例如，考虑方程 (4.1) 中的电流密度，通过方程 (4.36)、(4.23) 和 (4.37)，它可重新写为多值表示的形式

$$j_i(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{ijk}\partial_j B_k(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{4\pi}\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varOmega(\boldsymbol{x}) = I\delta_i(\boldsymbol{x}; L). \tag{9.42}$$

这里 $\varOmega$ 为式 (4.25) 中环线 L 对 $\boldsymbol{x}$ 点所张的立体角. 类似与此，我们可以如下分别引入位错和旋错的**密度**：

$$\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l u_j(\boldsymbol{x}), \tag{9.43}$$

$$\theta_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l \omega_j(\boldsymbol{x}), \tag{9.44}$$

其中，我们已经运用了旋转场的矢量形式 $\omega_i = (1/2)\epsilon_{ijk}\omega_{jk}$ 以节省一个指标. 对于沿 L 的一个一般的线缺陷，上述密度可写为

$$\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_i(\boldsymbol{x};L)\left(b_j - \varOmega_{jk}x_k\right), \tag{9.45}$$

$$\theta_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_i(\boldsymbol{x};L)\varOmega_j, \tag{9.46}$$

其中，$\varOmega_i = (1/2)\epsilon_{ijk}\varOmega_{jk}$ 为弗兰克矢量的分量.

注意，利用方程 (9.33) 中的张量场 $S_{ijk}(\boldsymbol{x})$，位错密度 (9.43) 变为

$$\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \epsilon_{ikl}S_{lkj}(\boldsymbol{x}). \tag{9.47}$$

式 (9.45) 和式 (9.46) 中由 $\varOmega$ 给出的转动是围绕原点的. 当然，仅需一个简单的移动 $b_j \to b'_j + (\boldsymbol{\varOmega}\times\boldsymbol{x}_0)_j$，就可以将转轴位置变到任意一点 $\boldsymbol{x}_0$ 处. 于是 $\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_i(\boldsymbol{x};L)\{b'_j + \boldsymbol{\varOmega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_j\}$. 注意到由于闭合曲线 L 上有关系式 $\partial_i\delta_i(\boldsymbol{x};L) = 0$ [参见式 (4.12)]，因此旋错密度满足守恒律

$$\partial_i\theta_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{9.48}$$

这说明旋错线总是闭合的. 但这对于含有方向场的介质并不成立，如向列型液晶. 我们在此处并不考虑这类介质，原因是这类介质并不能够单用一个位移场来描述. 对式 (9.45) 求导，我们就得到了位错线的守恒定律 $\partial_i\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = -\varOmega_{ij}\delta_i(\boldsymbol{x};L)$，而这又可表示为以下形式：

$$\partial_i\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = -\epsilon_{jkl}\theta_{kl}(\boldsymbol{x}). \tag{9.49}$$

利用式 (9.47) 将式 (9.49) 表示为张量 S_{ijk} 的形式，就变成

$$\epsilon_{jkl}\left(\partial_i S_{kli} + \partial_k S_{lnm} - \partial_l S_{knn}\right) = -\epsilon_{jkl}\theta_{kl}. \tag{9.50}$$

也确实，如果将式 (9.47) 中 $S_{klj} = (1/2)\epsilon_{kli}\alpha_{ij}$ 的表达式代入，式 (9.50) 就约化为式 (9.49) 中位错密度的守恒律.

从式 (9.43) 和式 (9.44) 中的关系式分别对 u_j 和 ω_j 的线性特性来看，很明显这些守恒律对于任何无穷小线缺陷系综都是成立的. 事实上，式 (9.49) 中的守恒律是可以通过式 (9.11) 中光滑假设用纯粹的微分手段得到. 利用式 (4.21) 中的斯托克斯定理，Δu_{ij} 可以像式 (9.25) 中的 $\Delta\omega_{ij}$ 那样用同样的方法表示出来. 利用在讨论 ω_{ij} 时所用到的同样的方法，我们不难得出结论，应变在**全空间**都是可积函数，它满足

$$(\partial_i\partial_k - \partial_k\partial_i)\, u_{lj}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.51}$$

现在，我们取式 (9.43) 中 α_{ij} 的一般性定义并将它重新写为

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l u_j = \epsilon_{ikl}\partial_k\,(u_{lj} + \omega_{lj})\\ &= \epsilon_{ikl}\partial_k u_{lj} + \delta_{ij}\partial_k\omega_k - \partial_j\omega_i.\end{aligned} \tag{9.52}$$

对此求导 ∂_i 并利用式 (9.51)，我们就直接得到了式 (9.49).

用类似的方法，守恒律 (9.48) 可以通过结合光滑性假设 (9.11) 和 (9.12) 而推导得出. 利用斯托克斯定理 (4.21)，第一个式子可以重新阐述为应变的导数的可积条件，即

$$(\partial_l\partial_n - \partial_n\partial_l)\, \partial_k u_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.53}$$

我们知道，由于式 (9.11) 中的假设，这导致了式 (9.18) 所得出的结论，即 $\partial_k\omega_{ij}(\boldsymbol{x})$ 在穿越 S 时也完全是一个光滑函数. 因此，$\partial_k\omega_{ij}$ 也必须满足如下可积条件：

$$(\partial_l\partial_n - \partial_n\partial_l)\, \partial_k\omega_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

结合式 (9.53)，这说明 $\partial_k\partial_i u_j(\boldsymbol{x})$ 是可积的：

$$(\partial_l\partial_n - \partial_n\partial_l)\, \partial_k\partial_i u_j(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.54}$$

如果我们将此关系写三遍，且每一遍都将指标 l、n 和 k 进行循环调换，我们就发现

$$\partial_l R_{nkij} + \partial_n R_{klij} + \partial_k R_{lnij} = 0, \tag{9.55}$$

其中，R_{nkij} 为下述表达式的缩写：

$$R_{nkij} = (\partial_n\partial_k - \partial_k\partial_n)\, \partial_i u_j(\boldsymbol{x}). \tag{9.56}$$

将 k 与 i 缩并，并将 l 与 j 缩并，就给出

$$\partial_j R_{niij} + \partial_n R_{ijij} + \partial_i R_{jnij} = 0. \tag{9.57}$$

现在我们看到，由于式 (9.51)，R_{nkij} 不仅仅对 n 和 k 是反对称的，对 i 和 j 也是，因此

$$2\partial_j R_{inji} - \partial_n R_{ijji} = 0. \tag{9.58}$$

利用式 (1A.16) 中关于 ϵ 张量的恒等式，式 (9.58) 可以重写为 [参看方程 (1A.16)]

$$2\partial_j\left(\frac{1}{4}\epsilon_{jpq}\epsilon_{nkl}R_{pqkl}\right) = 0, \tag{9.59}$$

现在回头再看式 (9.56) 中曲率张量的定义式，并利用 $\omega_n = (1/2)\epsilon_{nkl}\partial_k u_l$，方程 (9.59) 就变为

$$2\epsilon_{ipq}\partial_i\partial_p\partial_q\omega_m = 0. \tag{9.60}$$

这正是我们所想要证明的方程 (9.48) 中的旋错守恒律 $\partial_i\theta_{ik} = 0$.

请注意方程 (9.33) 和 (9.56) 中挠率和曲率的表示形式. 事实上，我们会看到方程 (9.50) 和 (9.55) 正是著名的基本恒等式和比安基恒等式的线性形式，而这两个恒等式将在第 12.1 节和第 12.5 节中分别进行讨论 [参看方程 (12.103) 和 (12.115)].

9.10　便于记忆的构造缺陷密度的方法

对于构造缺陷密度及其守恒律，有一种简单的便于记忆的方法.

假定我们在一个**闭合曲面** S 上作 Volterra 切割手续，假想将它分为两部分，这两部分沿某条线 L 粘接起来 (图 9.16). 在 S 的第一个部分 S^+，我们移除厚度为 b_i 的物质而在另一部分我们加上同等大小的一块. 这其实对应着晶体物质一个简单的大小为 b_i 的平移，即对应于下述位移场：

$$u_l(\boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}; V)b_l, \tag{9.61}$$

其中，区域 V 上的 δ 函数的定义在方程 (4.30) 中给出. 这样一个变换并不会改变此材料的弹性特性.

现在来看形变场量 $\partial_k u_l(\boldsymbol{x})$. 在变换 (9.61) 下，它变为

$$\partial_k u_l(\boldsymbol{x}) \to \partial_k u_l(\boldsymbol{x}) - \partial_k\delta(\boldsymbol{x}; V)b_l. \tag{9.62}$$

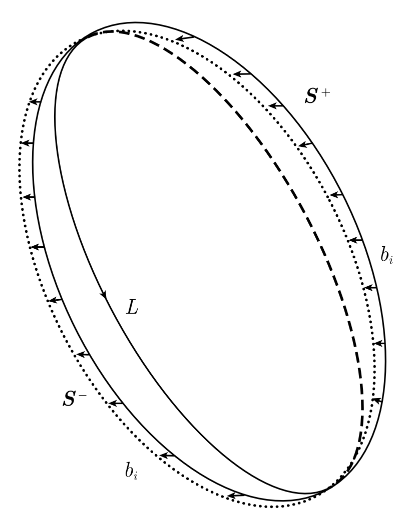


图 9.16　Volterra 过程的图示，在此过程中一整个区域沿着矢量 b_i 作了一个移动

δ 函数的导数只在区域 V 的表面才具有奇异性. 其实，在式 (4.35) 中我们已经给出了如下公式：

$$\partial_k \delta(\boldsymbol{x}; V) = -\delta_k(\boldsymbol{x}; S), \tag{9.63}$$

因此式 (9.62) 为

$$\partial_k u_l(\boldsymbol{x}) \to \partial_k u_l(\boldsymbol{x}) + \delta_k(\boldsymbol{x}; S) b_l. \tag{9.64}$$

由这个很简单的变换我们现在就可以来构造一个真正的位错线. 我们可以假定 S 不再是一个闭合的曲面而是一个开放曲面，即我们可以限定 S 到具有边界 L 的曲面 S^+ 上. 于是，我们就可以构造位错密度为

$$\alpha_{il}(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k u_l(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{ijk} \partial_j \delta_k(\boldsymbol{x}; S) b_l. \tag{9.65}$$

这里我们已略掉了上标 +. 利用式 (4.24) 中关于函数 $\delta_k(\boldsymbol{x}; S)$ 的斯托克斯定理，此式就可化简为

$$\alpha_{il}(\boldsymbol{x}) = \delta_i(\boldsymbol{x}; L) b_l. \tag{9.66}$$

对于一个闭合曲面，式 (9.65) 为零.

对于一个一般性的线缺陷，出发点则应该是对晶格上的一个区域做简单的**平动加转动**的 Volterra 操作. 这对应于如下的位移场：

$$u_l(\boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}; V) \left(b_l + \epsilon_{lqr} \Omega_q x_r\right). \tag{9.67}$$

现在如果我们构造形变场，利用式 (9.63) 我们得

$$\partial_k u_l(\boldsymbol{x}) = \delta_k(\boldsymbol{x}; S) \left(b_l + \epsilon_{lqr} \Omega_q x_r\right) - \delta(\boldsymbol{x}; V) \epsilon_{lqk} \Omega_q. \tag{9.68}$$

在这个表达式中我们还不能令 S 为一个开放曲面，因为这样的话就没有一个严格定义的由它所包围的区域 V 了. 但是，如果我们构造一个式 (9.68) 的对称组合，那这个区域体项就可以消掉了，于是**应变张量**就变为

$$u_{kl} = \frac{1}{2} \left(\partial_k u_l + \partial_l u_k\right) = \frac{1}{2} \left[\delta_k(\boldsymbol{x}; S) \left(b_l + \epsilon_{lqr} \Omega_q x_r\right) + (k \leftrightarrow l)\right], \tag{9.69}$$

而这个表达式只包含曲面 S，此时我们就可以令它为开放的了. 这种情况下，我们将 u_{kl} 称作**塑性应变**并且将它记为 u^{p}_{kl}. 场量

$$\beta^{\mathrm{p}}_{kl} \equiv \delta_k(\boldsymbol{x}; S) \left(b_l + \epsilon_{lqr} \Omega_q x_r\right) \tag{9.70}$$

为穿越曲面 S 的线缺陷的偶极密度. 称之为**塑性形变**. 它是一个单值场，即它之前的微分算符可对易. 利用 β^{p}_{kl}，则塑性应变可简化为

$$u^{\mathrm{p}}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\beta^{\mathrm{p}}_{kl} + \beta^{\mathrm{p}}_{kl}\right). \tag{9.71}$$

严格的位移场 (9.67) 并不可定义在一个开放的曲面上，因为它还含有区域 V. 然而，位错密度却是单值的. 因此，借助于式 (9.63) 和斯托克斯定理 (4.24)，我们可以很容易计算出

$$\begin{aligned}\alpha_{il} &= \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k u_l(\boldsymbol{x}) = \epsilon_{ijk}\partial_j\left[\delta_k(\boldsymbol{x};S)\left(b_l+\epsilon_{lqr}\Omega_q x_r\right)-\delta(\boldsymbol{x};V)\epsilon_{lqk}\Omega_q\right] \\ &= \delta_i(\boldsymbol{x};L)\left(b_l+\epsilon_{lqr}\Omega_q x_r\right),\end{aligned} \tag{9.72}$$

这与式 (9.45) 是相一致的.

我们现在来看旋错密度 $\theta_{pj}=\epsilon_{pmn}\partial_m\partial_n\omega_j$. 由式 (9.67) 我们发现旋转场的导数为

$$\begin{aligned}\partial_n\omega_j &= \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\partial_n\partial_k u_l \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\partial_n\left[\delta_k(\boldsymbol{x};S)\left(b_l+\epsilon_{lqr}\Omega_q x_r\right)-\delta(\boldsymbol{x};V)\epsilon_{lqk}\Omega_q\right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\partial_n\beta^{\mathrm{p}}_{kl}+\delta_n(\boldsymbol{x};S)\Omega_j.\end{aligned} \tag{9.73}$$

这一梯度可定义在开放曲面 S 上，称为**塑性弯扭** (plastic bend-twist)，并记为 $\kappa^{\mathrm{p}}_{nj}\equiv\partial_n\omega^{\mathrm{p}}_j$.

定义**塑性转动**为

$$\phi^{\mathrm{p}}_{nj}\equiv\delta_n(\boldsymbol{x};S)\Omega_j, \tag{9.74}$$

它表示旋错的偶极密度. 利用此式，ω_j 的塑性梯度就变为

$$\kappa^{\mathrm{p}}_{nj}=\partial_n\omega^{\mathrm{p}}_j=\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\partial_n\beta^{\mathrm{p}}_{kl}+\phi^{\mathrm{p}}_{nj}. \tag{9.75}$$

现在，我们就可以很容易地计算出旋错密度为

$$\theta_{pj}=\epsilon_{pmn}\partial_m\partial_n\omega_j=\epsilon_{pmn}\partial_m\kappa^{\mathrm{p}}_{nj}=\frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\epsilon_{pmn}\partial_m\partial_n\beta^{\mathrm{p}}_{kl}+\epsilon_{pmn}\partial_m\phi^{\mathrm{p}}_{nj}.$$

因为 β^{p}_{kl} 之前的微分算符对易 [参看式 (9.70)]，所以第一项为零. 将斯托克斯定理 (4.24) 运用于第二项，就得

$$\theta_{pj}=\epsilon_{pmn}\partial_m\phi^{\mathrm{p}}_{nj}=\delta_p(\boldsymbol{x};L)\Omega_j, \tag{9.76}$$

这与式 (4.12) 是相吻合的.

注意，根据式 (9.72) 的第二行，位错密度还可用 β^{p}_{kl} 和 ϕ^{p}_{li} 写为

$$\alpha_{il}=\epsilon_{ijk}\partial_j\beta^{\mathrm{p}}_{kl}+\delta_{il}\phi^{\mathrm{p}}_{pp}-\phi^{\mathrm{p}}_{li}. \tag{9.77}$$

其实，这正是式 (9.52) 中分解的一个直接结果，且可用塑性应变场和塑性弯扭场写为

$$\alpha_{ij}=\epsilon_{ikl}\partial_k u^{\mathrm{p}}_{lj}+\delta_{ij}\kappa^{\mathrm{p}}_{qq}-\kappa^{\mathrm{p}}_{ji}. \tag{9.78}$$

将 u^{p}_{li} 用 β^{p}_{li} 来表示，并将 κ^{p}_{ij} 用 ϕ^{p}_{ij} 来表示 [参看式 (9.71) 和式 (9.75)]，我们发现

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\partial_k\beta^{\mathrm{p}}_{lj}+\delta_{ij}\phi^{\mathrm{p}}_{qq}-\phi^{\mathrm{p}}_{qq}-\phi^{\mathrm{p}}_{ji}+\frac{1}{2}\left(\epsilon_{ijk}\partial_k\beta^{\mathrm{p}}_{jl}+\delta_{ij}\epsilon_{qkl}\partial_q\beta^{\mathrm{p}}_{kl}-\epsilon_{ikl}\partial_i\beta^{\mathrm{p}}_{kl}\right).$$

对 $\partial_q\beta_{kl}$ 运用式 (1A.20) 中的等式关系，不难发现括号内的量等于 $\dfrac{1}{2}\epsilon_{ikl}\partial_k\beta^{\mathrm{p}}_{lj}$. 于是，$\alpha_{ij}$ 再次取式 (9.77) 中的形式.

9.11 缺陷规范不变性

一个特定的缺陷分布可以从多种不同的塑性应变和塑性转动中得到. 这是很明显的，因为在构造线缺陷 L 时可以自由选择 Volterra 曲面 S. 这些线缺陷位于曲面 S 的边界，而曲面的形状却是无关紧要的. 从第 4.6 节关于电流环磁场的梯度表示的讨论以及第 5 章中关于超流中涡旋线理论的论述中我们知道，这种自由可以数学地表示为一种规范对称性. 我们知道，一个线闭合回路上电流密度可以表示为曲面上 δ 函数的旋度 [参看式 (4.92)]：

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})=I\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S). \tag{9.79}$$

这个表达式在下述规范变化下是不变的：

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)\to\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S')=\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x};S)-\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x};V), \tag{9.80}$$

[参看式 (4.29)]，这个变换只是将曲面 S 移至一个新的位置 S' 而保持边界不动. 在涡旋线体系中也存在这样的规范不变性 [参考式 (5.29)].

式 (9.80) 中的规范场就使得我们可以去构造一个多值场的规范不变的梯度. 在超流这个最简单的例子中，多值场为周期为 2π 的相角 $\theta(\boldsymbol{x})$，而相应的规范不变的梯度则是超流速度 (5.28)：

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{v}}(\boldsymbol{x}). \tag{9.81}$$

按照前一节的讨论，我们可以对此不变量设计一个简单构造规则. 我们可以对周期场 $\theta(\boldsymbol{x})$ 进行一个简单的 “Volterra” 操作，在一个任意的区域 V 内将它平移 -2π：

$$\theta(\boldsymbol{x})\to\theta(\boldsymbol{x})-2\pi\delta(\boldsymbol{x},V), \tag{9.82}$$

由于 $\theta(\boldsymbol{x})$ 和 $\theta(\boldsymbol{x})-2\pi$ 在物理上是不可区分的，因此这很显然是个对称操作. 在此变换下，它的梯度变为

$$\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})-2\pi\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x},V)=\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})+2\pi\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},S), \tag{9.83}$$

其中，S 为 V 的表面，并且我们已运用了等式 (9.63). 多出来的这项 $2\pi\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},S)$ 并不仅仅可以定义在区域 V 的闭合的曲面 S 上，它同时也可以定义在开放曲面上. 这种情况下，它就是该梯度的塑性形变

$$[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{p}} \equiv 2\pi\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x},S). \tag{9.84}$$

式 (9.81) 中的涡旋规范不变量则可通过它们之间的差得到

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x}) - [\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{p}}. \tag{9.85}$$

如果我们现在进行一个将曲面由 S 变到 S' 的操作，则塑性形变 (9.84) 由于它的规范特性 (4.29) 也会跟着变：

$$[\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{p}} \to [\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{p}} + 2\pi\boldsymbol{\nabla}\delta(\boldsymbol{x},V), \tag{9.86}$$

这就同在式 (9.82) 中的 “Volterra” 操作下完全一样，只不过有一个负号的差别. 唯一的不同就是现在这个区域 V 是开放曲面由 S 变到 S' 时所扫过的区域. 这个变化因此可以通过一个 “Volterra” 操作

$$\theta(\boldsymbol{x}) \to \theta(\boldsymbol{x}) + 2\pi\delta(\boldsymbol{x},V) \tag{9.87}$$

而加以补偿. 这就保证了式 (9.86) 和式 (9.87) 同时变换下的涡旋规范不变性.

如果我们希望建立一个含缺陷的晶体的弹性理论的话 (这是第 10 章的内容)，我们就必须找到一个类比于不变梯度 (9.85) 的量. 类比于式 (9.85)，很简单，这就是弹性形变和上节得到的塑性形变之差. 对于应变张量 u_{kl}，我们从中减掉塑性应变张量 (9.71)，就得到了缺陷规范不变得应变张量

$$u_{ij}^{\mathrm{inv}}(\boldsymbol{x}) \equiv u_{ij}(\boldsymbol{x}) - u_{ij}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}). \tag{9.88}$$

事实上，在 Volterra 曲面由 S 变到 S' 时，根据式 (9.80) 中 $\delta(\boldsymbol{x};S)$ 的变换规则，塑性应变张量 (9.72) 变为

$$\beta_{kl}^{\mathrm{p}} \to \beta_{kl}^{\mathrm{p}} - \partial_k\delta(\boldsymbol{x};V)\left(b_l + \epsilon_{lqr}\Omega_q x_r\right). \tag{9.89}$$

这个变化恰恰可以通过联合的平移和转动变换 (9.67) 抵消掉，而后面这个变换通过恒等式 (9.61) 就给出了张量 (9.69).

类似地，我们可以构造一个不变的组合

$$\kappa_{nj}^{\mathrm{inv}} \equiv \partial_n\omega_j - \kappa_{nj}^{\mathrm{p}} = \partial_n\omega_j - \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}\partial_n\beta_{kl}^{\mathrm{p}} - \phi_{nj}^{\mathrm{p}}, \tag{9.90}$$

这是缺陷规范不变的，因为式 (9.89) 中的变换可以通过式 (9.67) 中的 Volterra 操作抵消掉，后者可通过式 (9.61) 给出塑性弯扭 (9.75).

有了式 (9.70) 中塑性形变的一般形式，我们就可以一种特殊的规范不变类型来表征在第 9.4 节中所看到的位错和旋错的相互依赖性. 很显然，β^{p}_{kl} 在下述变换下是不变的：

$$b_l \to b_l + \epsilon_{lqr}\Delta\Omega_q x_r, \quad \Omega_q \to \Omega_q - \Delta\Omega_q. \tag{9.91}$$

由于在简单立方晶格中 x_r 均为整数，因此就存在 $\Delta\Omega_q$ 的一种选择，使得 b_l 或者 Ω_q 为零.

9.12 线缺陷的分叉

我们知道 ，从几何的角度看，缺陷守恒律说明旋错线将永不终止，而位错线则最多终止与旋错线. 例如，我们来考虑一个分叉的构型，其中 L 分裂为两条线 L' 和 L''. 给每条线指定一个方向并且令它们的旋错密度为

$$\theta_{ij}(\boldsymbol{x}) = \Omega_i\delta_j(\boldsymbol{x};L) + \Omega_i'\delta_j(\boldsymbol{x};L') + \Omega_i''\delta_j(\boldsymbol{x};L''), \tag{9.92}$$

位错密度为

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = {}& \delta_i(\boldsymbol{x};L)\left\{b_j + [\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]_j\right\} + \delta_i(\boldsymbol{x};L')\left\{b_j' + [\Omega'\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0')]_j\right\} \\ & \delta_i(\boldsymbol{x};L')\left\{b_j'' + [\Omega''\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0'')]_j\right\}.\end{aligned} \tag{9.93}$$

于是守恒律 $\partial_i\theta_{ij} = 0$ 表明弗兰克矢量满足与电流的基尔霍夫定律相等价的关系式

$$\Omega_j + \Omega_i'' = \Omega_i'. \tag{9.94}$$

这可从以下这个等式直接得到：

$$\partial_i\delta_i(\boldsymbol{x};L) = \int \mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}\bar{x}_i}{\mathrm{d}s}\delta^{(3)}\left(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}(3)\right) = \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i) - \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_f),$$

其中，$\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{x}_f$ 为曲线 L 的起终点. 而另外，守恒律 $\partial_i\alpha_{ij} = \epsilon_{ikl}\theta_{kl}$ 则给出

$$b_i - [\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)]_i + b_i'' - \left[\boldsymbol{\Omega}''\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0'')\right]_i = b_i' - [\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_0')]_i\,. \tag{9.95}$$

如果取所有的转动轴在同一位置的话，则伯格斯矢量 b_i 也满足基尔霍夫类型的定律

$$b_i + b_i'' = b_i'. \tag{9.96}$$

但伯格斯矢量可以通过选去不同的转动轴而加以改变，如 L' 和 L'' 可以是对应于穿过 $\boldsymbol{x}_0'$ 和 $\boldsymbol{x}_0''$ 的不同转轴的纯的旋错线，而 L 则可以是一个穿过 $\boldsymbol{x}_0 = -\Omega'\times(\boldsymbol{x}_0'-\boldsymbol{x}_0'')$ 且终止与 L' 和 L'' 上的纯位错线. 方程 (9.94) 体现了不同选择间的等价性.

9.13 缺陷密度及不相容度

只要我们所涉及的是经典线性弹性问题，则包含在 α_{ij} 和 θ_{ij} 中的信息可以很高效地融合在一个对称张量中，这个张量称作**缺陷密度** $\eta_{ij}(\boldsymbol{x})$. 它定义为从式 (9.61) 的 Volterra 操作中所得的应力张量的双重旋量：

$$\eta_{ij}(\boldsymbol{x}) \equiv \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m u_{ln}(\boldsymbol{x}). \tag{9.97}$$

如果包围 V 的曲面 S 是开放的，则不相容度不为零，方程右边的应变张量 $u_{ln}(\boldsymbol{x})$ 须用塑性应变张量 $u^{\mathrm{p}}_{ln}(\boldsymbol{x})$ 替换掉.

为了得到它与 α_{ij} 和 θ_{ij} 的关系，我们取式 (9.43) 并将指标 i 和 j 缩并掉，得

$$\alpha_{ii} = 2\partial_i\omega_i. \tag{9.98}$$

利用这一结果，式 (9.52) 可写为

$$\epsilon_{ikl}\partial_k u_{ln} = \partial_n\omega_i - \left(-\alpha_{in} + \frac{1}{2}\delta_{in}\alpha_{kk}\right). \tag{9.99}$$

括号中的表达式首先由 Nye 引入，称作**扭曲** (contortion)[①]

$$K_{ni} \equiv -\alpha_{in} + \frac{1}{2}\delta_{in}\alpha_{kk}. \tag{9.100}$$

它的倒逆关系为

$$\alpha_{ij} = -K_{ji} + \delta_{ij}K_{kk}. \tag{9.101}$$

将式 (9.97) 乘以 $\epsilon_{jmn}\partial_m$，利用式 (9.44) 我们得

$$\begin{aligned}\eta_{ij} &= \epsilon_{jmn}\epsilon_{ikl}\partial_m\partial_k u_{ln} = \epsilon_{jmn}\partial_m\partial_n\omega_i - \epsilon_{jmn}\partial_m K_{ni}\\ &= \theta_{ij} - \epsilon_{jmn}\partial_m K_{ni}.\end{aligned} \tag{9.102}$$

尽管不是很明显，但这个最终的表达式对于 ij 是对称的. 其实，如果将它同反对称张量 ϵ_{lij} 进行缩并，就会给出 $\epsilon_{lij}\theta_{ij}\partial_l K_{ii} - \partial_i K_{li} = \epsilon_{lij}\theta_{ij}\theta_{ij} + \partial_i\alpha_{il}$，而这根据位错密度的守恒律 (9.49) 是等于零的.

对于分解式 (9.102)，还存在另外一种形式. 将等式 (1A.17) 应用于 $\partial_m\alpha_{qn}$ 就得到

$$\epsilon_{njm}\partial_m\left(\alpha_{in} - \frac{1}{2}\delta_{in}\alpha_{kk}\right) = -\frac{1}{2}\partial_m\left[\epsilon_{mjn}\alpha_{in} + (i\leftrightarrow j) + \epsilon_{ijn}\alpha_{mn}\right]. \tag{9.103}$$

① 利用上节所引入的塑性量，K_{ij} 地塑性部分为 $K^{\mathrm{p}}_{ij} = -\epsilon_{ikl}\partial_k\beta^{\mathrm{p}}_{li} + \dfrac{1}{2}\delta_{ij}\epsilon_{nkl}\partial_k\beta^{\mathrm{p}}_{ln} + \phi^{\mathrm{p}}_{ij}$.

因此

$$\eta_{ij} = \theta_{ij} - \frac{1}{2}\partial_m \left[\epsilon_{min}\alpha_{jn} + (i \leftrightarrow j) - \epsilon_{ijn}\alpha_{mn}\right]. \tag{9.104}$$

这种分解形式在以后讲述广义相对论时在式 (17.156) 和式 (18.53) 中用 Belinfante 法构造对称的能动张量时会碰到.

这种双旋度操作其实是从对矢量取旋度扩展到对称张量场的一个很有用的推广. 我们知道一个矢量 $\boldsymbol{E}$ 的旋度为零表明 $\boldsymbol{E}$ 可以写为某个满足可积条件 $(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ 的标量势函数 $\phi(\boldsymbol{x})$ 的梯度：

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow E_i = \partial_i\phi(\boldsymbol{x}). \tag{9.105}$$

双旋度操作则意味着这个对称张量具有类似的特性，这首先由黎曼 (Riemann) 和克里斯托夫 (Christoffel) 在一个多世纪以前给出. 如果一个对称张量场的双旋度在空间的任何地方都为零，则这个场就可以写为某个全空间可积的位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ [即它满足式 (9.34)] 的应变张量. 我们可以将这个论断简要地写为

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m u_{ln}(\boldsymbol{x}) = 0 \;\Rightarrow\; u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right). \tag{9.106}$$

如果 $u_{ln}(\boldsymbol{x})$ 的双旋度为零，我们就说 $u_{ln}(\boldsymbol{x})$ 与位移场是**相容的**. 而不为零的双旋度

$$(\text{inc}\ u)_{ij} \equiv \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m u_{ln} \tag{9.107}$$

就给出该位移场的**不相容度**. 对于式 (9.106) 的证明可由关于矢量场的式 (9.105) 得出：我们看到，对于任意一个无穷远为零且满足可积条件 $(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i)\,V_k(\boldsymbol{x}) = 0$ 的矢量场 $V_k(\boldsymbol{x})$，都可以分解成一个纵向部分和一个横向部分，即一个无旋梯度部分和一个无源的旋度部分

$$V_i = \partial_i\varphi + \epsilon_{ijk}\partial_j A_k, \tag{9.108}$$

且这两个场 φ 和 A_k 都是可积的. 很明显，

$$\varphi = \frac{1}{\partial^2}\partial_i V_i, \tag{9.109}$$

$$A_k = -\frac{1}{\partial^2}\epsilon_{klm}\partial_l V_m + \partial_k C, \tag{9.110}$$

其中，$1/\partial^2$ 为库仑格林函数 $(1/\partial^2)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ 的简写，它通过下述通常的方式作用在任一函数上：

$$-\frac{1}{\partial^2}f(\boldsymbol{x}) \equiv \int \mathrm{d}^3x \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}f(\boldsymbol{x}'). \tag{9.111}$$

注意，由式 (9.110) 所确定的 A_k 只相差一个任意的纯的梯度项 $\partial_k C$.

重复运用此式，我们发现对于一个任意的不必是对称的张量 u_{il}，有

$$u_{il}=\partial_i\varphi'_l+\epsilon_{ijk}\partial_j A'_{kl}=\partial_i\varphi'_l+\epsilon_{ijk}\partial_j\left(\partial_l\varphi_k+\epsilon_{lmn}\partial_m A_{kn}\right). \tag{9.112}$$

令

$$\varphi''_i\equiv\epsilon_{ijk}\partial_j\varphi_k, \tag{9.113}$$

这可重新写为

$$u_{il}=\partial_i\varphi'_l+\partial_l\varphi''_i+\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\partial_j\partial_m A_{kn}. \tag{9.114}$$

而对于对称张量 u_{il}，我们可以将此结果对称化并将其分解为

$$u_{il}=\partial_i u_j+\partial_j u_i+\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\partial_j\partial_m A^S_{kn}, \tag{9.115}$$

其中

$$u_i=\frac{1}{2}\left(\varphi'_i+\varphi''_i\right), \tag{9.116}$$

而 A^S_{kn} 为 A_{kn} 的对称部分，且这两个场都是可积的. 式 (9.115) 中的第一项的不相容度为零，而对第二项的两个指标分别取散度的话均为零.

在一般情况下，即没有对称性的情形，我们可以将式 (9.109) 和式 (9.110) 用两次，并可确定出场量 φ'_l、φ''_i 和 A_{kn} 为

$$\varphi'_l=\frac{1}{\partial^2}\partial_k u_{kl}, \tag{9.117}$$

$$A'_{kl}=-\frac{1}{\partial^2}\epsilon_{kpq}\partial_p u_{ql}+\partial_k C_l, \tag{9.118}$$

$$\varphi_k=-\frac{1}{\partial^4}\epsilon_{kpq}\partial_p\partial_l u_{ql}+\frac{1}{\partial^2}\partial_k\partial_l C_l, \tag{9.119}$$

$$A_{kn}=-\frac{1}{\partial^4}\epsilon_{klm}\epsilon_{npq}u_{mq}+\partial_k\left(-\frac{1}{\partial^2}\epsilon_{njl}\partial_j C_l\right)+\partial_n D_k, \tag{9.120}$$

于是由式 (9.112)，有

$$\varphi''_i=-\frac{1}{\partial^4}\partial_i\partial_p\partial_q u_{pq}+\frac{1}{\partial^2}\partial_l u_{il}. \tag{9.121}$$

将此重新代入分解式 (9.114)，我们就得到等式

$$\begin{aligned}u_{il}=&\frac{1}{\partial^2}\left(\partial_i\partial_k u_{kl}+\partial_l\partial_k u_{ik}\right)-\frac{1}{\partial^4}\partial_i\partial_l\left(\partial_p\partial_q u_{pq}\right)\\&+\frac{1}{\partial^4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\partial_j\partial_m\left(\epsilon_{kpr}\epsilon_{nqs}\partial_p\partial_q u_{rs}\right),\end{aligned} \tag{9.122}$$

此式对于任何二秩张量都成立. 这可用 ϵ 张量进行缩并来加以证明.

虽然式 (9.105) 和式 (9.106) 中关于矢量和张量的论述非常相似，我们必须意识到两者之间有着重要的差别. 对于一个无旋矢量场，相应的势函数是可以通过下式唯一地确定的 (最多相差一个边界条件)：

$$\varphi = \frac{1}{\partial^2}\partial_i E_i. \tag{9.123}$$

然而，对于相容张量场 u_{il}，这点不再成立. 原因在于分解式 (9.114) 中的函数 φ_l' 和 φ_i'' 的不唯一性. 它们只能被确定至以任意局域旋转场 $\omega_i(\boldsymbol{x})$ 为共有模的函数. 为了说明这点，我们做如下代换：

$$\partial_i\varphi_l'(\boldsymbol{x}) \to \partial_i\varphi_l'(\boldsymbol{x}) + \epsilon_{ilq}\omega_q(\boldsymbol{x}), \tag{9.124}$$

$$\partial_l\varphi_i''(\boldsymbol{x}) \to \partial_l\varphi_i''(\boldsymbol{x}) + \epsilon_{liq}\omega_q(\boldsymbol{x}), \tag{9.125}$$

发现式 (9.114) 仍然成立. 而式 (9.116) 中的场只不过是个**特例**，相应的位移场的应变张量恰好等于给定的 u_{kl}：

$$u_{kl}^0 = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_l^0 + \partial_l u_k^0\right) = u_{kl}. \tag{9.126}$$

然而，这个位移场很可能并不是晶体中真正的位移场 $u_l(\boldsymbol{x})$，后者也恰好满足

$$\frac{1}{2}\left(\partial_k u_l + \partial_l u_k\right) = u_{kl}. \tag{9.127}$$

为了得到后面这个位移场，我们需要关于旋转场的额外信息

$$\omega_{kl} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_l - \partial_l u_k\right). \tag{9.128}$$

因此，我们必须**同时**知道 $u_{kl}(\boldsymbol{x})$ 和 $\omega_{kl}(\boldsymbol{x})$ 以计算

$$\partial_k u_l(\boldsymbol{x}) = u_{kl}(\boldsymbol{x}) + \omega_{kl}(\boldsymbol{x}) \tag{9.129}$$

并求解此关于 $u_l(\boldsymbol{x})$ 的方程.

为了可以应用以上所示，我们还必须确保 $\omega_i = \dfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}$ 可以写为一个位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 的旋度. 当

$$\partial_i\omega_i = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j u_k = 0 \tag{9.130}$$

这确实是可能的，而这意味着 [参看式 (9.98)]

$$\alpha_{ii}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.131}$$

在以后的讨论中我们会碰到 u_{kl} 和 $\partial_i\omega_j$ 都给定的情形. 为了从后面这个量得出 ω_i，我们必须肯定 ω_i 是一个可积场，而这可通过下面这个限定式加以确保：

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l\omega_j = 0. \tag{9.132}$$

于是，我们就可给出如下重要结论：假定一个晶体受到一个应变 strain $u_{kl}(\boldsymbol{x})$ 以及一个转动形变 $\omega_{kl}(\boldsymbol{x})$. 当且仅当这个晶体的缺陷密度 $\eta_{ij}(\boldsymbol{x})$ 为零、旋错密度 $\theta_{ij}(\boldsymbol{x})$ 为零且 $\alpha_{ii} = 0$，即

$$\eta_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \theta_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \alpha_{ii}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{9.133}$$

才可存在一个相应的单值的位移场 $u_l(\boldsymbol{x})$. 式 (9.104) 中的关系式表明，上述情况只可能在任意两个密度为零的情况下才成立，比如

$$\eta_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{9.134}$$

或者

$$\theta_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \alpha_{ij}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{9.135}$$

注意，如果式 (9.104) 中的 θ_{ij} 和 α_{ij} 相互抵消的话，则我们可以在一个给定的弹性形变的晶体中引入非零的旋转和平移缺陷. 此时弹性形变依然可以保持不变， 但局域旋转场却有可能被改变，尤其是，它可能不再是可积的.

文献与注记

[1] 最初关于位错的观测和理论分析的工作请参见：
O. Mügge, Neues Jahrb. Min. **13** (1883);
A. Ewing and W. Rosenhain, Phil. Trans. Roy. Soc. A **193**, 353 (1899);
J. Frenkel, Z. Phys. **37**, 572 (1926);
E. Orowan, Z. Phys. **89**, 605, 634 (1934);
M. Polany, Z. Phys. **89**, 660 (1934);
G.I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A **145**, 362 (1934);
J.M. Burgers, Proc. Roy. Soc. A **145**, 362 (1934);
F. Kroupa and P.B. Price, Phil. Mag. **6**, 234 (1961);
W.T. Read, *Disclinations in Crystals*, McGraw-Hill, New York, 1953;
F.C. Frank and W.T. Read, Phys. Rev. **79**, 722 (1950);
B.A. Bilby, R. Bullough, and E. Smith, Proc. Roy. Soc. A **231**, 263 (1955).
Disclination lines were described by
F.C. Frank, Disc. Farad. Soc. **25**, 1 (1958).
更多的细节请参阅如下书籍：

关于 Weingarten 定理的推导，见

F.R.N. Nabarro, *Theory of Dislocations*, Clarendon Press, Oxford, 1967;

C. Truesdell and R. Toupin, in *Handbook of Physics*, Vol III(1), ed. S. Flügge, Springer, Berlin 1960.

为了计算弹性场构型，塑性应变张量在下列文献中得到了充分的应用：

J.D. Eshelby, Brit. J. Appl. Phys. **17**, 1131 (1966)

塑性形变由下列文献引入：

T. Mura, Phil. Mag. **8**, 843 (1963), Arch. Mech. **24**, 449 (1972), Phys. Stat. Sol. **10**, 447 (1965), **11**, 683 (1965).

还可参阅他的著作*Micromechanics of Defects in Solids*, Noordhoof, Amsterdam, 1987.

下面的是一个非常好的综述：

E. Kröner, Les Houches lectures, publ. in *The Physics of Defects*, eds. R. Balian et al., North-Holland, Amsterdam, 1981, p. 264.

更进一步的文献可参阅：

J.P. Friedel, *Disclinations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

也可参看他 1980 Les Houches 讲义, op. cit.;

M. Kléman, *The General Theory of Disclinations*, in *Dislocations in Solids*, ed. F.R.N. Nabarro, North-Holland, Amsterdam, 1980;

W. Bollmann, *Crystal Defects and Crystalline Interfaces*, Springer, Berlin, 1970.

B. Henderson, *Defects in Crystalline Solids*, Edward Arnold, London, 1972.

[2] 这里我们主要运用了下面著作中的理论：

H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, World Scientific, Singapore, 1989, Vol. II, Part IV, *Differential Geometry of Defects and Gravity with Torsion*, p. 1432 (`kl/b2`).

[3] 关于涡旋线的细致讨论请见：

H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, World Scientific, Singapore, 1989, Vol. I, *Superflow and Vortex Lines*, pp. 1–742 (`kl/b2`).

第 10 章　缺陷的熔解

Women love us for our defects. If we have enough of them,
they will forgive us everything, even our intellects.

Oscar Wilde (1854~1900)

在第 5 章中我们已经看到，液氦超流和超导体中的相变可以理解为是在临界温度上涡旋线激增的一个结果. 在这里，我们将讨论一种类似的机制，即位错线和旋错线的激增会导致晶体的熔解.

10.1　比　　热

固体中的比热有多个相似的定义，包括 λ 变换的比热. 在低温时它的起步行为正比于 T^3 (图 10.1)，这是系统存在无质量激发的一种典型标志. 在固体中，这种无质量激发就是纵声子和横声子. 它们其实就是晶体基态平移对称性自发破缺而引发的戈德斯通摸. 当温度升高时，比热渐渐过渡到 $6 \times k_{\mathrm{B}}N/2$，这个值正是经典统计物理中**杜隆–帕蒂定律**所给出的. 我们知道，这个定律给每个简谐自由度都分配了一个比热 $k_{\mathrm{B}}/2$. 在固体中，每个粒子的自由度包括三个位置自由度以及三个运动自由度.

这两个状态之间的相变位于**德拜温度** Θ_{D}，它由系统中纵、横两个声速 $c_{\mathrm{s}}^{\mathrm{L}}$ 和 $c_{\mathrm{s}}^{\mathrm{T}}$ 以及粒子数密度 $n \equiv N/V$ 决定. 对于每个晶胞只有一个原子且三个声速均相同的情况，相应的德拜温度为

$$\Theta_{\mathrm{D}} = 2\pi \frac{\hbar c_{\mathrm{s}}}{k_{\mathrm{B}}} \left(\frac{2n}{4\pi} \right)^{1/3}. \tag{10.1}$$

系统的内能由以下普适德拜函数给出

$$D(z) \equiv \frac{3}{z^3} \int_0^z \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}, \tag{10.2}$$

内能为

$$U = 3Nk_{\mathrm{B}}TD(\Theta_{\mathrm{D}}/T). \tag{10.3}$$

而比热可以如下计算而得：

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk_{\mathrm{B}}T \left[D(\Theta_{\mathrm{D}}/T) - (\Theta_{\mathrm{D}}/T)D'(\Theta_{\mathrm{D}}/T) \right]. \tag{10.4}$$

利用下述极限行为：

$$D(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{5z^3} - 3e^{-z} + \cdots, & \text{for } z \gg 1, \\ 1 - \dfrac{3}{8}z^2 + \cdots, & \text{for } z \ll 1, \end{cases} \tag{10.5}$$

我们发现

$$C = 3Nk_{\mathrm{B}} \begin{cases} \dfrac{4\pi^4}{5}\left(\dfrac{T}{\Theta_{\mathrm{D}}}\right)^3, & \text{for } T \ll \Theta_{\mathrm{D}}, \\ 1, & \text{for } T \gg \Theta_{\mathrm{D}}. \end{cases} \tag{10.6}$$

这个结果与如图 10.1 所示实验结果吻合得很好.

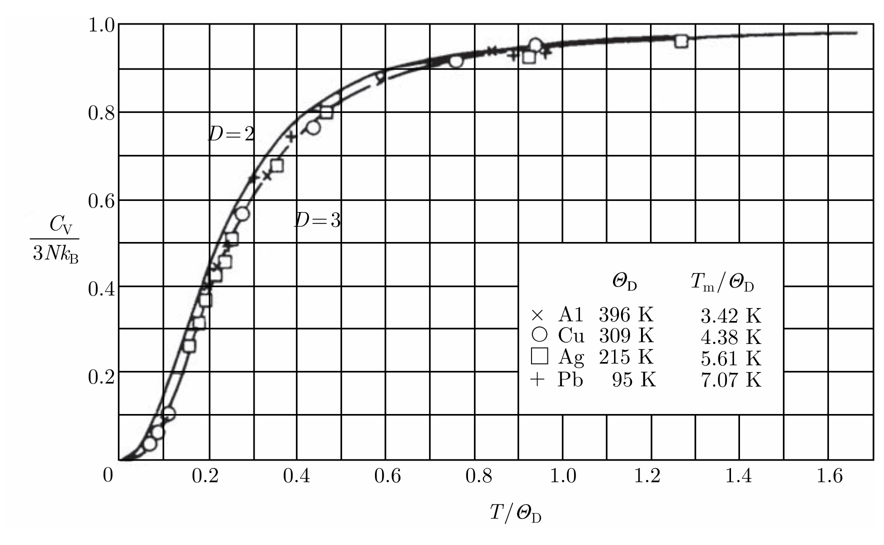


图 10.1 不同固体的比热. 如果将数据按 T/Θ_{D} 绘出来的话，这些数据会落在同一条普适的曲线上，其中 Θ_{D} 为式 (10.1) 中的德拜温度. 图中的列表给出了相应的德拜温度 Θ_{D} 以及熔解温度 T_{m}

10.2 含缺陷的固体的弹性能

在固体中，长波形变的弹性能一般可用物质的位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 表述为

$$E = \int \mathrm{d}^3x \left[\mu u_{ij}^2(\boldsymbol{x}) + \frac{\lambda}{2}u_{ii}^2(\boldsymbol{x})\right], \tag{10.7}$$

其中，μ 为剪切模量，λ 为 Lamé 常数，而

$$u_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[\partial_i u_j(\boldsymbol{x}) + \partial_j u_j(\boldsymbol{x})] \tag{10.8}$$

为式 (9.69) 中定义的应变张量. 当波长趋于无穷大时相应的弹性能趋于零，这是因为在这个极限下 $u_i(\boldsymbol{x})$ 退化为一个纯的整体平动，而系统的能量在平移变换下是不变的. 结晶的过程会导致系统平移对称性的自发破缺. 而弹性形变就描述了该对称破缺导致的南部 - 戈德斯通模.

正如前一章中所讨论的，一个晶体物质总含有缺陷，而这使得位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 变为多值函数. 因此，式 (10.8) 中的弹性能量的表示式其实并不正确. 弹性能必须要依赖于式 (9.88) 中缺陷规范不变的应变 u_{ij}^{inv}. 因此，相对于式 (10.8)，正确的弹性能的表示式应为

$$\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3 x \left[\mu(u_{ij} - u_{ij}^{\mathrm{p}})^2 + \frac{\lambda}{2}(u_{ii} - u_{ii}^{\mathrm{p}})^2\right], \tag{10.9}$$

其中，u_{ij}^{p} 为式 (9.71) 中的**塑性应变张量**，它描述了晶体中的缺陷.

上述能量为晶体晶格能量在连续统极限下的表达式. 如果我们想要研究弹性涨落和缺陷涨落的统计力学的话，我们须将式 (10.9) 中的能量离散化，为了数学上的简便，考虑一个晶格常数为 2π 的简单立方晶格. 于是对于任何整数场 $N_i(\boldsymbol{x})$，$u_i(\boldsymbol{x})$ 和 $u_i(\boldsymbol{x}) + 2\pi N_i(\boldsymbol{x})$ 所对应的能量是无法区分的，这其实对应着格点的交换排列.

假如我们只将位错线包含进来的话，相应的塑性应变张量 u_{ij}^{p} 将含有三种类型的曲面，当穿越它们的时候位移场 $u_i(\boldsymbol{x})$ 会有一个 2π 的跃变，每一类曲面对应一个晶格方向. 它们由三个伯格斯矢量 $\boldsymbol{b}^{(1),(2),(3)}$ 来表征，于是式 (9.70) 中的塑性形变就具有以下简单的形式：

$$\beta_{il}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}) = \delta_i(\boldsymbol{x}; S) b_l, \tag{10.10}$$

其中，b_l 为三个伯格斯矢量 $\boldsymbol{b}^{(i)}$ 中任意一个的分量. 这个无关紧要的曲面 S 为位错线的 Volterra 曲面. 式 (10.10) 的离散形式为

$$\beta_{ij}^{\mathrm{p}} = 2\pi n_i(\boldsymbol{x}) b_j, \tag{10.11}$$

其中，$n_i(\boldsymbol{x})$ 为整数函数. $u_{ij}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x})$ 的格点形式当然也就为 [参看式 (9.71)]

$$u_{ij}^{\mathrm{p}} = 2\pi[n_i(\boldsymbol{x}) b_j + n_j(\boldsymbol{x}) b_j]. \tag{10.12}$$

类似于方程 (5.186) 中的超流，我们可以定义以下的期待值：

$$\mathcal{O}_i \equiv \langle O_i(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \mathrm{e}^{u_i(\boldsymbol{x})} \rangle \tag{10.13}$$

为系统的序参数. 在结晶相中它不为零，因为此种情形中晶格相位 $\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})$ 只在零点附近震荡；而在熔解相中，由于 $\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})$ 地涨落扩展至整个晶格，相应的序参量就为零.

现在，通过泛函积分以及对所有的 Volterra 曲面求和，我们就能计算由能量 (10.9) 支配的晶格震荡的配分函数

$$Z \equiv \mathrm{e}^{-\beta F} = \int \mathcal{D}\boldsymbol{u} \sum_{S} \mathrm{e}^{-\varepsilon}, \tag{10.14}$$

其中，$\beta \equiv 1/k_{\mathrm{B}}T$. 这可以借助低温和高温近似来近似求解[1]，或者更精确些采用蒙特卡罗模拟的方法. 图 10.2 给出了求解得到的熔解相变点附近的比热.

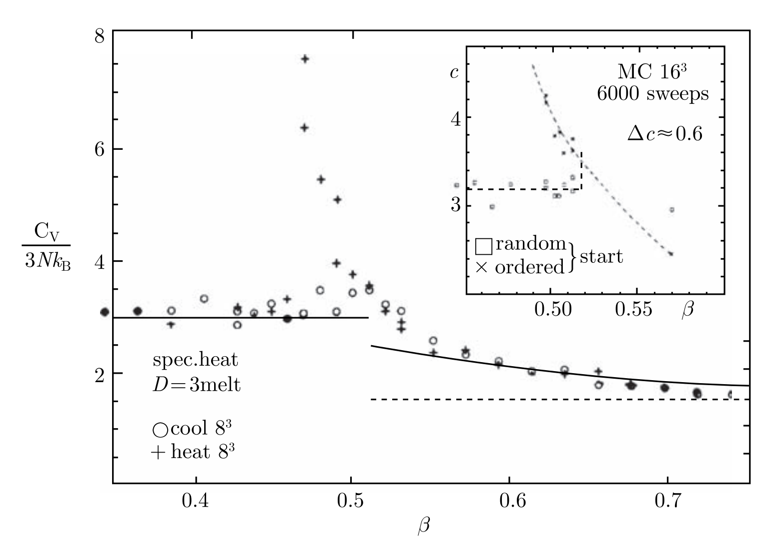


图 10.2　(10.14) 中熔解模型的比热. 实线得自于最低阶高温–低温–展开. 符号 + 和 ∘ 表示蒙特卡罗模拟的结果. 插图清晰地给出了在相变温度上比热的跃变. 更多的细节请参阅专著 [1] 中的第 12 章

线缺陷对于晶体统计力学的影响可以通过第 5.1.7 节中的方法将其能量变换到它的共轭形式 (5.89) 来加以展现. 在我们这里，共轭变量为应力张量 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})$，它将取代式 (5.89) 中超流 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ 的位置.

为了简单起见，我们忽略掉正比于 Lamè 常数 λ 的项. 于是我们就可以很容易地看到方程 (10.9) 中的能量 $\beta\mathcal{E}$ 换为

$$\beta\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{4\mu}\sigma_{ij}^2 + \mathrm{i}\sigma_{ij}(u_{ij} - u_{ij}^{\mathrm{p}})\right], \tag{10.15}$$

并且在泛函积分测度中增加一个额外的关于应力张量 σ_{ij} 的积分. 其实，通过对这个积分进行二次型配平，我们就能重新得到式 (10.9).

当对位移场进行积分后，我们就得到了类似于式 (5.98) 中守恒律的表达式：

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0. \tag{10.16}$$

这就使得我们可以将 σ_{ij} 表示为某个应力规范场 χ_{ij} 的双旋度形式：

$$\sigma_{ij}=\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m\chi_{ln}, \tag{10.17}$$

利用这个表达式，我们就可将式 (10.15) 中的能量写为

$$\beta\mathcal{E}=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{4\mu}(\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m\chi_{ln})^2-\mathrm{i}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m\chi_{ln}u_{ij}^{\mathrm{p}}\right]. \tag{10.18}$$

同式 (5.117) 中的超流能量一样，这个作用量是双规范不变的. 伴随着曲面由 S 移动到 S'，有一个缺陷规范变换

$$u_{ij}^{\mathrm{p}}\to u_{ij}^{\mathrm{p}}+\partial_i\delta(\boldsymbol{x};V)b_j+\partial_j\delta(\boldsymbol{x};V)b_i, \tag{10.19}$$

其中，V 为曲面 S 变到 S' 的过程中扫过的区域. 如果同时 u_i 也变为

$$u_i\to u_i+2\pi\delta(\boldsymbol{x},V) \tag{10.20}$$

的话，则在此规范变换下上述作用量是不变的. 而且，显然它在应力规范变换

$$\chi_{ij}\to\chi_{ij}+\partial_i\Lambda_j+\partial_j\Lambda_i \tag{10.21}$$

下同样也是不变的.

对能量 (10.18) 进行分部积分会给出如下形式 [请与式 (5.117) 进行对照]：

$$\beta\mathcal{E}=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{4\mu}(\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m\chi_{ln})^2-\mathrm{i}\chi_{ij}\eta_{ij}\right], \tag{10.22}$$

其中，η_{ij} 为式 (9.97) 中定义的缺陷张量 [类比于式 (4.92) 中的磁流或式 (5.31) 中的涡旋密度]. 注意式 (10.8) 中的应变张量 u_{ij} 的不相容度为零，因此只有 u_{ij}^{p} 对缺陷张量 η_{ij} 有所贡献.

现在来对式 (10.17) 中应力场的表达式作一些简化. 首先利用等式 (1A.16) 可得

$$\sigma_{ij}\ =\ -(\partial^2\chi_{ij}+\partial_i\partial_j\chi_k{}^k-\partial_i\partial_k\chi_i{}^k-\partial_j\partial_k\chi_i{}^k)+\eta_{ij}(\partial^2\chi_k{}^k-\partial_k\partial_l\chi^{kl}). \tag{10.23}$$

然后引入修正的规范场

$$\phi_{ij}\equiv\chi_{ij}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\chi_{kk}, \tag{10.24}$$

最后，我们取所谓的**希尔伯特规范**，即

$$\partial_i\phi_{ij}=0. \tag{10.25}$$

于是，应力场就变为

$$\sigma_{ij} = -\partial^2 \phi_{ij}, \tag{10.26}$$

且式 (10.22) 中的能量取如下形式：

$$\beta\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{4\mu}(\partial^2\phi_{ij})^2 - \mathrm{i}\phi_{ij}(\eta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\eta_{kk})\right]. \tag{10.27}$$

对场 ϕ_{ij} 求极值就给出任意分布下缺陷间的相互作用 [类比于式 (4.93) 和式 (5.85)]：

$$\beta\mathcal{E} = \mu \int \mathrm{d}^3x \, (\eta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\eta_{kk}) \, \frac{1}{(\partial^2)^2} (\eta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\eta_{kk}). \tag{10.28}$$

将式 (9.104) 中 η_{ij} 分解为位错密度和旋错密度的表达式代入，我们发现位错线之间具有毕奥–萨伐尔类型的相互作用，即平行线元间具有 $1/r$ 型的斥力. 而另一方面，旋错线间却以一个线性增长势相互排斥. 关于此方面更多的细节请参阅文献 [1].

在相互作用 (10.28) 中，第 9.4 节中所讨论的位错和旋错的相互关系非常全面. 位错可以由一对相邻的旋错来替换掉，而旋错则可由一串位错来代替. 因此，含有能量 (10.28) 的配分函数可以只用位错来给出. 否则的话它会由于重复计数而发散. 缺陷间的这种互换性其实是一种规范自由，而这必须在配分函数中固定下来.

然而，在一个真实的晶体中，这两种缺陷其实是可区分的，为此，我们必须将弹性能 (10.9) 扩展至位移场的高阶导数项. 一个最简单的包含不变弯扭 (9.90) 的扩展能量为[1, 2]

$$\beta\mathcal{E} = \mu \int \mathrm{d}^3x \left[\left(u_{ij} - u^{\mathrm{p}}_{ij}\right)^2 + \ell^2 \left(\partial_i\omega_j - \kappa^{\mathrm{p}}_{ij}\right)^2\right], \tag{10.29}$$

其中，参数 ℓ 表示晶体转动刚性尺度.

类似于我们之前处理式 (10.9) 中能量的方法，我们将能量 (10.29) 重新写为式 (10.15) 那样的正则表示形式. 除应力场 σ_{ij} 外，现在还多了一个转动应力场 τ_{ij}，并且我们可将缺陷的弹性作用量写为[1, 2]

$$\begin{aligned}\beta\mathcal{E} = \int \mathrm{d}^3x \Big[&\frac{1}{4\mu}\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}\right)^2 + \frac{1}{8\mu\ell^2}\tau_{ij}^2 \\ &+ \mathrm{i}\sigma_{ij}\left(\partial_i u_j - \epsilon_{ijk}\omega_k - \beta^{\mathrm{p}}_{ij}\right) + \mathrm{i}\tau_{ij}\left(\partial_i\omega_j - \phi^{\mathrm{p}}_{ij}\right)\Big].\end{aligned} \tag{10.30}$$

这里我们已引入了一个独立变量 ω_i. 系统的配分函数可通过对玻尔兹曼因子 $\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{E}}$ 进行关于 σ_{ij}、τ_{ij}、u_i 及 ω_j 的泛函积分并对所有塑性场中的跃变曲面 S 进行求和而得到. 对 σ_{ij} 的反对称部分的泛函积分可知独立变量 ω_i 须满足条件 $\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_j u_k + \beta^{\mathrm{p}}_{ij})$. 将此重新代入式 (10.30) 并将剩余的 σ_{ij} 和 τ_{ij} 积掉，我们就又得到了式 (10.29) 中的最初的表达式.

或者，我们可以从配分函数中将 ω_j 和 u_i 积掉. 这就给出了如下守恒律：

$$\partial_i\sigma_{ij}=0,\quad \partial_i\tau_{ij}=-\epsilon_{jkl}\sigma_{kl}, \tag{10.31}$$

这是式 (10.16) 的推广. 上述守恒关系式其实分别是式 (9.48) 和式 (9.49) 中旋错和位错守恒律的对偶式.

上述守恒律使得我们可以引入应力规范场 A_{ij} 和 h_{ij}，并且

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=\epsilon_{ikl}\partial_k A_{lj},\\ \tau_{ij}&=\epsilon_{ikl}\partial_k h_{lj}+\delta_{ij}A_{ll}-A_{ji}.\end{aligned} \tag{10.32}$$

这样，我们就可将能量 (10.30) 重新写为

$$\beta\mathcal{E}=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{4\mu}\left(\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)^2+\frac{1}{8\mu l^2}{\tau_{ij}}^2+A_{ij}\alpha_{ij}+h_{ij}\theta_{ij}\right]. \tag{10.33}$$

由式 (10.33) 可以看到，应力规范场局域地与缺陷密度相耦合，而缺陷密度沿 Volterra 曲面的边界是奇异的. 在长度尺度 ℓ 趋于零的极限下，τ_{ij} 将恒等于零，于是式 (10.32) 就使得我们可以用 h_{ij} 来表示 A_{ij}，这个量可看作式 (10.17) 中的应力规范场 χ_{ij}. 这样能量 (10.30) 就约化为式 (10.22).

文献 [2] 预言，缺陷系统或具有单个一级相变，或接连有两个连续熔解相变，而这依赖于转动刚度的长度参量 ℓ，第一种情形发生在 ℓ 较小的情况. 在第一个相变中，位错线激增，破坏了体系的平移序. 而在第二个相变中旋错线激增而破坏了系统的转动序 (图 10.3 和图 10.4).

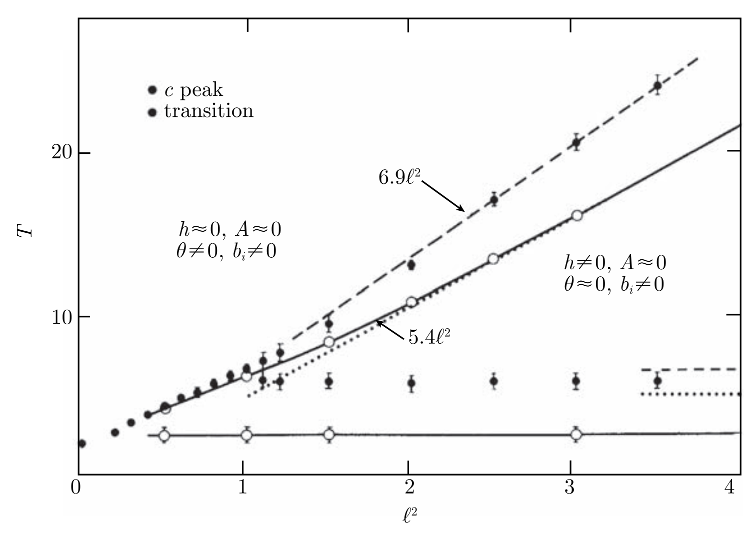


图 10.3　二维熔解的 T-ℓ 平面相图. 理论曲线来自于文献 [2]，蒙特卡罗数据来自于文献 [3]. 相关详细讨论请参阅专著 [1]

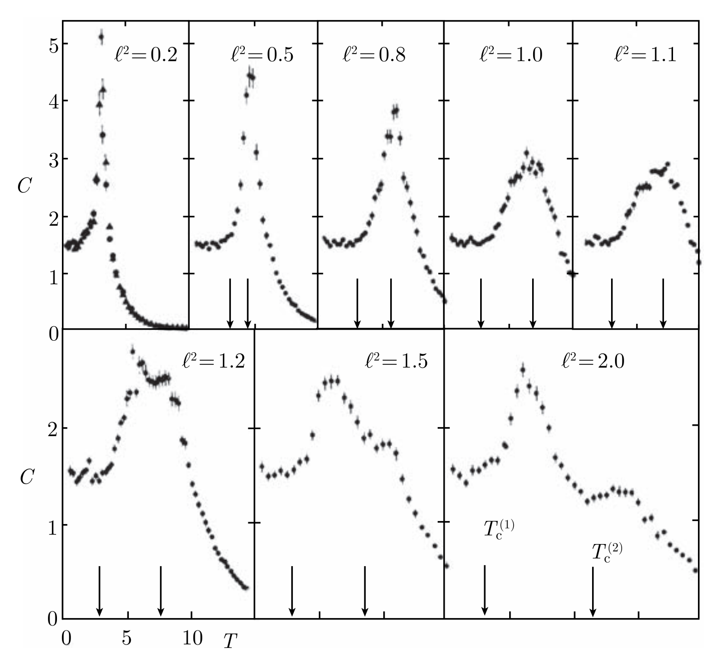


图 10.4　在二维系统中，当增大此缺陷模型转动刚度的长度标度 ℓ 时一级熔解相变分裂为两个先后发生的 Kosterlitz-Thouless 相变. 图中的蒙特卡洛数据取自文献 [3]. 参看专著 [1].

对于二维系统的熔解，很早以前就有人推测[4~7] 存在两个接连的连续相变，且这两个相变应该是 Kosterlitz-Thouless 类型的. 然而，为描述此行为而构造的最简单的格点缺陷模型却显示只存在单个的一级相变[8]. 直到文献 [2] 引入转动刚度 ℓ 后才发现有可能将此一级相变分解为两个相邻的 KT 相变. 图 10.3 和图 10.4 给出了对于 ℓ 的依赖关系.

文献与注记

[1] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II: *Stresses and Defects, Differential Geometry, Crystal Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`).

[2] H. Kleinert, Phys. Lett. A **130**, 443 (1988) (`kl/174`).

[3] W. Janke and H. Kleinert, Phys. Rev. Lett. **61**, 2344 (1988) (`kl/179`).

[4] D. Nelson, Phys. Rev. B **18**, 2318 (1978).

[5] D. Nelson and B.I. Halperin, Phys. Rev. B **19**, 2457 (1979).

[6] A.P. Young, ibid., 1855 (1979).

[7] D. Nelson, Phys. Rev. B **26**, 269 (1982).

[8] W. Janke and H. Kleinert, Phys. Lett. A **105**, 134 (1984); (`kl/120`); Phys. Lett. A **114**, 255 (1986) (`kl/135`).

第 11 章　曲线坐标系中的相对论力学

In a true zero-defects approach, there are no unimportant items.

Philip Crosby (1926~2001)

导致爱因斯坦用弯曲时空来阐述他的引力理论的基本思想来自于伽利略 [Galileo Galilei (1564~1642)] 那个著名的论断，即在没有空气阻力的情况下，所有的物体将以同样的速度下落. 这一论断在一个比较高的精度下由惠更斯 [C. Huygens (1629~1695)] 加以了验证. 1889 年，R. Eötvös 找到了一种简单的可以完全剔除空气摩擦力的方法 [1]. 借此方法，他发现木头和铂的下落速度的相对差别只有 $1/10^9$. 这表明，在牛顿运动方程

$$m\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t) \tag{11.1}$$

中决定物体在力 $\boldsymbol{f}(t)$ 作用下加速度的**惯性质量** m，即出现在运动方程 (1.2) 左边的质量，与方程 (1.2) 右边的**引力质量**的差别不会大于上面提到的那个极小的量.

11.1　等 效 原 理

爱因斯坦认为，Eötvös 的实验结果充分显示出惯性质量和引力质量是**严格**等价的. 由此，他判断，引力场作用下的所有质点的运动都可以完全用几何的语言来加以描述. 导致他得出这一结论的思想实验是想象一个巨大的摩天大楼中的一部自由下落的电梯. 由于电梯内的所有物体都以同样的速度下落，它们将处于失重的状态. 因此，对于处于这个电梯舱内的观测者而言，地球的引力消失了. 于是，爱因斯坦推断，引力是可以通过加速来加以消除的. 这就是**等效原理**.

数学上看来，这个电梯仓就是一个加速坐标系. 假如我们将起初引力场中的时空坐标记为 x^μ 的话，则这个小电梯仓中的坐标可由函数 $x^\mu(x^a)$ 给出. 因此，等效原理表明，一个引力场作用下的粒子的运动行为就等同于新的坐标系 $x^a(x^\mu)$ 下在电梯中没有引力的情况下粒子的运动.

对此原理，我们还有另一种相反的表述. 给定一个惯性系 x^a，相对于该惯性系有一个加速运动的小仓体，这个仓体具有坐标系 x^μ. 如此，我们就可在空间一点上模拟出一个引力场来，因为在坐标系 x^μ 中，粒子的运动看起来就像是在一个引力场中一样.

这就表明，存在一种简单的方法可以用来寻找引力场中的质点运动方程：我们只需简单地将已知的惯性系中的运动方程变换到任意一个曲线坐标系 x^μ 中即可. 当在一般坐标系 x^μ 中书写时，平直时空中的方程在引力场存在的情形下也同样有效.

在阐述等效原理时，我们必须认识到，通过坐标变换，引力场只可能在一点上加以消除. 在一个自由下落的仓体中，只有当质点位于仓体的质心位置时，它才可能相对仓体保持位置不变. 而处于该点附近的粒子将缓慢地靠近该点或者远离该点，取决于粒子与质心的相对位置. 导致这一现象的力称为潮汐力. 这种力同导致海洋潮汐波的力是同一种力. 地球和月亮相互围绕着旋转，而它们的质心则围绕着太阳做圆周运动. 这个质心其实就是在做“自由落体”运动，正比于引力质量的万有引力被正比于惯性质量的离心力抵消了. 地球上任何远离该质心的点将被离心力向外拖拽，而相对处于近处的点则被引力向内牵引.

值得注意的是，由于潮汐力的存在，在量子力学中我们无法通过坐标变换来模拟引力. 由于海森伯测不准关系，粒子无法被限定在某个点上，而只能以波包的形式存在. 它们会弥散开来并且对潮汐力越来越敏感. 如果想对一个波包将引力消除的话，就必须采用类似上一章构造缺陷时所用的**多值**坐标变换. 这样就会给出**量子等效原理**，第 12 章中将对此进行详细的讨论.

11.2 一般坐标系中的自由粒子

作为爱因斯坦等效原理的第一个应用，我们来考察式 (2.19) 中闵可夫斯基时空中自由质点的作用量：

$$\overset{\rm m}{\mathcal{A}} = -mc\int_{s_a}^{s_b} \mathrm{d}s = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} \mathrm{d}\sigma\ \overset{\rm m}{\mathcal{L}}, \tag{11.2}$$

其拉格朗日密度为

$$\overset{\rm m}{\mathcal{L}} = -mc\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}\sigma = -mc\sqrt{g_{ab}\,\dot{x}^a(\sigma)\dot{x}^b(\sigma)}. \tag{11.3}$$

参数 s 表示式 (1.139) 中定义的沿路径 $x(\sigma)$ 的不变长度，它正比于固有时 $s = c\tau$ [请参看式 (1.141)].

自由粒子将沿着下述直线运动：

$$\ddot{x}^a(\tau) = 0, \tag{11.4}$$

而这是起点和终点间的最短的时空路径. 该路径对应于作用量的极值：

$$\delta\overset{\rm m}{\mathcal{A}} = 0. \tag{11.5}$$

当对同一个闵可夫斯基时空用任一个带有希腊字母指标的曲线坐标 x^μ

$$x^\mu = x^\mu(x^a) \tag{11.6}$$

来描述时，此不变长度 $\mathrm{d}s$ 由下式给出：

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\sigma\sqrt{g_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\nu(\sigma)}, \tag{11.7}$$

其中，依赖于时空坐标的 4×4 矩阵

$$g_{\mu\nu}(q) = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu} \tag{11.8}$$

就是时空的**度规**. 注意，它的逆矩阵为

$$g^{\mu\nu}(x) = g^{ab}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^b}. \tag{11.9}$$

由于时空并没有真的改变，而只是换了一种参数表达，因此该路径依然是直的. 在此新的曲线坐标系 x^μ 中的运动方程可以通过两种方法来得到. 一种就是简单地将闵可夫斯基时空中的自由运动方程 (11.4) 变换到曲线坐标系中. 我们将在本节结尾部分对此进行讨论.

为此，我们将首先来考察一般坐标系中的作用量

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int_{\sigma_a}^{\sigma_b}\mathrm{d}\sigma\,\overset{\mathrm{m}}{L}\left(\dot{x}^\mu(\sigma)\right), \tag{11.10}$$

以及相应的变换后的拉格朗日量 [请对比式 (2.19)]

$$\overset{\mathrm{m}}{L}\left(\dot{x}^\mu(\sigma)\right) = -mc\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma} = -mc\left[g_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\nu(\sigma)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{11.11}$$

并通过对此作用量求极值来推导出运动方程. 如我们在第 2.2 节中所讨论的，式 (11.10) 中的作用量在任意的再参数化下

$$\sigma \to \sigma' = f(\sigma) \tag{11.12}$$

均是不变的. 对作用量作变分给出

$$\begin{aligned}\delta\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} &= \int_{\sigma_a}^{\sigma_b}\mathrm{d}\sigma\,\delta L\left(\dot{x}^\mu(\sigma)\right)\\ &= -m^2c^2\,\frac{1}{2}\int_{\sigma_a}^{\sigma_b}\frac{\mathrm{d}\sigma}{L\left(\dot{x}^\mu(\sigma)\right)}\left[\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\right)\delta x^\lambda\,\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\nu(\sigma) + 2g_{\lambda\nu}\frac{\mathrm{d}\delta x^\lambda}{\mathrm{d}\sigma}\dot{x}^\nu(\sigma)\right].\end{aligned} \tag{11.13}$$

在其右边我们运用了式 (2.7) 中的性质，即导数的变分等于变分的导数.

括号前的因子等于 $\mathrm{d}\sigma/(-mc\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}\sigma) = -(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s)^2\mathrm{d}s/mc$. 因此，如果我们取 σ 为固有时 τ，则 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s = \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s = 1/c$，我们就可以将变分改写为

$$\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = -m\frac{1}{2}\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \left[(\partial_\lambda g_{\mu\nu})\,\delta x^\lambda\,\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) + 2g_{\lambda\nu}\frac{\mathrm{d}\delta x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}\dot{x}^\nu(\tau)\right]. \tag{11.14}$$

这表明，如果我们用固有时 τ 来参数化该路径的话，则运动方程也可由更加简单的作用量

$$\overset{m}{\bar{\mathcal{A}}} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau\ \overset{\mathrm{m}}{\bar{L}}\ (\dot{x}^\mu(\tau)) \tag{11.15}$$

导出，其中

$$\overset{\mathrm{m}}{\bar{L}}\ (\dot{x}^\mu(\tau)) \equiv -\frac{m}{2}\, g_{\mu\nu}(x(\tau))\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau). \tag{11.16}$$

这个作用量同以赝时间 τ 参数化的 4 维时空中的非相对论性点粒子的作用量具有相同的形式. 注意，尽管式 (11.15) 中的作用量与式 (11.10) 的极值点相同，但其大小只有对方的一半.

式 (11.14) 中的第二个积分可以通过分部积分而得，其结果为

$$2g_{\lambda\nu}(x(\tau))\delta x^\lambda(\tau)\dot{x}^\nu(\tau)\Big|_{\tau_a}^{\tau_b} - 2\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau\,\delta x^\lambda(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[g_{\lambda\nu}(x(\tau))\dot{x}^\nu(\tau)\right]. \tag{11.17}$$

根据经典物理的极值原理，对于固定端点的路径的变分 δx^μ [参见式 (2.3)]，我们对此作用量作变分，即得

$$\frac{1}{2}\int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \left[(\partial_\lambda g_{\mu\nu} - 2\partial_\mu g_{\lambda\nu})\,\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) - 2g_{\lambda\nu}\ddot{x}^\nu(\tau)\right]\delta x^\lambda(\tau) = 0. \tag{11.18}$$

这个对所有在端点处为零的 $\delta x^\mu(\tau)$ 都成立，尤其是对于如下无穷小的局域的尖刺：

$$\delta x^\mu(\tau) = \epsilon\delta(\tau - \tau_0). \tag{11.19}$$

将以上这些代入式 (11.18) 中，我们就得到了如下运动方程：

$$g_{\lambda\nu}\ddot{x}^{\,\nu}(\tau) + \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\right)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) = 0. \tag{11.20}$$

为了方便，我们这里引入一个量，称为**黎曼联络** (Riemann connection) 或**克里斯托夫符号** (Christoffel symbol)：

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda} \equiv \{\mu\nu, \lambda\} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right). \tag{11.21}$$

于是该运动方程就可写为

$$g_{\lambda\nu}\ddot{x}^{\,\nu}(\tau) + \bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}\,\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) = 0. \tag{11.22}$$

进一步引入**修正克里斯托夫符号**

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\kappa} \equiv \begin{Bmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = g^{\kappa\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda} = g^{\kappa\lambda}\{\mu\nu\lambda\}, \tag{11.23}$$

我们就可将方程 (11.20) 变为如下形式：

$$\ddot{x}^{\lambda}(\tau) + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}^{\nu}(\tau) = 0. \tag{11.24}$$

满足该最短长度方程的路径 $x^{\lambda}(\tau)$ 称为**测地轨道** (geodesic trajectory). 爱因斯坦断定，该方程正确地描述了引力场中点粒子的运动.

现在，通过对闵可夫斯基时空中的直线运动方程 (11.4) 做一个坐标变换 $x^a(x^{\mu})$，我们用一种更简单的办法来推导此运动方程：

$$\ddot{x}^{a}(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}(\tau)\right] = \frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu}}\ddot{x}^{\mu}(\tau) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu}}\right)\dot{x}^{\mu}(\tau) = 0, \tag{11.25}$$

其中，$\partial x^a/\partial x^{\mu}$ 为在此轨道 $x(\tau)$ 上取值的坐标变换矩阵. 将此式乘以 $\partial x^{\lambda}/\partial x^a$ 然后对重复指标 a 求和，就得到

$$\ddot{x}^{\lambda}(\tau) + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^a}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu}}\right)\dot{x}^{\mu}(\tau) = \ddot{x}^{\lambda}(\tau) + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^a}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}x^a)\,\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}^{\nu}(\tau) = 0. \tag{11.26}$$

利用式 (11.9)，第二项得

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^a}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}x^a) = g^{\lambda\sigma}(\partial_{\sigma}x_a)(\partial_{\mu}\partial_{\nu}x^a). \tag{11.27}$$

经过一个小小的代数运算就可验证，这正是 $\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^{\mu}$，因此变换后的运动方程 (11.26) 确实与测地线方程 (11.24) 是相一致的.

11.3　闵可夫斯基几何在一般坐标系中的表述

在爱因斯坦理论中，所有的引力效应都完全可以用一个非平凡的时空几何来描述. 作为引出这一理论的第一步，我们有必要来讨论一下上一节所讲的那些仅仅是由于一般坐标选取所引起的无关紧要的几何性质与那些能够导致引力存在的特性之间的差别. 为此，我们将进一步仔细研究闵可夫斯基时空中坐标变换的数学问题.

11.3.1　局域基标架

同式 (1.25) 中一样，我们用坐标 $x^a(a = 0, 1, 2, 3)$ 来表示闵可夫斯基时空中的点. 从现在起，我们将用粗体的拉丁字母来表示时空中的 4-矢量. 于是，我们就可

将 4 维基矢记为 $\boldsymbol{e}_a$，且任意一个具有坐标 x^a 的 4 维矢量记为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_a x^a$. 基于式 (1.29) 中的闵可夫斯基度规 g_{ab}，这些基矢相互正交：

$$\boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_b = g_{ab}. \tag{11.28}$$

这些基矢 $\boldsymbol{e}_a$ 就定义了一个惯性参考系.

现在，利用一组新的坐标 x^μ，我们来对闵可夫斯基时空进行再参数化，这些新坐标值可通过如下映射确定：

$$x^a \to x^\mu = x^\mu(x^a). \tag{11.29}$$

由于 x^μ 仍然标记的是同一个时空，我们因此可设函数 $x^\mu(x^a)$ 具有逆函数 $x^a = x^a(x^\mu)$ 且足够的光滑，因此 $x^\mu(x^a)$ 和 $x^a(x^\mu)$ 至少有两个光滑的导数. 这些导数总是可交换的. 换句话说，式 (11.29) 中的一般坐标变换及其逆变换 $x^a(x^\mu)$ 满足施瓦茨可积条件：

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\, x^a(x^\kappa) = 0, \tag{11.30}$$

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\, \partial_\lambda x^a(x^\kappa) = 0. \tag{11.31}$$

令 $x^\mu(x^a) =$ 常数就给出一组新坐标下的超曲面，其法矢由下式给定 (图 11.1)：

$$\boldsymbol{e}_\mu(x) \equiv \boldsymbol{e}_a e^a{}_\mu(x) = \boldsymbol{e}_a \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}. \tag{11.32}$$

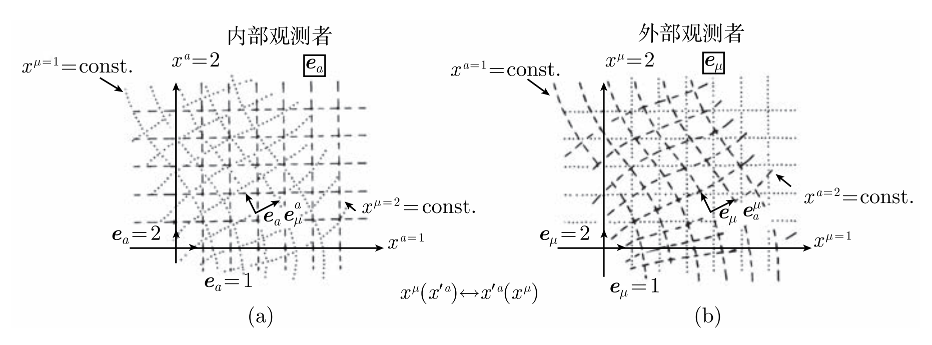


图 11.1　弹性形变前和形变后晶面 ($x^\mu =$ 常数) 的图示，一个是从晶体内部的角度看 (a) 一个是从外部 (b) 的角度看

这些矢量称为**局域基矢** (local basis vectors). 它们的分量 $e^a{}_\mu(x)$ 则称为局域**基标架** (basis tetrads). 在此惯性参考系中，两点 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}$ 间的矢量差由 $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_a\,(x'^a - x^a)$ 来描述. 当变为坐标 x'^μ、x^μ 后，这一矢量差变为

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_a \int_x^{x'} e^a{}_\mu(x) \mathrm{d}x^\mu. \tag{11.33}$$

我们知道，无穷小矢量 d$\boldsymbol{x}$ 的长度为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_\mu \mathrm{d}x^\mu)^2} = \sqrt{\boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\nu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}. \tag{11.34}$$

式 (11.34) 右边表明，曲线坐标系中的度规可以表示为局域基矢的标量积：

$$g_{\mu\nu}(x) = \boldsymbol{e}_\mu(x)\boldsymbol{e}_\nu(x). \tag{11.35}$$

将式 (11.32) 代入式 (11.35) 并利用式 (11.28)，我们确实可以再次得到式 (11.8)：

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{ab}e^a{}_\mu(x)e^b{}_\nu(x) = \boldsymbol{e}_a\mathbf{e}_b \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu} = g_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^b}{\partial x^\nu}. \tag{11.36}$$

接下来，我们利用闵可夫斯基度规 $g_{ab} = g^{ab}$ 可以自由地对其拉丁指标进行升降，并定义

$$e^{a\mu} \equiv g^{ab}e_b{}^\mu, \quad e_{a\mu} \equiv g_{ab}e^b{}_\mu. \tag{11.37}$$

于是，我们可以将式 (11.35) 重新写为

$$g_{\mu\nu}(x) = \boldsymbol{e}_\mu(x)\boldsymbol{e}_\nu(x) = e^a{}_\mu(x)e_{a\nu}(x). \tag{11.38}$$

由于我们设一般的坐标形式 (11.28) 具有逆变换，我们也可计算导数 $\partial x^\mu/\partial x^a$. 这与 $\partial x^a/\partial x^\mu$ 有两种正交关系：

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^b} = \delta^a{}_b, \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}\frac{\partial x^a}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \tag{11.39}$$

我们将 $\partial x^\mu/\partial x^a$ 记为 $e_a{}^\mu$ 并引入矢量 $\boldsymbol{e}^\mu = \boldsymbol{e}_a g^{ab} e_b{}^\mu$，该矢量称为**倒易多值基标架** (图 11.2). 利用此标记，式 (11.39) 中的方程就给出了标架的正交完备关系：

$$e^a{}_\mu(x)e_b{}^\mu(x) = \delta^a{}_b, \quad e_a{}^\mu(x)e^a{}_\nu(x) = \delta^\mu{}_\nu. \tag{11.40}$$

希腊指标的位置可以自由地升降，因此又有

$$e^{a\mu}(x)e_{b\mu}(x) = \delta^a{}_b, \quad e_{a\mu}(x)e^{a\nu}(x) = \delta_\mu{}^\nu. \tag{11.41}$$

下述标量积

$$g^{\mu\nu}(x) = \boldsymbol{e}^\mu(x)\boldsymbol{e}^\nu(x) = e^{a\mu}(x)e_a{}^\nu(x) \tag{11.42}$$

很显然就是逆度规，它满足

$$g^{\mu\nu}(x)g_{\nu\lambda}(x) = \delta^\nu{}_\lambda. \tag{11.43}$$

度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 及其逆 $g^{\mu\nu}(x)$ 可以用来自由地升降任何张量的希腊指标，并可通过缩并所有的指标来构造坐标变换下的不变量.

11.3.2　闵可夫斯基坐标下的矢量场和张量场

在第 1.4 节中我们讨论了物理量在洛伦兹变换下的变换性质. 该变换通过乘

以一个矩阵 $\varLambda^a{}_b$ 将惯性系的坐标值变为

$$x^a \to x'^a \equiv (\varLambda x)^a = \varLambda^a{}_b x^b. \tag{11.44}$$

该变换使得标量积 (1.78) 和线元 (1.142) 在两个坐标系 x^a 和 x'^a 中保持不变. 变换矩阵 $\varLambda^a{}_b$ 满足式 (1.28) 中的赝正交关系，且具有如式 (1.103) 中所示的无穷小表示：

$$\varLambda^a{}_b = \delta^a{}_b + \omega^a{}_b, \quad \left(\varLambda^{-1}\right)^a{}_b = \delta^a{}_b - \omega^a{}_b, \tag{11.45}$$

其中，$\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ 具有式 (1.55) 和式 (1.56) 中所给转动角 φ^k 和快度 ζ^i 这六个独立的矩阵元.

由于物理点在洛伦兹变换前后不变，因此基矢 $\boldsymbol{e}_a$ 的变换将遵循以下规则：

$$\boldsymbol{e}_a \to \boldsymbol{e}'_a \equiv \mathbf{e}_b \left(\varLambda^{-1}\right)^b{}_a. \tag{11.46}$$

这给出

$$\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{e}_a x^a \longrightarrow \boldsymbol{e}'_a x'^a = \mathbf{e}_b \left(\varLambda^{-1}\right)^b{}_a \varLambda^a{}_{\mathrm{c}} x^c = \boldsymbol{e}_a x^a = \boldsymbol{x}, \tag{11.47}$$

表明惯性系中的矢量在变换前后是不变的. 到这里，以上这些讨论还只不过是第 1.4 节内容的一个回顾.

现在，我们来考虑一个**矢量场** $v^a(x)$. 它在每一个点 P 上给出一个矢量

$$\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{e}_a v^a(x). \tag{11.48}$$

在对坐标 x^a 和基矢 $\boldsymbol{e}_a$ 作洛伦兹变换后，可观测矢量 $\boldsymbol{v}(P)$ 依然指向同一个点，即

$$\boldsymbol{v}'(P) = \boldsymbol{v}(P). \tag{11.49}$$

将此写为

$$\boldsymbol{v}'(P) = \boldsymbol{e}'_a v'^a(x') = \boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{e}_a v^a(x) \tag{11.50}$$

我们看到，矢量的分量在这两组坐标下的联系必须与坐标 x'^a 和 x^a 之间的关系相一致，即

$$v'^a(x') = \varLambda^a{}_b v'^b(x), \tag{11.51}$$

或，经过替换 $x' \to x$ 和 $x \to x^{-1}x$ 后有

$$v'^a(x) = \varLambda^a{}_b v^b\left(\varLambda^{-1}x\right). \tag{11.52}$$

对于式 (1.74) 中坐标的无穷小变换

$$\Lambda^a{}_b x^b = \left(\delta^a{}_b + \omega^a{}_b\right) x^b, \quad \left(\Lambda^{-1} x\right)^a = x^a - \omega^a{}_b x^b, \tag{11.53}$$

逆变矢量场 $v^a(x)$ 变为

$$v'^a(x) = v^a(x) + \omega^a{}_b v^b(x) - \omega^{b'}{}_b x^b \partial_{b'} v^a(x). \tag{11.54}$$

我们看到，变换律的无穷小形式 (11.54) 正是式 (3.6) 所定义的实质变分 δ_s，对于洛伦兹变换，我们将其写为

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda v^a(x) &= v'^a(x) - v^a(x) \\ &= \omega^a{}_b v^b(x) - \omega^b{}_{b'} x^{b'} \partial_b v^a(x).\end{aligned} \tag{11.55}$$

对于协变矢量场 $v_a(x) = g_{ab}(x) v^b(x)$，我们也来找它的无穷小变换律. 类似于式 (11.55)，$v_a(x)$ 的实质变分为

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda \boldsymbol{v}_a(x) &= \omega_a{}^b v_\Lambda(x) - \omega^{b'}{}_b x^b \partial_{b'} v_a(x) \\ &= \omega_a{}^b v_b(x) + \omega_b{}^{b'} x^b \partial_{b'} v_a(x),\end{aligned} \tag{11.56}$$

其中，我们引入了矩阵 ω_{ab}：

$$\omega_b{}^{b'} = g_{ab} g^{a'b'} \omega^a_{b'} = g^{a'b'} \omega_{ba}. \tag{11.57}$$

协变矢量场 v_a 对 x^a 求导就给出高阶张量场. 对于无穷小变换情形，该导数的变换是通过式 (11.56) 中操作的**求和**来实现的，每一项对应一个指标. 这一规则可以直接由式 (11.56) 以及对易规则 $[\partial_a, x_b] = g_{ab}$ 而得到

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda \partial_b v_a &= \partial_b \delta_\Lambda v_a \\ &= \partial_b \left(\omega_a{}^{a'} v_{a'} + \omega_a{}^{c'} x^c \partial_{c'} v_a\right) \\ &= \omega_a{}^{a'} \partial_b v_{a'} + \omega_b^{b'} \partial_{b'} v_a + \omega_\mathrm{c}{}^{c'} x^c \partial_{c'} \partial_b v_a.\end{aligned} \tag{11.58}$$

这个简单的规则可以十分容易地扩展到任意高阶导数而形成高阶张量场的情形. 注意，由于在式 (3.6) 中 f 和 f' 的自变量是一样的，因此"实质变分"操作与求导是对易的.

11.3.3　一般坐标系中的矢量和张量场

现在，我们来考察以上这些同样的物理量，只不过是在曲线坐标系 $x^\mu(x^a)$. 于是 $\boldsymbol{v}(P)$ 的分量将不再用基矢 $\boldsymbol{e}_a$ 来标定，而是用式 (11.32) 中的**局域**基矢 $\boldsymbol{e}_\mu(x) = \boldsymbol{e}_a e^a{}_\mu(x)$ 来量度. 因此，很自然，矢量 $\boldsymbol{v}(P)$ 将用其局域分量 $v^\mu(x) = v^a(x) e_a{}^\mu(x)$ 来确定. 此时对于矢量场 $v^\mu(x)$ 将不能仅仅执行洛伦兹变换，还须作任意的一般坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu(x^\mu)$，该变换即为**爱因斯坦变换** (Einstein transformations).

在爱因斯坦变换下，矢量 $e_a{}^\mu(x)$，即坐标变换函数 $x^\mu(x^a)$ 的导数，将作如下变换：

$$\begin{aligned} e_a{}^\mu(x) \to e'_a{}^\mu(x') \equiv \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^a} &= \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^a} \\ &= \alpha^\mu{}_\nu(x) e_a{}^\nu(x), \\ e^a{}_\mu(x) \to e'^a{}_\mu(x') \equiv \frac{\partial x^a(x)}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial x^\nu(x')}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^a}{\partial x^\nu} \\ &= \alpha_\mu{}^\nu(x) e^a{}_\nu(x). \end{aligned} \tag{11.59}$$

矩阵

$$\alpha^\mu{}_\nu(x) \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad 和 \quad \alpha_\mu{}^\nu(x) \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \tag{11.60}$$

相互正交

$$\alpha^\nu{}_\lambda \alpha_\nu{}^\mu = \delta_\lambda{}^\mu, \qquad \alpha_\nu{}^\mu \alpha^\lambda{}_\mu = \delta_\nu{}^\lambda, \tag{11.61}$$

即

$$\left(\alpha^{-1}\right)^\nu{}_\lambda = \alpha_\lambda{}^\nu \tag{11.62}$$

同时为矩阵 $\alpha_\nu{}^\mu$ 的左逆和右逆矩阵.

类比于式 (1.77)，一个张量在爱因斯坦变换下具有如下变换特性：

$$\begin{aligned} t'^{\mu'\nu'}(x') &= \alpha^{\mu'}{}_\mu(x)\alpha^{\nu'}{}_\nu(x) t^{\mu\nu}, \\ t'^{\mu'\nu'\lambda'}(x') &= \alpha^{\mu'}{}_\mu(x)\alpha^{\nu'}{}_\nu(x)\alpha^{\lambda'}{}_\lambda(x) t^{\mu\nu\lambda}(x). \end{aligned} \tag{11.63}$$

同样，类比于式 (1.93)，我们有

$$\begin{aligned} t'_{\mu'\nu'}(x') &= \alpha_{\mu'}{}^\mu(x)\alpha_{\nu'}{}^\nu(x) t_{\mu\nu}, \\ t'_{\mu'\nu'\lambda'}(x') &= \alpha_{\mu'}{}^\mu(x)\alpha_{\nu'}{}^\nu(x)\alpha_{\lambda'}{}^\lambda(x) t_{\mu\nu\lambda}(x). \end{aligned} \tag{11.64}$$

为方便起见，其实可以将变换 $x^\mu \to x'^\mu(x^\mu)$ 写为

$$x^\mu \to x'^\mu \equiv x^\mu - \xi^\mu(x), \tag{11.65}$$

这说明爱因斯坦变换可以解释成是**局域**平移变换. 相应的变换矩阵为

$$\alpha^\lambda{}_\nu(x) = \delta_\nu{}^\lambda - \partial_\nu \xi^\lambda(x), \qquad \alpha_\mu{}^\nu(x) = \delta_\mu{}^\nu + \partial_\mu \xi^\nu(x). \tag{11.66}$$

现在我们来考察爱因斯坦变换下的实质变分 $\delta_{\rm s}$，记为 $\delta_{\rm E}$ [请再次参考式 (3.6) 中的定义]. 因此，我们考虑无穷小平移 $\xi^\lambda(x)$ 并且发现对于基标架 $e_a{}^\mu(x)$ 和 $e^a{}_\mu(x)$ 有

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}} e_a{}^{\mu}(x) &\equiv e'_a{}^{\mu}(x) - e_a{}^{\mu}(x) = e'_a{}^{\mu}(x') - e_a{}^{\mu}(x') \\ &= e_a{}^{\mu}(x) - e_a{}^{\mu}(x') + e'_a{}^{\mu}(x') - e_a{}^{\mu}(x) \\ &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} e_a{}^{\mu}(x) - \partial_{\lambda}\xi^{\mu} e_a{}^{\mu}(x), \qquad (11.67) \\ \delta_{\mathrm{E}} e^a{}_{\mu}(x) &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} e^a{}_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\xi^{\lambda} e^a{}_{\lambda}(x). \qquad (11.68)\end{aligned}$$

对于矢量场 $v^{\mu}(x)$ 和 $v_{\mu}(x)$ 我们可以给出类似的实质变分. 这可以从如下事实出发来得到，即在由 x^{μ} 到 $x^{\mu'}$ 的一般坐标变换下，矢量 $v^a(x^b)$ 和 $v_a(x^b)$ 保持不变. 因此，很显然，我们有

$$v'^a(x^b) = v^a(x^b). \qquad (11.69)$$

如将点 x^b 用 x'^{μ} 和 x^{μ} 这两组不同的坐标表示的话，则该关系式取以下形式：

$$v'^a(x') = v^a(x), \qquad (11.70)$$

其中，我们已将 x' 和 x 的希腊上标省略了. 利用此自变量，该实质变分 (即当一般坐标值 x^{μ} 相同时该矢量的差) 就为

$$\delta_{\mathrm{E}} v^a(x) = v'^a(x) - v^a(x) = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} v^a(x). \qquad (11.71)$$

利用此式以及式 (11.68)，从式 (11.70) 我们得

$$v'^{\mu}(x') = \alpha^{\mu}{}_{\nu} v^{\nu}(x), \qquad v'_{\mu}(x') = \alpha_{\mu}{}^{\nu} v_{\nu}(x), \qquad (11.72)$$

相应的实质变分为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}} v^{\mu}(x) &= v'^{\mu}(x) - v^{\mu}(x) = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} v^{\mu} - \partial_{\lambda}\xi^{\mu} v^{\lambda} \qquad (11.73) \\ \delta_{\mathrm{E}} v_{\mu}(x) &= v'_{\mu}(x) - v_{\mu}(x) = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} v_{\mu} \partial_{\mu}\xi^{\lambda} v_{\lambda}. \qquad (11.74)\end{aligned}$$

任何具有上述变换特性的 4-分量场都称为**爱因斯坦矢量** (Einstein vector) 或**世界矢量** (world vector).

这一定义可以很轻易地推广至高阶**爱因斯坦张量**或**世界张量**. 我们只需对每个指标独立地用变换矩阵 (11.66) 作用即可. 特别地，度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 的变换如下：

$$g'_{\lambda\kappa}(x') = \alpha_{\lambda}{}^{\mu}\alpha_{\kappa}{}^{\nu} g_{\mu\nu}(x), \quad g'^{\lambda\kappa}(x') = \alpha^{\lambda}{}_{\mu}\alpha^{\kappa}{}_{\nu} g^{\mu\nu}(x), \qquad (11.75)$$

其相应的无穷小变换为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}} g_{\mu\nu} &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\xi^{\lambda} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\lambda} g_{\mu\lambda}, \qquad (11.76) \\ \delta_{\mathrm{E}} g^{\mu\nu} &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda} g^{\mu\nu} - \partial_{\lambda}\xi^{\mu} g^{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\xi^{\nu} g^{\mu\lambda}. \qquad (11.77)\end{aligned}$$

而这又可以写成如下协变的形式：

$$\delta_{\mathrm{E}} g_{\mu\nu} = \bar{D}_\mu \xi_\nu + \bar{D}_\nu \xi_\mu, \tag{11.78}$$

$$\delta_{\mathrm{E}} g^{\mu\nu} = \bar{D}^\mu \xi^\nu + \bar{D}^\nu \xi^\mu. \tag{11.79}$$

很明显，从式 (11.61) 可以看出，我们可以将任意一组世界张量通过上下指标缩并相互乘在一起. 这个缩并后的结果同样是一个世界张量. 尤其是当这种缩并是完全的话，即没有剩余未缩并指标，则我们就得到了**爱因斯坦不变量**，或称为**世界不变量**.

11.3.4　仿射联络及协变导数

世界张量的乘法规则完全类似于洛伦兹张量的规则. 然而，却有一个非常重要的不同点. 不同于洛伦兹情形，世界张量的导数不再是张量. 在曲线坐标系中，为了使其成为一个真正的张量，对导数须作一些特定的修正. 其实，找到这种修正并构造类似于闵可夫斯基坐标下的导数张量的对象是非常简单的. 为此，我们来用一般曲线坐标下的分量重写导数张量. 我们取张量 $\partial_b v_a(x)$ 为例. 采用曲线坐标 x^μ，我们就可将此张量写为

$$\partial_b v_a = \partial_b \left(e_a{}^\mu v_\mu \right). \tag{11.80}$$

如果我们进一步对导数 ∂_b 进行计算后，我们就得到

$$\partial_b v_a = e_a{}^\mu \partial_b v_\mu + \partial_b e_a{}^\mu v_\mu. \tag{11.81}$$

利用关系式

$$\partial_b = e_b{}^\lambda \partial_\lambda \tag{11.82}$$

我们看到

$$\partial_b v_a = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \partial_\nu v_\mu + \left(e_b{}^\nu \partial_\nu e_a{}^\lambda \right) v_\lambda. \tag{11.83}$$

式 (11.83) 右边可以重新写为

$$\partial_b v_a \equiv e_a{}^\mu e_b{}^\nu D_\nu v_\mu, \tag{11.84}$$

其中，符号 D_ν 表示修正的导数

$$D_\nu v_\mu = \partial_\nu v_\mu - e_{\mathrm{c}}{}^\lambda \partial_\nu e_\mu{}^c v_\lambda \equiv \partial_\nu v_\mu - \varGamma_{\nu\mu}{}^\lambda v_\lambda. \tag{11.85}$$

式 (11.85) 右边的表示式可由下述这些简单的关系得到：

$$\partial_\nu e_a{}^\lambda = -e_a{}^\mu \left(e_{\mathrm{c}}{}^\lambda \partial_\nu e^c{}_\mu \right), \tag{11.86}$$

$$\partial_\nu e^a{}_\lambda = -e^a{}_\mu \left(e^c{}_\lambda \partial_\nu e_{\mathrm{c}}{}^\mu \right), \tag{11.87}$$

而这些关系又可通过对正交关系 $e_a{}^\lambda e^b_\lambda = \delta_a{}^b$ 直接求导而得. 类似于此，我们也可得到逆变矢量场导数 $\partial_b v^a(x)$ 的爱因斯坦形式，这可写为

$$\partial_b v^a = \partial_b \left(e^a{}_\mu v^\mu\right) = e^a{}_\mu e_b{}^\nu \partial_\nu v^\mu + \left(e_b{}^\nu \partial_\nu e^a{}_\lambda\right) v^\lambda \tag{11.88}$$

并进一步写为

$$e^a{}_\mu e_b{}^\nu D_\nu v^\mu, \tag{11.89}$$

其中，协变导数为

$$D_\nu v^\mu = \partial_\nu v^\mu - e^c{}_\lambda \partial_\nu e_c{}^\mu v^\lambda = \partial_\nu v^\mu + e_c{}^\mu \partial_\nu e_{c\lambda} v^\lambda \equiv \partial_\nu v^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu v^\lambda. \tag{11.90}$$

在式 (11.85) 和式 (11.90) 中出现的额外的项

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv e_a{}^\lambda \partial_\mu e^a{}_\nu \equiv -e^a{}_\nu \partial_\mu e_a{}^\lambda \tag{11.91}$$

称为所讨论时空的**仿射联络** (affine connection). 一般来讲，具有度规 $g_{\mu\nu}$ 和定义了相应协变导数的仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ 称为**仿射时空**(affine spacetime)，相应的几何称为**度量仿射几何** (metric-affine geometry). 注意，根据定义，$e^a{}_\nu$ 和 $e_a{}^\nu$ 的协变导数为零：

$$D_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda e_\lambda{}^a = 0, \tag{11.92}$$

$$D_\mu e_a{}^\nu = \partial_\mu e_a{}^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu e_a{}^\lambda = 0. \tag{11.93}$$

由于 $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu}$，因此度规张量也满足此性质①

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}{}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0, \tag{11.94}$$

$$D_\lambda g^{\mu\nu} = \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\mu g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\nu g^{\mu\sigma} = 0. \tag{11.95}$$

值得注意的是，度规张量还满足类似于式 (11.95) 的关系，只不过其中的联络替换为了克里斯托夫符号. 其实，从式 (11.21) 中的定义，我们可以直接对此加以证明

$$\bar{D}_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}{}^\sigma g_{\sigma\nu} - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0, \tag{11.96}$$

$$\bar{D}_\lambda g^{\mu\nu} = \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \bar{\Gamma}_{\lambda\sigma}{}^\mu g^{\sigma\nu} + \bar{\Gamma}_{\lambda\sigma}{}^\nu g^{\mu\sigma} = 0. \tag{11.97}$$

由于式 (11.84) 和式 (11.88) 中的左边对洛伦兹变换而言是张量，因此式 (11.85) 和式 (11.90) 中的协变导数 $D_\nu v_\mu$ 和 $D_\nu v^\mu$ 也必须对一般坐标变换是张量，即世界张量. 其实，我们很容易就可证明它们是协变的

$$\partial'_{\mu'} v_{\nu'}(x') = \alpha_{\mu'}{}^\mu \alpha_{\nu'}{}^\nu \partial_\mu v_\nu(x). \tag{11.98}$$

① 其实，存在不满足这一性质的更一般的几何[2].

将式 (11.98) 左边的导数计算出来，我们就得到

$$\begin{aligned}\partial'_{\mu'}v_{\nu'}(x') &= \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\partial_{\mu}\left[\alpha_{\nu'}{}^{\nu}v_{\nu}(x)\right]\\ &= \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\mu}v_{\nu}(x)+\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\partial_{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}.\end{aligned} \tag{11.99}$$

最后一项阻碍了其协变性. 不过，这项可被 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的非张量行为中的类似的一项抵消掉：

$$\begin{aligned}\Gamma'{}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'}(x') &= e'_a{}^{\lambda'}\partial'_{\mu'}e'{}^{\alpha}_{\nu'} = \alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}e_a{}^{\lambda}\partial_{\mu}\left(x_{\nu'}{}^{\nu}e^{a}{}_{\nu}\right)\\ &= \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\left[\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x)+\alpha^{\lambda'}{}_{\nu}\partial_{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\right],\end{aligned} \tag{11.100}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'{}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'}(x') &= -e'{}^{a}_{\nu'}\partial_{\mu'}e_a{}^{\lambda'} = -\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}e^{a}{}_{\nu}\partial_{\mu}\big(\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}e_a{}^{\lambda}\big)\\ &= \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\left[\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)-\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\mu}\alpha^{\lambda'}{}_{\nu}\right].\end{aligned} \tag{11.101}$$

在无穷小变换下，变换矩阵写为 $\alpha_{\mu}{}^{\nu}=\delta_{\mu}{}^{\nu}+\partial_{\mu}\xi^{\nu}$ 及 $\alpha^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}-\partial_{\nu}\xi^{\mu}$，我们可以很容易地验证协变导数 $D_{\mu}v_{\nu}$ 和 $D_{\mu}v^{\nu}$ 具有正确的世界张量的实质变分特性：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}D_{\mu}v_{\nu} &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}D_{\mu}v_{p}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}D_{\lambda}v_{\nu}+\partial v_{\nu}\xi^{\lambda}D_{\mu}v_{\lambda},\\ \delta_{\mathrm{E}}D_{\mu}v^{\nu} &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}D_{\mu}v^{\nu}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}D_{\lambda}v_{\nu}-\partial_{\nu}\xi^{\nu}D_{\mu}v^{\lambda}.\end{aligned} \tag{11.102}$$

下式中的非张量部分

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}\partial_{\mu}v_{\nu} &= \partial_{\mu}\delta_{\mathrm{E}}v_{\mu} = \partial_{\mu}\left(\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\nu_{\nu}+\partial_{\nu}\xi^{\lambda}v_{\lambda}\right)\\ &= \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\partial_{\mu}v_{\nu}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\nu_{\nu}+\partial_{\nu}\xi^{\lambda}\partial_{\mu}v_{\lambda}+\partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\lambda}v_{\lambda}\end{aligned} \tag{11.103}$$

可由 $\delta_{\mathrm{E}}\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ 中的非张量部分抵消掉：

$$\delta_{\mathrm{E}}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa} = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa}+\partial_{\nu}\xi^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa}+\partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\kappa}. \tag{11.104}$$

很容易可以对此进行验证，同样的抵消特性也存在于张量场的协变导数中：

$$\begin{aligned}D_{\mu}t_{\nu_1\cdots\nu_n}{}^{\nu'_1\cdots\nu'_{n'}} \equiv{}& \partial_{\mu}t_{\nu_1\cdots\nu_n}{}^{\nu'_1\cdots\nu'_{n'}}-\sum_{i}\Gamma_{\mu\nu_i}{}^{\lambda_i}\ t_{\nu_1\cdots\lambda_i\cdots\nu_n}{}^{\nu'_1\cdots\nu'_{n'}}\\ &+\sum_{i'}\Gamma_{\mu\lambda'_{i'}}{}^{\nu'_{i'}}\,t_{\nu_1\cdots\nu_n}{}^{\nu'_1\cdots\lambda'_{i'}\cdots\nu'_{n'}}.\end{aligned} \tag{11.105}$$

11.4 挠 率 张 量

只要坐标变换 $x^{\mu}(x^{a})$ 和 $x^{a}(x^{\mu})$ 是可积的，则无穷小平移变换场 $\xi^{\mu}(x)$ 的导数就可相互交换：

$$\left(\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\partial_{\nu}\partial_{\mu}\right)\xi^{\lambda}(x)=0. \tag{11.106}$$

而对于多值坐标变换，这一说法不再正确. 于是，联络中就会存在一个非零的反对称部分

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda}\right) = e_a{}^{\lambda}\partial_\mu e^a{}_\nu - e_a{}^{\lambda}\partial_\nu e^a{}_\mu, \tag{11.107}$$

它的线性近似为

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)\xi^\lambda(x). \tag{11.108}$$

值得注意的是，这个量的变换同一个真正的张量是一样的：

$$\delta_{\mathrm{E}} S_{\mu\nu}{}^{\kappa} = \xi^\lambda\partial_\lambda S_{\mu\nu}{}^{\kappa} + \partial_\mu\xi^\lambda S_{\mu\nu}{}^{\kappa} + \partial_\nu\xi^\lambda S_{\mu\nu}{}^{\kappa}, \tag{11.109}$$

该变换可以直接由式 (11.104) 得到. $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa}$ 的变换式中所出现的额外的导数项 $\partial_\mu\partial_\nu\xi^\kappa$ 对指标 $\mu\nu$ 是对称的，因此在反对称化后并不出现. 基于这个原因，我们称 $S_{\mu\nu}^{\kappa}$ 为**挠率张量** (torsion tensor).

我们看到，利用挠率张量，联络可以分解为两部分：一部分是式 (11.23) 中的克里斯托夫部分，它只依赖于度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$；另一部分称为**扭曲张量** (contortion tensor)，是挠率张量的一种组合.

为了推导这一分解，我们首先来定义相应的修正联络

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa} g_{\kappa\lambda} = e_{a\lambda}\partial_\mu e^a{}_\nu,$$

并将此分解为

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \overset{e}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\lambda} + \overset{e}{K}_{\mu\nu\lambda}, \tag{11.110}$$

其中

$$\begin{aligned}\overset{e}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\lambda} \equiv& \frac{1}{2}\{e_{a\lambda}\partial_\mu e^a{}_\nu + \partial_\mu e_{a\lambda} e^a{}_\nu + e_{a\mu}\partial_\nu e^a{}_\lambda \\ &+ e_{a\lambda}\partial_\nu e^a{}_\mu - e_{a\mu}\partial_\lambda e^a{}_\nu - \partial_\lambda e_{a\mu} e^a{}_\nu\},\end{aligned} \tag{11.111}$$

$$\begin{aligned}\overset{e}{K}_{\mu\nu\lambda} \equiv& \frac{1}{2}\{e_{a\lambda}\partial_\mu e^a{}_\nu - e_{a\lambda}\partial_\nu e^a{}_\mu - e_{a\mu}\partial_\nu e^a{}_\lambda \\ &+ e_{a\mu}\partial_\lambda e^a{}_\nu + e_{a\nu}\partial_\lambda e^a{}_\mu - e_{a\nu}\partial_\mu e^a{}_\lambda\}.\end{aligned} \tag{11.112}$$

第一个表达式中的各项可以合并为

$$\begin{aligned}\overset{e}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\lambda} =& \frac{1}{2}\left\{\partial_\mu\left(e_{a\lambda}e^a{}_\nu\right) + \partial_\nu\left(e_{a\mu}e^a{}_\lambda\right) - \partial_\lambda(e_{a\mu}e^a{}_\nu)\right\} \\ =& \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right),\end{aligned} \tag{11.113}$$

这表明 $\overset{e}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu\lambda}$ 与式 (11.21) 中的黎曼联络 $\bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}$ 是相等的，即等于克里斯托夫符号. 第二个表达式，即**扭曲张量** $K_{\mu\nu\lambda}$，则是三个式 (11.107) 中定义的挠率张量的组合. 可以定义一个关联的挠率张量 $S_{\mu\nu\lambda} \equiv S_{\mu\nu}{}^{\kappa} g_{\kappa\lambda}$，我们就看到

$$\overset{e}{K}_{\mu\nu\lambda} \equiv K_{\mu\nu\lambda} \equiv S_{\mu\nu\lambda} - S_{\nu\lambda\mu} + S_{\lambda\mu\nu}. \tag{11.114}$$

这三个挠率张量指标的顺序很好记：第一项的指标顺序与 $K_{\mu\nu\lambda}$ 一样，第二和第三项的指标则向左顺序轮换，且在各项前交替赋予正负号. 注意，$S_{\mu\nu\lambda}$ 前两个指标的反对称性导致扭曲张量 $K_{\mu\nu\lambda}$ 后两个指标的反对称性.

总结一下，我们发现完全的仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 可分解为黎曼联络和扭曲张量的和

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda} + K_{\mu\nu\lambda}. \tag{11.115}$$

由于挠率的变换规则同张量是一样的，因此扭曲也是一个张量. 这样一来，我们就可以从式 (11.85) 和式 (11.90) 中的协变导数中将扭曲张量部分省去，并定义**黎曼协变导数**

$$\bar{D}_\nu v_\mu \equiv \partial_\nu v_\mu - \bar{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\lambda} v_\lambda, \quad \bar{D}_\nu v^\mu \equiv \partial_\nu v^\mu + \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\mu} v^\lambda, \tag{11.116}$$

它只包含仿射联络的克里斯托夫部分.

11.5 协变时间导数及加速度

我们这里引入一个有用概念，即沿某个轨道 $x^\mu(\tau)$ 的任一矢量场 $v^\mu(x)$ 的**协变时间导数**，在此轨道上该矢量具有如下时间依赖关系 $v^\mu(\tau) \equiv v^\mu(q(\tau))$. 4-速度 $u^\mu(\tau) = \dot{x}^\mu(\tau)$ 的变换规则同 4-矢量是一样的. 类似于式 (11.85) 和式 (11.90) 中矢量场 $v^\mu(x)$ 的协变导数，我们定义 $v^\mu(\tau)$ 和 $v_\mu(\tau) = g_{\mu\nu}(x(\tau))v^\mu(\tau)$ 的协变时间导数为

$$\frac{D}{\mathrm{d}\tau} v^\mu(\tau) \equiv u^\kappa D_\kappa v^\mu(\tau), \quad \frac{D}{\mathrm{d}\tau} v_\mu(\tau) \equiv u^\kappa D_\kappa v_\mu(\tau), \tag{11.117}$$

利用式 (11.85) 和式 (11.90)，这变为

$$\frac{D}{\mathrm{d}\tau} v^\mu(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} v^\mu(\tau) + \Gamma_{\lambda\kappa}{}^{\mu} v^\lambda(\tau) u^\kappa(\tau), \quad \frac{D}{\mathrm{d}\tau} v_\mu(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} v_\mu(\tau) - \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\kappa} u^\lambda(\tau) v^\kappa(\tau). \tag{11.118}$$

如果该矢量轨迹是点粒子的速度轨迹的话，我们就可将 $v^\mu(\tau)$ 和 $v_\mu(\tau)$ 替换为 $u^\mu(\tau)$ 和 $u_\mu(\tau)$，于是就得到了**协变加速度**.

我们也可如下定义黎曼协变的时间导数：

$$\frac{\bar{D}}{\mathrm{d}\tau} v^\mu(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} v^\mu(\tau) + \bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^{\mu} v^\lambda(\tau) u^\kappa(\tau), \quad \frac{\bar{D}}{\mathrm{d}\tau} v_\mu(\tau) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} v_\mu(\tau) - \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}{}^{\kappa} u^\lambda(\tau) v^\kappa(\tau), \tag{11.119}$$

以及相应的加速度.

以上方程可用来定义度量仿射时空中沿任意曲线的协变导数及加速度. 从对式 (11.2) 中点粒子作用量的变分，我们在第 11.2 节中看到，弯曲空间中粒子的轨迹是

由运动方程 (11.24) 所决定的测地线. 因此，我们也可说该粒子轨道的黎曼协变加速度 (11.119) 为零.

如果包含总仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的粒子轨道的加速度 (11.118) 为零的话，则称该轨道为**自平行轨道** (autoparallel trajectory). 这在第 14 章中将起重要作用.

借助式 (11.115) 中的分解，我们可以得到式 (11.118) 和式 (11.119) 中这两个协变时间导数的差别为

$$\frac{D}{\mathrm{d}\tau}v^{\mu}(\tau)=\frac{\bar{D}}{\mathrm{d}\tau}v^{\mu}(\tau)+K_{\lambda\kappa}{}^{\mu}v^{\lambda}(\tau)u^{\kappa}(\tau),\quad \frac{D}{\mathrm{d}\tau}v_{\mu}(\tau)=\frac{\bar{D}}{\mathrm{d}\tau}v_{\mu}(\tau)-K_{\lambda\mu}{}^{\kappa}u^{\lambda}(\tau)v^{\kappa}(\tau). \tag{11.120}$$

11.6　作为仿射联络协变旋度的曲率张量

在上一节我们看到，即便联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 不是张量，它的反对称部分，即挠率张量 $S_{\mu\nu}^{\lambda}$ 也是一个张量. 于是就有一个问题，是否可以构造一个协变的对象，它包含关于联络中克里斯托夫部分里的引力的信息? 这样的张量其实是存在的.

当我们回头来看式 (11.104) 中联络的变换特性，我们不难看出其张量特性由于最后那项额外的任意函数导数 $\partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\kappa}(x)$ 而遭到破坏. 这个额外的导数项在第 2.4.4 节讨论电磁规范变换时也碰到过.

我们知道，电磁规范场的变换含有这样一个附加的导数项 [请参看式 (2.104)]

$$\delta A_a(x)=\partial_a\Lambda(x), \tag{11.121}$$

其中，$\Lambda(x)$ 是一个任意的规范函数，加在其上的微分算符可对易 [参看式 (2.105)]. 而实验可测的物理场则由式 (2.81) 中规范不变的反对称导数组合给出

$$F_{ab}=\partial_aA_b-\partial_bA_a. \tag{11.122}$$

式 (11.121) 中额外的导数项在此反对称组合式 (11.122) 中不再出现. 这就暗示类似的反对称构造对这里的联络也应存在. 不过，这种构造会稍微复杂一些，因为式 (11.104) 中的变换律中还包含有联络的线性贡献部分.

在包含与时空坐标 x 无关的内禀对称性的非阿贝尔规范理论中，此协变场强 F_{ab} 为一个矩阵. 如果 g 为规范群的群元且 $D(g)$ 为 g 在此矩阵空间的表示，则场强的变换为

$$F_{ab}\to F'_{ab}=D(g)F_{ab}D^{-1}(g). \tag{11.123}$$

在此变换下，规范场 A_a 的变换规则如下：

$$A_a(x)\to A'{}_a(x)=D(g)A_a(x)D^{-1}(g)+[\partial_aD(g)]D^{-1}(g), \tag{11.124}$$

这正是式 (2.104) 中规范变换的推广. 具有式 (11.123) 中变换特性的协变场强可通过对规范场作如下非阿贝尔旋度而得：

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a - [A_a, A_b]. \tag{11.125}$$

这类型规范变换及协变规范场强出现在非阿贝尔规范理论中，并用来描述弱相互作用的矢量玻色子 $W^{0,\pm}$ 以及 Z^0，相关规范群为 SU(2). 它们在描述强相互作用理论中胶子八重态 $G^{1,\cdots,8}$ 也是非常必要的，这时相应的规范群为 SU(3). 以上两种情况中，表示矩阵 $D(g)$ 分别属于相应的规范群的表示.

现在，我们看到仿射联络的变换律 (11.100) 可以完全用类似于非阿贝尔规范场变换律 (11.124) 的方法写出. 为此，我们将 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 看作 4×4 矩阵 Γ_μ 的矩阵元

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = (\Gamma_\mu)_\nu{}^{\lambda}. \tag{11.126}$$

于是式 (11.101) 可看作是一个矩阵方程

$$\boldsymbol{\Gamma}'_{\mu'}(x') = \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\left[\alpha \boldsymbol{\Gamma}_\mu(x)\alpha^{-1} + (\partial_\mu \alpha)\alpha^{-1}\right]. \tag{11.127}$$

该方程是式 (11.124) 的一个直接推广，在此情形下对称群同样也要作用于时空坐标. 为了得到协变性，规范场的矢量指标 μ 也必须相应地变换.

其实，如果我们还记得引入联络 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的初衷的话，上述结论并不令人惊奇. 联络是用来构造式 (11.85) 和式 (11.90) 中的协变导数的. 方程 (11.127) 显示联络也可看作是局域一般坐标变换 $\alpha^\mu{}_\nu(x)$ 构成的群的非阿贝尔规范场. 曲线坐标系中的爱因斯坦矢量和张量则是相应的规范协变量.

类似于式 (16.15) 中的场强，我们可以立即写出矩阵场 $\boldsymbol{\Gamma} b_\mu$ 的协变旋度：

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \boldsymbol{\Gamma} b_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\Gamma} b_\mu - [\boldsymbol{\Gamma} b_\mu, \boldsymbol{\Gamma} b_\nu], \tag{11.128}$$

这个量在一般坐标变换下呈现张量特性. 此张量的分量形式为

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\sigma} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}{}^{\delta}\Gamma_{\nu\delta}{}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\delta}\Gamma_{\mu\delta}{}^{\sigma}. \tag{11.129}$$

$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 的协变性可以通过以下方式很容易得出. 我们看到，利用基标架 $e_a{}^{\mu}$，此协变旋度有如下一个简单的表示形式：

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} = e_a{}^{\sigma}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right) e^a{}_\lambda = -e^a{}_\lambda \left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right) e_a{}^{\sigma}. \tag{11.130}$$

第一步可以直接通过将 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = e_a{}^{\lambda}\partial_\mu e^a{}_\nu$ 插入式 (11.128) 并进行求导而得

$$\begin{aligned}
&\left[\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa} - (\Gamma_\mu\Gamma_\nu)_\lambda{}^{\kappa}\right] - [\mu \leftrightarrow \nu] \\
&= \left(\partial_\mu e_a{}^{\kappa}\partial_\nu e^a{}_\lambda + e_a{}^{\kappa}\partial_\mu\partial_\nu e^a_\lambda + e_b{}^{\rho}\partial_\mu e^b{}_\lambda e^a{}_\rho \partial_\nu e_a{}^{\kappa}\right) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= e_a{}^{\kappa}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right) e^a{}_\lambda.
\end{aligned} \tag{11.131}$$

式 (11.131) 中第二步则是通过将 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = -e^{a}{}_{\nu}\partial_{\mu}e_{a}{}^{\lambda}$ 或 $\Gamma_{\nu\rho}{}^{\kappa} = e_{a}{}^{\kappa}\partial_{\nu}e^{a}_{\rho}$ 代入而得.

我们现在基本上可以看出闵可夫斯基时空的另一个特性. 就像在任何曲线坐标系中该时空都不存在挠率张量一样，它的曲率张量也为零. 式 (11.130) 显示，只有当映射函数 $x^a \to x^\mu$ 的导数不满足施瓦茨可积条件时，时空 x^μ 才具有非零曲率. 换句话说，对于平凡基标架 $e_a{}^\kappa = \delta_a{}^\kappa$ 的情形，$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 为零是很明显的：

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa} = e_a{}^{\kappa}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)e^a{}_\lambda \equiv 0. \tag{11.132}$$

借助于式 (11.64) 中的张量变换关系，我们就得出结论，$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 在闵可夫斯基时空的任何曲线坐标参数化形式下均为零.

由 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 的标架表示我们可以很容易得到该张量的变换律 [其中用到式 (11.60)]

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}(x) \to R'_{\mu'\nu'\lambda'}{}^{\kappa'}(x') \\
=&e_a{}^{x'}(x')\left(\partial'_{\mu'}\partial'_{\nu'} - \partial'_{\nu'}\partial'_{\mu'}\right)e'^a{}_{\lambda'}(x) \\
=&\alpha^{\kappa'}{}_{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}e_a{}^{\kappa}(x)\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)\left(\alpha_{\lambda'}{}^{\lambda}e^a{}_\lambda\right) \\
=&\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha_{\lambda'}{}^{\lambda}\alpha^{\kappa'}{}_{\kappa}R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}(x) \\
&+\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\kappa'}{}_{\lambda}\left[\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)\alpha_{\lambda'}{}^{\lambda}\right].
\end{aligned} \tag{11.133}$$

由于一般坐标变换都假定是光滑的，$\alpha_{\lambda'}{}^{\lambda}$ 之前的微分算子可对易，因此 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 是一个真正的张量，称为**曲率张量**.

从其构造不难看出，曲率张量对其前两个指标是反对称的. 另外一个不太容易看出来的性质是，当把最后一个指标降下来后，$R_{\mu\nu\lambda\kappa} \equiv R_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma}g_{\kappa\sigma}$ 的后一对指标也是反对称的：

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\mu\nu\kappa\lambda}. \tag{11.134}$$

其实，如果我们利用定义式 (11.130) 来计算式 (11.134) 左右两边的差的话，我们发现

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\lambda\kappa} + R_{\mu\nu\kappa\lambda} =& e_{a\kappa}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)e^a{}_\lambda + e_{a\lambda}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)e^a{}_\kappa \\
=&\partial_\mu\partial_\nu\left(e_{a\kappa}e^a{}_\lambda\right) - \partial_\nu\partial_\mu\left(e_{a\kappa}e^a{}_\lambda\right) \\
=&\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right)g_{\lambda\kappa}.
\end{aligned} \tag{11.135}$$

度规的物理可观测性要求度规

$$g_{\lambda\kappa}(x) = \frac{\partial x^a}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x_a}{\partial x^\kappa} \tag{11.136}$$

必须是单值的光滑函数，因此它必满足可积条件

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, g_{\lambda\kappa} = 0. \tag{11.137}$$

将此代入式 (11.135)，我们就可证明黎曼–嘉当曲率张量对于后两个指标确实是反对称的[3]. 依照式 (2.89) 后给出的定义，这一反对称性就是比安基恒等式.

形如式 (11.137) 的可积条件同样也须加在仿射联络上

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, \Gamma_{\lambda\kappa}{}^{\delta} = 0, \tag{11.138}$$

这样才可使其成为一个物理可观测量. 这一可积条件最终给出黎曼–嘉当时空中著名的比安基恒等式， 我们将在第 12.5 节中详加讨论.

需要指出的是，非零的曲率张量使得协变导数之间不再对易. 如果我们构造

$$D_\mu D_\mu v_\lambda - D_\nu D_\mu v_\lambda \tag{11.139}$$

我们发现，利用式 (11.85)、式 (11.90) 和式 (11.129)，有

$$\begin{aligned} D_\nu D_\mu v_\lambda - D_\mu D_\nu v_\lambda &= -R_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} v_\kappa - 2S_{\nu\mu}{}^{\rho} R_\rho v_\lambda, \\ D_\nu D_\mu v^\kappa - D_\mu D_\nu v^\kappa &= R_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} v^\lambda - 2S_{\nu\mu}{}^{\rho} D_\rho v^\kappa. \end{aligned} \tag{11.140}$$

由于 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 为一个张量，它可以利用度规张量对其指标加以缩并从而构造低阶协变量. 有两种可能性，其一是

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\kappa\mu\nu}{}^{\kappa}, \tag{11.141}$$

这称作是**里奇张量** (Ricci tensor)，另一个为

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \tag{11.142}$$

称为**标曲率** (scalar curvature). 这两个量的组合

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{11.143}$$

由爱因斯坦引入，因此称为**爱因斯坦曲率张量**. 它还可以写为

$$G^{\nu\mu} = \frac{1}{4} e^{\mu\alpha\beta\gamma} e^{\nu}{}_{\alpha}{}^{\delta\tau} R_{\beta\gamma\delta\tau}, \tag{11.144}$$

其中，$e^{\mu\nu\lambda\kappa}$ 是 11A 中定义的列维–西维塔 (Levi-Civita) 张量的逆变形式. 式 (11.144) 和式 (11.143) 的等价性可以直接由恒等式 (1A.24) 的弯曲时空形式得证.

11.7 黎曼曲率张量

事实上，爱因斯坦所研究的是一个只与联络和曲率张量的黎曼部分有关的张量. 由于扭曲率 $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 是一个张量，因此 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的黎曼部分 $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 具有与式 (11.104) 中 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 相同的变换规则，于是，我们就可以如下构造**黎曼曲率张量** (Riemann curvature tensor)：

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\sigma} = \partial_\mu \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\sigma} - \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\sigma} - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\rho} \bar{\Gamma}_{\nu\rho}{}^{\sigma} + \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\rho} \bar{\Gamma}_{\mu\rho}{}^{\sigma}. \tag{11.145}$$

与方程 (11.129) 中的 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 不同，此曲率张量可以完全用度规张量的导数来表达 [参考式 (11.21) 和式 (11.23)]. 这两个张量的差就是以下扭曲张量的函数：

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa} - \bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa} = \bar{D}_\mu K_{\nu\lambda}{}^{\kappa} - \bar{D}_\nu K_{\mu\lambda}{}^{\kappa} - \left(K_{\mu\lambda}{}^{\rho} K_{\nu\rho}{}^{\kappa} - K_{\nu\lambda}{}^{\rho} K_{\mu\rho}{}^{\kappa}\right), \tag{11.146}$$

其中，$\bar{D}_\mu$ 为式 (11.116) 中由联络的克里斯托夫部分所构成的黎曼协变导数.

注意，方程 (11.146) 与 $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 和 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 对第一和第二对指标的反对称性是相容的. 对于第一对指标，其反对称性由定义 (11.129) 和式 (11.145) 给出，而式 (11.146) 中的差显然具有同样的反对称性. 这个差对第二对指标 $\lambda\kappa$ 的反对称性则是扭曲张量 $K_{\nu\lambda\kappa}$ 关于后两个指标具有反对称性的结果.

另外，曲率张量 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 对两个指标对之间的交换则是对称的：

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = \bar{R}_{\lambda\kappa\mu\nu}. \tag{11.147}$$

这可以通过一下方法加以验证：首先将式 (11.145) 中的前两项表示为度规场导数的形式

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = &\left[g_{\kappa\delta}\partial_\mu \frac{g^{\delta\sigma}}{2}\left(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}\right)\right] \\ &-[\mu \leftrightarrow \nu] - g_{\kappa\delta}\left(\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\nu\rho}{}^{\delta} - \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\mu\rho}{}^{\delta}\right),\end{aligned} \tag{11.148}$$

然后利用式 (11.97) 将 $\partial_\mu g^{\delta\sigma}$ 用克里斯托夫符号表示为

$$\begin{aligned}g_{\kappa\delta}\partial_\mu g^{\delta\sigma} &= -\left(\partial_\mu g_{\kappa\delta}\right) g^{\delta\sigma} \\ &= -\left(\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\tau} g_{\tau\delta} + \bar{\Gamma}_{\mu\delta}{}^{\tau} g_{\kappa\tau}\right) g^{\delta\sigma} = -\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\sigma} - \bar{\Gamma}_{\mu\delta\kappa} g^{\delta\sigma}.\end{aligned} \tag{11.149}$$

这样我们就得

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = &\frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu\partial_\kappa g_{\nu\lambda}\right) - (\mu \leftrightarrow \nu)\right] \\ &-\left[\left(\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\sigma} + \bar{\Gamma}_{\mu\kappa'\kappa} g^{\lambda\sigma}\right)\bar{\Gamma}_{\nu\lambda\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)\right] - \left(\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\nu\rho\kappa} - \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\mu\rho\kappa}\right).\end{aligned} \tag{11.150}$$

进一步利用关系 (11.97)，我们可将式 (11.50) 第二行写为

$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\sigma}+g^{\delta\sigma}\bar{\Gamma}_{\mu\delta\kappa}\right)\left[\left(\bar{\Gamma}_{\nu\lambda\sigma}+\bar{\Gamma}_{\nu\sigma\lambda}\right)+(\lambda\leftrightarrow\nu)-\bar{\Gamma}_{\sigma\nu\lambda}-\bar{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\right]\right\}-\{\mu\leftrightarrow\nu\},$$

我们发现，由于 $\bar{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}$ 关于 $\mu\nu$ 的对称性，几乎所有的项都消掉了. 只剩下

$$-\left(\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\nu\lambda\sigma}+\bar{\Gamma}_{\mu\delta\kappa}\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\delta}\right)+(\mu\leftrightarrow\nu),$$

而此式的第二项会将式 (11.150) 中第三行中的第二项消掉，于是 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 就变为

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}=\frac{1}{2}\left[(\partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\kappa}-\partial_{\mu}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda})-(\mu\leftrightarrow\nu)\right]-\left(\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\nu\lambda\sigma}-\bar{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\mu\lambda\sigma}\right).\quad(11.151)$$

这一表达式很明显地显示出 $\mu\nu\leftrightarrow\lambda\kappa$ 的对称性是可积性 $(\partial_{\mu}\partial_{\nu}-\partial_{\nu}\partial_{\mu})\,g_{\lambda\kappa}=0$ 的结果. 同样的特性使得 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 在 $\mu\leftrightarrow\nu$ 的交换下呈现出反对称性，就如方程 (11.135) 和 (11.146) 所示.

将式 (11.151) 用 $g^{\nu\lambda}g^{\mu\kappa}$ 进行缩并，我们就可得到如下标曲率的紧致表达式：

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\bar{R}=&\partial_{\lambda}\left[\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\left(\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}-\delta_{\mu}{}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\kappa}\right)\right]\\&+\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\kappa}\bar{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\lambda}-\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^{\kappa}\right).\end{aligned}\quad(11.152)$$

我们现在来检验该方程. 为此，我们将式 (11.149) 中的等式写为如下形式：

$$\partial_{\kappa}g_{\mu\nu}=-g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}\partial_{\kappa}g^{\sigma\tau}=\bar{\Gamma}_{\kappa\mu\nu}+\bar{\Gamma}_{\kappa\nu\mu}.\quad(11.153)$$

另外，我们有

$$\partial_{\lambda}\sqrt{-g}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\sigma\tau}\partial_{\lambda}g_{\sigma\tau}=\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}{}^{\mu},\quad(11.154)$$

这可从式 (11A.23) 中直接得到. 结合上面的式子，我们得

$$\partial_{\lambda}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})=\sqrt{-g}\left[-g^{\mu\sigma}\bar{\Gamma}_{\lambda\sigma}{}^{\nu}-g^{\nu\sigma}\bar{\Gamma}_{\lambda\sigma}{}^{\mu}+g^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\lambda\sigma}{}^{\sigma}\right].\quad(11.155)$$

这样，我们就可以将式 (11.152) 中的第一项写为

$$\begin{aligned}&\partial_{\lambda}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g})\left(\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}-\delta_{\mu}{}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\kappa}\right)\\&=\sqrt{-g}\left[-g^{\mu\sigma}\bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}{}^{\nu}-g^{\nu\sigma}\bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}{}^{\mu}+g^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}{}^{\sigma}\right]\left(\bar{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}-\delta_{\mu}{}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\kappa\nu}{}^{\kappa}\right)\\&=-2\sqrt{-g}\left[\bar{\Gamma}_{\mu\nu\sigma}g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^{\sigma}-\bar{\Gamma}_{\lambda\sigma}{}^{\sigma}g^{\lambda\kappa}\bar{\Gamma}_{\kappa\mu}{}^{\mu}\right].\end{aligned}\quad(11.156)$$

据此，方程 (11.152) 变为

$$\sqrt{-g}R=\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}\left(\partial_{\lambda}\Gamma_{\kappa\mu\nu}-\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda\kappa}-g^{\sigma\tau}\bar{\Gamma}_{\lambda\sigma\mu}\bar{\Gamma}_{\kappa\tau\nu}+\bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}{}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\kappa\mu\nu}\right)\right],\quad(11.157)$$

这正是式 (11.145) 中定义的黎曼曲率张量用 $\delta^{\mu}{}_{\sigma}g^{\nu\lambda}$ 缩并的结果.

附 录

列维–西维塔张量的曲线坐标形式

在 1A 中，我们已经给出了欧氏空间和闵氏时空中列维–西维塔张量 $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$ 的性质. 如果仅仅是对这些时空进行曲线坐标在参数化的话，这些性质并不会有太大的变化. 具体来说，我们来考虑 4 维闵可夫斯基时空，它的度规由坐标变换 (1A.21) 给出. 如果时空是弯曲的，我们有同样的表达式. 曲线坐标中的列维–西维塔张量为

$$e^{\mu_1\cdots\mu_D} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}, \tag{11A.1}$$

其中

$$-g \equiv \det(-g_{\mu\nu}) \tag{11A.2}$$

为 $-g_{\mu\nu}$ 的正定的行列式，且 $\sqrt{-g}$ 为其正根. 就像 $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$ 是洛伦兹变换下的赝张量一样 [参见式 (1A.11)]，$e^{\mu_1\cdots\mu_D}$ 在一般坐标变换下也为赝张量，它的变换关系为

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D} \to \alpha^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots\alpha^{\mu_D}{}_{\nu_D}\epsilon^{\nu_1\cdots\nu_D} = \det(\alpha)\,\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}. \tag{11A.3}$$

由于 $g_{\mu\nu}$ 的变换如下：

$$g_{\mu\nu} \to \alpha_\mu^\lambda\alpha_\nu^\kappa g_{\lambda\kappa}, \tag{11A.4}$$

因此它的行列式为

$$g \to \det\left(\alpha_\mu{}^\lambda\right)^2 g = \det\left(\alpha^\mu{}_\nu\right)^{-2} g. \tag{11A.5}$$

于是，

$$e^{\mu_1\cdots\mu_D} \to \frac{\det(\alpha^\mu{}_\nu)}{|\det(\alpha^\mu{}_\nu)|}\,e^{\mu_1\cdots\mu_D}, \tag{11A.6}$$

这就表明了它的赝张量特性.

对于下述张量：

$$e_{\mu_1\cdots\mu_D} = \sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}, \tag{11A.7}$$

上述特性同样满足. 这个张量可以通过 $e^{\nu_1\cdots\mu_D}$ 乘以 $g_{\mu_1\nu_1}\cdots g_{\mu_D\nu_D}$ 而得到.

协变和逆变反对称张量 $e_{\mu_1\cdots\mu_D}$ 和 $e^{\mu_1\cdots\mu_D}$ 同对称张量 $g_{\mu_1\mu_2}$ 和 $g^{\mu_1\mu_2}$ 有一个共同的重要性质，即它们协变微分下都是不变的：

$$D_\lambda e_{\mu_1\cdots\mu_D} = 0, \quad D_\lambda e^{\mu_1\cdots\mu_D} = 0. \tag{11A.8}$$

由于 $e_{\mu_1\cdots\mu_D}$ 为张量，因此我们可以将式 (11A.8) 很明确地写为

$$\partial_\lambda e_{\mu_1\cdots\mu_D} = \Gamma_{\lambda\mu_1}{}^{\nu_1} e_{\nu_1\mu_2\cdots\mu_D} + \Gamma_{\lambda\mu_2}{}^{\nu_2} e_{\mu_1\nu_2\cdots\mu_D} + \cdots + \Gamma_{\lambda\mu_D}{}^{\nu_D} e_{\mu_1\mu_2\cdots\nu_D}. \quad (11A.9)$$

利用 $e_{\mu_1\cdots\mu_D} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_D}$，式 (11A.9) 左边等于

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\lambda\sqrt{-g}\right) e_{\mu_1\cdots\mu_D}, \quad (11A.10)$$

由此式出发，并在两边同乘以 $g^{\sigma\delta}\Gamma_{\lambda\delta}{}^{\tau}$，根据式 (1A.27) 中等式的协变形式，我们就得到

$$e_{\mu_1\cdots\mu_D} g_{\sigma\tau} = e_{\tau\mu_2\cdots\mu_D} g_{\sigma\mu_1} + e_{\mu_1\tau\cdots\mu_D} g_{\sigma\mu_2} + \cdots + e_{\mu_1\mu_2\cdots\tau} g_{\sigma\mu_D}. \quad (11A.11)$$

式 (11A.8) 中反对称张量协变导数为零的一个重要的结果是反对称张量积满足微分链式规则的协变形式而不含有额外的项. 例如，三维弯曲空间中的矢量乘积

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{w})_\mu = e_{\mu\lambda\kappa} x^\lambda w^\kappa \quad (11A.12)$$

的协变导数为

$$D_\sigma(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{w}) = D_\sigma\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}\times D_\sigma\boldsymbol{w}, \quad (11A.13)$$

这就像是在平直时空中一样. 显然，这样的规则同样适用于标量积的情形

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w} = g_{\mu\nu} x^\mu \omega^\lambda, \quad (11A.14)$$

即

$$D_\sigma(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}) = D_\sigma\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}\cdot D_\sigma\boldsymbol{w}, \quad (11A.15)$$

而这正是式 (11.94) 中度规张量协变导数为零的结果. 任意一个张量 $t_{\mu\nu}$ 的行列时则由类似于式 (1A.9) 的表达式给出：

$$\begin{aligned}\det(t_{\mu\nu}) &= \frac{1}{D!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\epsilon^{\nu_1\cdots\nu_D} t_{\mu_1\nu_1}\cdots t_{\mu_D\nu_D} \\ &= -\frac{g}{D!} e^{\mu_1\cdots\mu_D} e^{\nu_1\cdots\nu_D} t_{\mu_1\nu_1}\cdots t_{\mu_D\nu_D}.\end{aligned} \quad (11A.16)$$

另一方面，$t_\mu{}^\nu$ 的行列时则等于

$$\det(t_\mu{}^\nu) = -\frac{1}{D!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_D} t_{\mu_1}{}^{\nu_1} = -\frac{1}{D!} e^{\mu_1\cdots\mu_D} e_{\nu_1\cdots\nu_D} t_{\mu_1}{}^{\nu_1}\cdots t_{\mu_D}{}^{\nu_D}, \quad (11A.17)$$

这同关系式 $\det(t_\mu{}^\nu) = \det\left(t_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu}\right) = \det(t_{\mu\nu})\, g^{-1}$ 是一致的.

协变张量 $e^{\nu_1\cdots\nu_D}$ 对明确写出行列式展开

$$\det(t_\mu{}^\nu) = \frac{1}{D} t_\mu{}^\nu M_\nu{}^\mu \quad (11A.18)$$

中的余因子 $M_\nu{}^\mu$ 十分有用. 通过与式 (11A.17) 对比，我们知道

$$M_{\nu_1}{}^{\mu_1} = -\frac{1}{(D-1)!} e^{\mu_1 \cdots \mu_D} e_{\nu_1 \cdots \nu_D} t_{\mu_2}{}^{\nu_2} \cdots t_{\mu_D}{}^{\nu_D}. \tag{11A.19}$$

于是，矩阵 $t_\mu{}^\nu$ 的逆矩阵可明确写为

$$\left(t^{-1}\right)_\nu{}^\mu = \frac{1}{\det\left(t_\mu{}^\nu\right)} M_\nu{}^\mu. \tag{11A.20}$$

类似地，对于行列式 $\det\left(t_{\mu\nu}\right)$，我们有

$$\det\left(t_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{D} t_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \tag{11A.21}$$

其中

$$\begin{aligned} M^{\mu_1\nu_1} &= \frac{1}{(D-1)!} e^{\mu_1 \cdots \mu_D} e^{\nu_1 \cdots \nu_D} t_{\mu_2\nu_2} \cdots t_{\mu_D\nu_D} \\ &= \det\left(t_{\mu\nu}\right) \left(t^{-1}\right)^{\mu_1\nu\nu_1}. \end{aligned} \tag{11A.22}$$

这对于求行列式 g 关于 $g_{\mu\nu}$ 的变分会非常有用，该变分将在以后推导式 (15.25) 中用到. 将 $g_{\mu\nu}$ 代入式 (11A.16) 中，并利用式 (11A.22) 中的第一行，我们立刻就发现

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{1}{D!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_D} \delta\left(g_{\mu_1\nu_1} g_{\mu_2\nu_2} \cdots g_{\mu_D\nu_D}\right) \\ &= \frac{1}{(D-1)!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_D} \delta g_{\mu_1\nu_1} g_{\mu_2\nu_2} \cdots g_{\mu_D\nu_D} = \delta g_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \det\left(g_{\mu\nu}\right) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{11A.23}$$

等式 $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$ 说明协变和逆变变分是反号的：

$$g^{\lambda\mu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\nu\kappa} \delta g^{\lambda\kappa}, \tag{11A.24}$$

因此 $\delta g^{\lambda\kappa} = -g^{\lambda\mu} g^{\kappa\nu} \delta g_{\mu\nu}$ 且

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{11A.25}$$

另一种推导此一结果的方法会用到

$$\det\, A = e^{\operatorname{tr} \log A}, \tag{11A.26}$$

这对于任意一个非奇异矩阵 A 都适用，从此式我们可得

$$\delta \det\, A = \det\, A\, \delta(\operatorname{tr} \log A) = \det\, A \operatorname{tr}(A^{-1} \delta A). \tag{11A.27}$$

将此式中的 A 替换为度规矩阵就可直接得到式 (11A.23).

文献与注记

更多细节请参看以下专著的第 10 章和第 11 章：

H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific, Singapore, 4th edition, 2006 (`kl/b5`),

其中`kl` 为网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的简写，同时参看下面这本书的第二部分：

H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`).

关于广义相对论的几何特性，在以下文献中有大篇幅论述：

L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Classical Field Theory* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958);

C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation* , Freeman and Co., New York, 1973;

E. Schmutzer, *Relativistische Physik*, Akad. Verlagsg. Geest und Portig, Leipzig, 1968;

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley and Sons, New York, 1972.

对于度量–仿射空间的数学阐述，请参看：

J.A. Schouten, *Ricci Calculus*, Springer, Berlin, 1954.

我们这里采用同样的记法.

本章中的参考文献如下：

[1] R. Eötvös, Math. Nat. Ber. Ungarn **8**, 65 (1890).
See also：
J. Renner, Hung. Acad. Sci. *53*, Part II (1935).

[2] 广义相对论中有些理论所基于的空间并不满足这一点. 那样的话度规张量的协变导数 $D_\lambda g_{\mu\nu} = -Q_{\lambda\mu\nu}$ 就变成一个动力学量，需要通过场方程来确定. 参看：
T. De Donder, , *La gravitation de Weyl-Eddington-Einstein*, Gauthier-Villars, Paris, 1924;
H. Weyl, Phys. Z. **22**, 473 (1921); Ann. Phys. 59, 101 (1919); 65, 541 (1921);
A.S. Eddington, Proc. Roy. Soc. **99**, 104 (1921) and *The Mathematical Theory of Relativity*, Springer, Berlin 1925.
在这样的空间中，联络定义为

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv e_a{}^{\lambda} \left(\partial_\mu - D_\mu\right) e^a{}_\nu$$

且可分解为

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv e_a{}^{\lambda} \left(\partial_\mu - D_\lambda\right) e^a_\nu = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \left(S^\lambda_{\mu\nu} - S^\lambda_{\nu\mu} + S^\lambda_{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}(Q_\mu{}^\lambda{}_\nu - Q^\lambda{}_{\nu\mu} + Q^\lambda_{\nu\mu}),$$

其中 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的定义为式 (11.107).

[3] 在之前提到的更一般得几何中，还存在一个非零的对称部分

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} + R_{\mu\nu\kappa\lambda} = [D_\mu Q_{\nu\lambda\kappa} - (\nu \leftrightarrow \mu)] + 2S_{\mu\nu}{}^{\rho} Q_{\rho\lambda\kappa} \,.$$

第 12 章　缺陷诱导的挠率和曲率

Get your facts first,
and then you can distort them as much as you please.
MARK TWAIN (1835～1910)

在第 11 章中我们看到，闵可夫斯基时空中既无挠率又无曲率. 挠率的缺失是因为它的张量性质，即这是作用于无穷小平移变换上的导数算符的对易性

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\,\xi^\kappa(x) = 0 \tag{12.1}$$

的直接结果. 而曲率为零则是由于式 (11.31) 中变换矩阵的可积条件

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\,\alpha^\kappa{}_\lambda(x) = 0. \tag{12.2}$$

对于无穷小变换，这给出

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\,\partial_\lambda\xi^\kappa(x) = 0, \tag{12.3}$$

即作用于无穷小平移变换场**导数**上的导数算符是对易的.

这同第 4 章中所讨论过的电磁理论的情形相类似. 任意一个规范函数 $\Lambda(x)$ 满足导数对易性 [参看式 (2.105)] 的规范变换 (2.104) 都不会改变时空的电磁场. 特别是，一个无场时空仍是一个无场的时空. 然而，在第 4.3 节中我们看到，我们可以通过作多值规范变换而从一个无场的时空中生成细的非零磁场流管，该规范变换是不满足施瓦茨可积条件的. 有意思的是，我们可以将这些坐标变换看作**宇宙晶体**的塑性形变. 通常的单值坐标变换则对应着宇宙晶体的弹性形变，而这并不会改变由缺陷所表征的几何特性.

在第 9 章中我们已经看到，带有缺陷的晶体的理论表述非常类似于用多值标量场描述的电磁理论. 这就意味着存在一个简单方法，可以使我们从闵可夫斯基时空出发，通过进行**多值**坐标变换来构造具有挠率或曲率或二者兼有的一般仿射时空，这种多值坐标变换很显然是不满足式 (12.1) 和式 (12.3) 的.

12.1　多值无穷小坐标变换

我们现在来研究从基标架 $e_a{}^\mu = \delta_a{}^\mu, e^a_\mu = \delta^a{}_\mu$ 通过**无穷小多值**坐标变换 $\xi^\kappa(x)$ 而得到的时空的特性. 根据式 (11.68)，新的基标架为

$$e_a{}^\mu = \delta_a{}^\mu - \partial_a \xi^\mu, \quad e^a{}_\mu = \delta^a{}_\mu + \partial_\mu \xi^a, \tag{12.4}$$

且相应的度规张量为

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e_{a\nu} = \eta_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu), \tag{12.5}$$

其中，$\eta_{\mu\nu}$ 表示闵可夫斯基度规 (1.29). 相对于式 (1.29)，我们这里需要给它这样一个不同的标记方式，这样就能同我们用希腊指标来表示曲线坐标的约定相符 (否则我们得很别扭地将之写为 $g_{ab}|_{a=\mu,b=\nu}$).

将式 (12.4) 中的基标架代入方程 (11.91) 中，我们发现仿射联络为

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \partial_\mu \partial_\nu \xi^\lambda, \tag{12.6}$$

并且由此得到的挠率张量和曲率张量为

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \xi^\lambda, \qquad R_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa = (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \partial_\lambda \xi^\kappa. \tag{12.7}$$

由于 ξ^λ 为无穷小位移，因此，我们可将上述两个方程中的最后一个指标降下来，误差只为 ξ^κ 的平方，而这对于无穷小 ξ^κ 是可以忽略的，因此有

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu \partial_\nu \xi_\lambda, \quad S_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \xi_\lambda, \quad R_{\mu\nu\lambda\kappa} = (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \partial_\lambda \xi_\kappa. \tag{12.8}$$

很显然，曲率张量对头两个指标是反对称的 [与式 (11.134) 一样].

对于奇异的 $\xi(x)$，一般来讲，相应的度规和联络也具有奇异性. 这使得自洽的长度测量及平形移动变得比较困难. 为了避免这种困难，爱因斯坦要求度规 $g_{\mu\nu}$ 及联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ 应足够的光滑以允许两个微分算子相互对易，就如之前在式 (11.137) 和式 (11.138) 中所示. 对于无穷小表示式 (12.4) 和式 (12.5)，上述特征意味着我们只能考虑满足以下条件的奇异坐标变换：

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)(\partial_\lambda \xi_\kappa + \partial_\kappa \xi_\lambda) = 0, \tag{12.9}$$

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \partial_\sigma \partial_\lambda \xi_\kappa = 0. \tag{12.10}$$

对于线性化的度规，式 (12.9) 中的可积条件再一次显示出曲率张量 (12.14) 对于后两个指标是反对称的 [参看式 (11.135)].

将式 (12.5) 代入式 (11.23)，我们就得到了联络的纯克里斯托夫部分

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\{\mu\nu, \kappa\} = \frac{1}{2}[\partial_\mu(\partial_\nu \xi_\kappa + \partial_\kappa \xi_\nu) + \partial_\nu(\partial_\mu \xi_\kappa + \partial_\kappa \xi_\mu) - \partial_\kappa(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)]. \tag{12.11}$$

由此我们就可以得到黎曼曲率张量为

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\partial_\mu[\partial_\nu(\partial_\lambda \xi_\kappa + \partial_\kappa \xi_\lambda) + \partial_\lambda(\partial_\nu \xi_\kappa + \partial_\kappa \xi_\nu) - \partial_\kappa(\partial_\nu \xi_\lambda + \partial_\lambda \xi_\nu)]$$

$$-\frac{1}{2}\partial_\nu\left[\partial_\mu\left(\partial_\lambda\xi_\kappa+\partial_\kappa\xi_\lambda\right)+\partial_\lambda\left(\partial_\nu\xi_\kappa+\partial_\kappa\xi_\nu\right)-\partial_\kappa\left(\partial_\mu\xi_\lambda+\partial_\lambda\xi_\lambda\right)\right]. \qquad (12.12)$$

根据式 (12.10) 中的可积条件，式 (12.12) 每一行中的第一项相互抵消，于是变为

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}=\frac{1}{2}\left\{\left[\partial_\mu\partial_\lambda\left(\partial_\nu\xi_\kappa+\partial_\kappa\xi_\nu\right)-(\mu\leftrightarrow\nu)\right]-(\lambda\kappa)\right\}. \qquad (12.13)$$

为完整起见，我们这里也将由式 (12.6) 得到的联络按式 (11.115) 分解为如下克里斯托夫部分和扭曲张量：

$$\Gamma_{\mu\nu\kappa}=\{\mu\nu,\kappa\}+K_{\mu\nu\kappa}, \qquad (12.14)$$

其中

$$\begin{aligned}\{\mu\nu,\kappa\}&=\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\partial_\nu\xi_\kappa\xi_\nu\right)+\frac{1}{2}\partial_\nu\left(\partial_\mu\xi_\kappa+\partial_\kappa\xi_\mu\right)-\frac{1}{2}\partial_\kappa\left(\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu\right)\\ K_{\mu\nu\lambda}&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu-\partial_\nu\partial_\mu\right)\xi_\lambda-\frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\lambda-\partial_\lambda\partial_\nu\right)\xi_\mu+\frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\mu-\partial_\mu\partial_\lambda\right)\xi_\nu\\ &=\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\partial_\nu\xi_\lambda-\partial_\lambda\xi_\nu\right)+\frac{1}{2}\partial_\lambda\left(\partial_\nu+\partial_\mu\xi_\nu\right)-\frac{1}{2}\partial_\nu\left(\partial_\lambda\xi_\mu+\partial_\mu\xi_\lambda\right).\end{aligned} \qquad (12.15)$$

如此所得到的黎曼–嘉当几何与晶体中通过原子的无穷小多值位移而得到的几何是相一致的. 这里时空的无穷小奇异变换

$$x^a\to x^\mu=\left[x^a-\xi^a\left(x^b\right)\right]\delta_a{}^\mu \qquad (12.16)$$

大体上就对应于第 9.2 节中的原子的无穷小位移

$$x_n\to x_n'=x_n+u(x_n), \qquad (12.17)$$

其中，x_n' 为相对于参考理想晶体的移动后的位置. 如果我们从内禀的角度去描述的话，即如果我们从形变后的晶体**内部**通过计算原子步数来量度坐标的话，则参考理想晶体中的原子的偏移为

$$x_n\to x_n'=x_n-u(x_n), \qquad (12.18)$$

现在，这个恰好就对应于式 (12.16) 中的变换. 因此，奇异坐标变换 $\xi^a\left(x^\lambda\right)$ 前微分算子的非对易性就完全类比于晶体位移场 $u_i(x)$ 前微分算子的非对易性. 而在晶体中，这就是缺陷存在的信号.

为了更清楚地看到这一点，我们暂时仅考虑闵可夫斯基时空中的三维平直子时空. 于是，我们就必须将物质点的物理坐标 x^a ($a=1,2,3$) 与之前的空间坐标 x_i $(i=1,2,3)$ 等同起来①，同时 $\partial_a=\partial/\partial x^a(a=i)$ 就等同于之前的导数 ∂_i. 式

① 当处理 4-矢量时，传统上都将上指标视为物理分量. 在纯粹的三维计算中我们取度规为 $g_{ab}=\delta_{ab}$，于是 $x^{a=i}$ 与 x_i 相同.

(11.143) 中的无穷小平移变换 $\xi^{a=i}(x)$ 就可看成是位移场 $u_i(x)$. 如在式 (12.4) 中一样，相应的基标架为

$$e'_a = \delta^i_a - \partial_a u_i, \quad e^a{}_i = \delta^a{}_i + \partial_i u_a, \tag{12.19}$$

同时，如式 (12.5)，度规变为

$$g_{ij} = e_{ai} e^a{}_j = \delta_{ij} + \partial_i u_j + \partial_j u_i = \delta_{ij} + 2u_{ij}. \tag{12.20}$$

很简单，联络就是

$$\Gamma_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k, \tag{12.21}$$

相应的挠率张量和曲率张量为

$$S_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i\right) u_k, \quad R_{ijkl} = \left(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i\right) \partial_k u_l. \tag{12.22}$$

可积条件 (12.9) 和 (12.10) 可以组合而成以下三个关系式：

$$\left(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i\right)\left(\partial_k u_l + \partial_l u_k\right) = 0, \tag{12.23}$$

$$\left(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i\right) \partial_n \left(\partial_k u_i + \partial_1 u_k\right) = 0, \tag{12.24}$$

$$\left(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i\right) \partial_k \left(\partial_k u_i - \partial_l u_k\right) = 0. \tag{12.25}$$

以上式子说明，应变张量、它的导数以及局域转动场的导数都是处处二次可微的单值函数. 之前的讨论认为这在晶体中应是正确的. 我们可以利用第一个条件而将曲率张量另写为

$$R_{ijkl} = \left(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i\right) \frac{1}{2}\left(\partial_k u_l - \partial_l u_k\right). \tag{12.26}$$

ij 和 kl 中的反对易性表明，在三维情形中我们可以引入一个类似于式 (11.144) 的二阶张量

$$G_{ji} \equiv \frac{1}{4} e_{ikl} e_{jmn} R^{klmn}, \tag{12.27}$$

其中，e_{ijk} 为式 (11A.7) 中定义的协变的列维 - 西维塔张量. 由于式 (1A.17) 中的恒等关系，张量 G_{ji} 与式 (11.143) 中的爱因斯坦张量是相一致的. 将式 (12.22) 中的 R_{ijkl} 代入，我们就得到了相应的线性近似

$$G_{ij} = \epsilon_{ikl} \partial_k \partial_l \left(\frac{1}{2} \epsilon_{jmn} \partial_m u_n\right). \tag{12.28}$$

圆括号中的表达式为局域转动 $\omega_j = \dfrac{1}{2} \epsilon_{jmn} \partial_m u_n$，即该爱因斯坦曲率张量可以写为

$$G_{ji} = \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l\omega_j. \tag{12.29}$$

针对黎曼曲率张量 $\bar{R}_{ijkl}$，我们也来构造相应的爱因斯坦张量 $\bar{G}_{ij}$. 利用式 (12.13) 我们有

$$\bar{G}_{ji} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m \frac{1}{2}\left(\partial_l u_n + \partial_n u_l\right). \tag{12.30}$$

在讨论晶体缺陷时我们引入了如下关于导数非对易性的量度. 位错密度

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l u_j, \tag{12.31}$$

旋错密度

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ikl}\partial_k\partial_l, \omega_j \tag{12.32}$$

以及缺陷密度

$$g_{ij} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\partial_k\partial_m u_{lm}. \tag{12.33}$$

将之同式 (12.13) 比较可知 α_{ij} 与挠率张量 $S_{kl}{}^{i} = \dfrac{1}{2}\left(\varGamma_{kl}{}^{i} - \varGamma_{lk}{}^{i}\right)$ 有直接的联系：

$$\alpha_{ij} \equiv \epsilon_{ikl}\varGamma_{klj} \equiv \epsilon_{ikl}S_{klj}. \tag{12.34}$$

因此，挠率给出了包含在多值坐标变换中的平移缺陷的量度，而这可以看成是我们宇宙晶体中弹性形变和塑性形变的叠加.

基于克里斯托夫符号 $\{kl, j\}$ 关于 kl 的对称性，我们也可以利用分解式 (11.115) 而将式 (12.34) 写为

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ikl}K_{klj}, \tag{12.35}$$

其中，K_{klj} 为扭曲张量. 它可用位移场 $u(x)$ 表示为

$$\begin{aligned} K_{ijk} =& \frac{1}{2}\partial_j\left(\partial_j u_k - \partial_k u_j\right) - \frac{1}{2}\left[\partial_j\left(\partial_k u_j + \partial_i u_k\right) - (j \leftrightarrow k)\right] \\ =& \partial_i\omega_{jk} - \left(\partial_j u_{ki} - \partial_k u_{ji}\right). \end{aligned} \tag{12.36}$$

由于 K_{ijk} 对于指标 jk 是反对称的，我们因此可以引入一个有用的二阶张量

$$K_{ln} = \frac{1}{2}K_{klj}\epsilon_{ljn}, \tag{12.37}$$

称为Nye **扭曲张量**. 将此代入式 (12.35)，我们得

$$\alpha_{ij} = -K_{ji} + \delta_{ij}K_{ll}. \tag{12.38}$$

利用位移场及旋转场，我们有

$$K_{il} = \partial_i \omega_l - \epsilon_{lkj} \partial_j u_{kj}. \tag{12.39}$$

现在我们来考查旋错密度 θ_{ij}. 比较式 (12.33) 和式 (12.29)，我们发现它同由完整的曲率张量所构造的爱因斯坦张量 G_{jl} 是完全一致的：

$$\theta_{ij} \equiv G_{ji}. \tag{12.40}$$

最后，缺陷密度 (12.33) 与由黎曼曲率张量所构造的爱因斯坦张量相一致：

$$\eta_{ij} = \bar{G}_{ij}. \tag{12.41}$$

因此，我们可以得出如下结论：带有微小挠率和曲率的时空可以由闵可夫斯基时空通过奇异坐标变换来构造. 这完全等同于一个在塑性变形后充满位错和旋错的晶体.

在闵可夫斯基时空中，自由粒子的轨迹是直线. 而在含有缺陷的时空中，这已变得不可能，而粒子也只能走尽可能直的路径. 在爱因斯坦理论中，引力场中质点的运动由度规 $g_{\mu\nu}$ 所定义的几何中的最短路径原则给出. 这里，度规包含了宇宙晶体中所有的引力效应. 关于粒子在宇宙晶体中的运动，我们将在第 14 章中讨论.

引力中的一个自然的长度量度是**普朗克长度**，该长度量度可通过将牛顿引力常数 $G_{\rm N} \approx 6.673 \times 10^{-8}\ {\rm cm}^3/({\rm g{\cdot}s}^2)$ [参看式 (1.3)] 、光速 c ($\approx 3 \times 10^{10}$ cm/s) 以及普朗克常量 $\hbar$ ($\approx 1.05459 \times 10^{-27}$ erg/s) 组合而得到

$$l_{\rm P} = \left(\frac{c^3}{G_{\rm N} \hbar} \right)^{-1/2} \approx 1.616 \times 10^{-33} {\rm cm}. \tag{12.42}$$

这个普朗克长度是一个极其微小的量. 它是原子尺度的 10^{-25}，这个比值差不多就是一个原子半径 ($\approx 10^{-8}$ cm) 同太阳系半径 ($\approx 10^{10}$ km) 的比值. 这样一个小的尺度已远远超出了目前甚至未来很长一段时间内的任何试验的精度. 目前的粒子加速器所能探测到的最小的长度比 $l_{\rm P}$ 还要大 10 个量级. 考虑到加速器随能量升高而迅速增长的花费，我们无法想象有任何可能性能在若干代后探测到接近普朗克长度的尺度. 因此，这个长度就可看作实验上所能接受的最小的长度. 也正因为此，很容易想象，普朗克长度 $l_{\rm P}$ 可看作我们所提的含缺陷的宇宙晶体的晶格常数，而这样做并不会引起任何实验上的冲突.

与康普顿波长为 $l_{\rm P}$ 相应的质量为

$$\begin{aligned} m_{\rm P} &= \frac{\hbar}{c l_{\rm P}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{\rm N}}} = 1.221\,047(79) \times 10^{19} {\rm GeV} \\ &= 0.021\,7671(14)\,{\rm mg} = 1.30138(6) \times 10^{19} m_{\rm proton}, \end{aligned} \tag{12.43}$$

称为**普朗克质量**. 它比质子的质量大 19 个量级，远大于任何一个基本粒子的质量.

12.2 非完整坐标变换示例

这里，我们将给出几个关于从平直时空到带有曲率和挠率的时空的多值映射 $x^\mu(x^a)$ 的清晰的例子，这对于我们的理解以及以后的讨论会很有帮助. 我们将针对实际的物理情形来进行讨论. 为简便起见，我们来考虑二维情形，并想象有一个理想晶体，它的原子位置为 $x^a = \left(n^1, n^2\right) \cdot b$，它具有一个无穷小的晶格常数 b.

12.2.1 位错

最简单的晶体缺陷的例子就是如图 12.1 中所示的**刃位错**. 这个映射将晶格格点变换到一个新的形变的位置上，它的笛卡儿坐标为 $x^\mu(x^a)$. 这两幅图之间并不存在一一映射，因为在中间 $x^1 < 0, x^2 = 0$ 的水平面中所多处来的原子在 x^a 时空中并没有对应. 在无穷小伯格斯矢量的连续统极限下，此映射可以用如下**多值**函数来描述：

$$\bar{x}^1 = x^1, \quad \bar{x}^2 = x^2 - \frac{b}{2\pi}\phi, \tag{12.44}$$

其中

$$\phi(x) = \arctan\frac{x^2}{x^1} \tag{12.45}$$

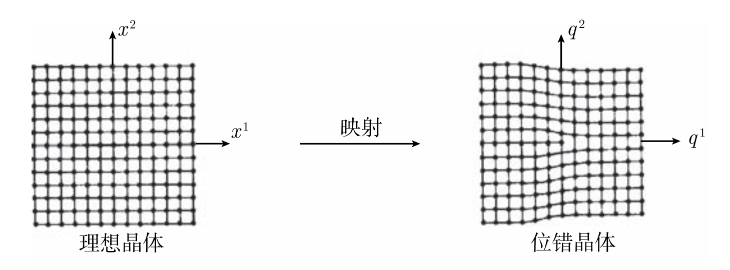


图 12.1 晶体中缺失的半无界原子层所对应的刃位错是挠率的源. 由理想晶体到含位错的晶体的多值映射会在像空间引入一个 δ 函数形式的挠率

具有多值定义的 arctan. 在物理的黎曼面上，对于 $x^1 = 0, x^2 = \pm\epsilon$，它等于 $\pm\pi$. 它的微分形式为

$$\mathrm{d}\bar{x}^1 = \mathrm{d}x^1 \tag{12.46}$$

$$\mathrm{d}\bar{x}^2 = \mathrm{d}x^2 + \frac{b}{2\pi}\frac{1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}\left(x^2\mathrm{d}x^1 - x^1\mathrm{d}x^2\right), \tag{12.47}$$

其基标架为 $e^a{}_\mu = \partial\bar{x}^a/\partial x^\mu$ 为

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{b}{2\pi}\dfrac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & -\dfrac{b}{2\pi}\dfrac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2} \end{pmatrix}. \tag{12.48}$$

我们这里采用了 $\bar{x}^a \equiv x^a$ 这种记法是为了将 $x^{a=1,2}$ 与 $x^{\mu=1,2}$ 区别开来.

现在，我们在 x^μ 空间中环绕原点的闭合回路 $C\ (x^\mu)$ 所构成的伯格斯回路上对 $\mathrm{d}x^\mu$ 进行积分，

$$b^a = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}\bar{x}^a = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^\mu \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\mu} = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^\mu e^a{}_\mu. \tag{12.49}$$

将式 (12.46) 和式 (12.47) 代入，我们发现

$$b^1 = \oint_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^{\bar{1}} = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^\mu \frac{\partial x^{\bar{1}}}{\partial x^\mu} = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^\mu e^1{}_\mu = 0, \tag{12.50}$$

$$b^2 = \oint_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^{\bar{2}} = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^\mu \frac{\partial x^{\bar{2}}}{\partial x^\mu} = \int_{C(x^\mu)} \mathrm{d}x^\mu e^2{}_\mu = -b. \tag{12.51}$$

我们很容易可以算出与多值映射 (12.46) 和 (12.47) 相关的挠率张量 $S^a_{\mu\nu}$. 由于其反对称性，只有 $S_{12}{}^1$ 和 $S_{12}{}^2$ 是独立的. 于是有

$$\begin{aligned} S_{12}{}^2 &= \partial_1 e^2_2 - \partial_2 e^2_1 = \partial_1 \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} - \partial_2 \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = -b\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}), \\ S^1_{12} &= \partial_1 e^1_2 - \partial_2 e^1_1 = \partial_1 \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} - \partial_2 \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = 0. \end{aligned} \tag{12.52}$$

我们可利用伯格斯矢量 $b^a = (0, b)$ 将此结果写为

$$S^a_{\mu\nu} = b^a \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}). \tag{12.53}$$

现在我们再来计算此缺陷的曲率张量，它的表达式为

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = e_{a\kappa}\left(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu\right) e^a_\lambda. \tag{12.54}$$

因为式 (12.48) 中的 $e^a{}_\mu$ 是单值的，因此作用于其上的微分算子对易. 于是 $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 恒为零，即

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} \equiv 0. \tag{12.55}$$

这说明，单纯的位错只能产生挠率而无法给出曲率.

12.2.2　旋错

作为多值映射的第二个例子，我们利用多值函数 (12.45) 通过以下变换：

$$x^{\bar{i}} = \delta^i{}_\mu [x^\mu + \varOmega \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \phi(x)] \tag{12.56}$$

来产生曲率. 这里的符号 $\epsilon_{\mu\nu}$ 表示反对称的列维–西维塔张量. 变换后的度规

$$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}-\frac{2\Omega}{x^\sigma x_\sigma}\epsilon_{\mu\nu}\epsilon^{\mu}{}_{\lambda}\epsilon^{\nu}{}_{\kappa}x^\lambda x^\kappa \tag{12.57}$$

是单值的，且加在它上面的微分算子是对易的. 相应的挠率张量为零，因为 $(\partial_1\partial_2-\partial_2\partial_1)x^{1,2}$ 正比于 $x^{2,1}\delta^{(2)}(x)=0$. 另外，局域旋转场 $\omega(x)\equiv\dfrac{1}{2}(\partial_1x^2-\partial_2x^1)$ 等于多值函数 $-\Omega\phi(x)$，因此具有非对易导数关系：

$$(\partial_1\partial_2-\partial_2\partial_1)\omega(x)=-2\pi\Omega\delta^{(2)}(x). \tag{12.58}$$

展开至 Ω 的最低阶，这就给出了曲率张量，在二维情形中它只有一个独立分量，比方说 R_{1212}. 利用 $g_{\mu\nu}$ 的导数对易的事实，R_{1212} 可写为

$$R_{1212}=(\partial_1\partial_2-\partial_2\partial_1)\omega(x). \tag{12.59}$$

在缺陷物理中，式 (12.56) 中的映射与旋错相联，该旋错对应于张角为 Ω 的一块儿完全从理想晶格点阵中抽离的情形 (图 12.2).

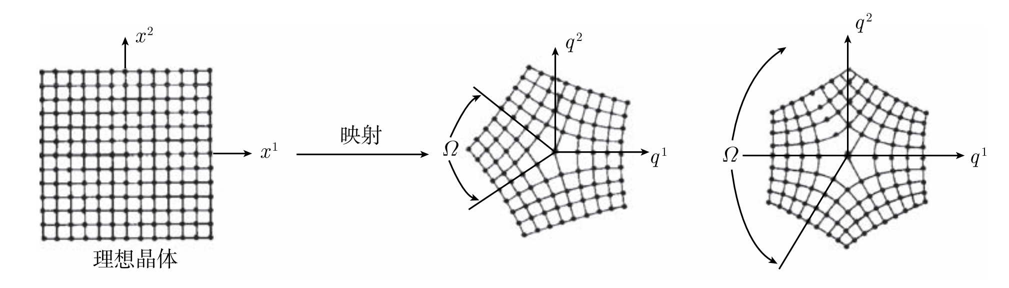


图 12.2　晶体中对应于张角为 Ω 的缺失的半无界原子区域的楔形旋错. 由理想晶体到具有旋错的晶体的多值映射会在像空间引入一个 δ 函数类型的曲率

12.3　仿射空间的微分几何特性

至此，我们只研究了通过无穷小缺陷由闵可夫斯斯基时空而得的仿射时空. 实际上，缺陷可堆积起来，且一个完整的仿射时空的构建需要非线性形式. 这正是我们这里准备讨论的.

12.3.1　度规和仿射联络的可积性

一般来讲，仿射时空可用与方程 (12.9) 和 (12.10) 中所给出的具有无穷小缺陷的时空的同样类型的可积条件来表征. 在非线性表述下，此条件将加在度规和仿射联络上：

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, g_{\lambda\kappa} = 0, \tag{12.60}$$

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, \Gamma^{\kappa}_{\sigma\lambda} = 0. \tag{12.61}$$

我们知道，第一个条件保证了曲率张量关于最后两个指标的反对称性 [参看式 (11.135)]. 将第二个式子对指标 $\sigma\lambda$ 进行反对称化，我们就可将此条件用如下挠率张量的可积条件替换掉：

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, S_{\sigma\lambda}{}^{\kappa} = 0. \tag{12.62}$$

另外，利用式 (11.115) 中的分解，可以看到，克里斯托夫符号也是可积的：

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu) \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \sigma\lambda \end{array} \right\} = 0. \tag{12.63}$$

方程 (12.24) 还有一个非线性形式：

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, \partial_\sigma g_{\lambda\kappa} = 0. \tag{12.64}$$

为了证明此式，我们注意到可积函数 f 和 g 的乘积也是可积的，因为

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\nu)\,(fg) = [(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, f]\, g + f\,(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, g = 0. \tag{12.65}$$

由于 $g_{\lambda\kappa}$ 的导数可以表示为克里斯托夫符号和度规张量乘积的和的形式，而这是可积的，所以方程 (12.64) 确实成立. 因此，考虑到式 (12.60) 中度规张量的可积性，可知方程 (12.63) 和 (12.64) 是等价的.

12.3.2　局域平行

为了理解上述一般仿射时空的几何特性，我们首先来引入一个概念叫做**局域平行** (local parallelism).

考虑一个矢量场 $\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{e}_a v^a(x)$，它在惯性参考系中是平行的，简单来讲，就是所有的矢量都指向同一个方向. 很简单，这就意味着 $\partial_b \boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{e}_a \partial_b v^a = 0$. 但是，当变到 x^μ 坐标系中后我们发现

$$\partial_b v^a = \partial_b e^a_\mu v^\mu = e_b{}^\nu \partial_\nu \left(e^a_\mu v^\mu\right) = e^\nu_b e^a_\mu D_\nu v^\mu = 0. \tag{12.66}$$

这就是说平行矢量场的局域分量 v^μ 的协变微商为零：

$$D_\nu v^\mu = \partial_\nu v^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu v^\lambda = 0. \tag{12.67}$$

类似地，我们发现：

$$D_\nu v_\mu = \partial_\nu v_\mu - \Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda v_\lambda = 0. \tag{12.68}$$

请注意，按其构造 [参看式 (11.93)]，我们知道基标架 e^{ν}_{a} 和 e^{a}_{ν} 为平行矢量场.

我们现在来一般性地讨论如下情形：给定一个任意的联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$，我们首先要问，在什么条件下才有可能在全时空中找到一个平行矢量场. 为了回答这一问题，我们来考察矢量场 $v^{\mu}(x)$ ，它在 x_0 点的值为 $v^{\mu}(x_0)$. 现在，我们把它移动到附近的某个位置 $x_0+\mathrm{d}x$ 上. 在该点此矢量场的分量为

$$v^{\mu}\left(x_0+dx\right)=v^{\mu}(x_0)+\partial_{\nu}v^{\mu}(x_0)d^{\nu}_{x}. \tag{12.69}$$

如果 $v^{\mu}(x)$ 是一个平行矢量场的话，则 $D_{\nu}v^{\mu}=0$，它的导数就满足如下关系：

$$\partial_{\nu}v^{\mu}=-\Gamma_{\nu\kappa}{}^{\mu}v^{\kappa}. \tag{12.70}$$

只有当满足下面这个施瓦茨判据：

$$\left(\partial_{\lambda}\partial_{\nu}-\partial_{\nu}\partial_{\lambda}\right)v^{\mu}=0 \tag{12.71}$$

时上述微分方程才在有限区域上可积. 如果我们对下式进行计算：

$$\left(\partial_{\lambda}\partial_{\nu}-\partial_{\nu}\partial_{\lambda}\right)v^{\mu}=-\partial_{\lambda}\left(\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}v^{\kappa}\right)+\partial_{\nu}\left(\Gamma_{\lambda\kappa}{}^{\mu}v^{\kappa}\right), \tag{12.72}$$

我们发现，当再次利用式 (12.70) 后，

$$-\left(\partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\kappa}{}^{\mu}-\partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\kappa}{}^{\mu}\right)v^{\kappa}-\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}\partial_{\lambda}v^{\kappa}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}\partial_{\nu}v^{\kappa} \tag{12.73}$$

变为

$$\left(\partial_{\lambda}\partial_{\nu}-\partial_{\nu}\partial_{\lambda}\right)v^{\mu}=-R_{\lambda\nu\kappa}{}^{\mu}v^{\kappa}. \tag{12.74}$$

因此，只有当曲率张量在时空各点处处为零时才存在全空间的平行矢量场 $v^{\mu}(x)$.

如果 $R_{\lambda\nu\kappa}$ 不为零，平行矢量的概念是无法在任何有限尺度上从闵可夫斯基时空延伸到一般仿射时空上. 这样的时空就说是**弯曲的**. 因此我们说，在弯曲时空中不存在**绝对平行** (teleparallelism).

我们之前已经说明，这是存在旋错的情形. 旋错可导致曲率，即含有旋错的晶体在微分几何的意义上来说是弯曲的.

这是根据我们之前探讨的结果，即旋错密度 θ_{ij} 与爱因斯坦曲率张量 G_{ij} 相一致.

在图 12.3 中我们还看到，尽管存在旋错，我们还是可以定义**局域平行**的矢量场. 其条件就是该矢量场的协变导数在点 x_0 处为零：$D_{\nu}v^{\mu}(x_a)=0$. 如果满足此条件，则临近的矢量 $v^{\mu}(x)$ 与 $v^{\mu}(x_0)$ 最多相差 $(x-x_0)^2$，而不是像非平行矢量那样相差 $(x-x_0)$. 为了更加细致地看清楚这一点，我们在 x^{μ} 坐标中画一个无穷小四边形 $ABCD$，它的各边为 $AB=\mathrm{d}x^{\mu}_{1}=DC$ 以及 $BC=\mathrm{d}x^{\mu}_{2}=AD$ (图 12.3). 现在

我们来比较 $v^\mu(x)$ 在绕此转一周前后的方向. 当它经由 x^μ 处 A 点到 $x^\mu + \mathrm{d}x_1^y$ 处 B 点，该矢量的分量将从 $v_1^\mu = v^\mu(x)$ 变为

$$v_B^\mu = v^\mu\left(x^\mu + \underset{1}{x}{}^\nu\right) = v_1^\mu + \partial_\nu v^\mu \mathrm{d}\underset{1}{x}{}^\nu v_A{}^\mu - \overset{A}{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^\mu v^\lambda \mathrm{d}\underset{1}{x}{}^\nu. \tag{12.75}$$

当继续前行到 $x^\mu + \mathrm{d}\underset{1}{\overset{\mu}{x}} + \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\mu}{x}}$ 处的 C 点，我们有

$$\begin{aligned}
v_C{}^\mu &= v_B{}^\mu - \overset{B}{\Gamma}_{\tau\kappa}{}^\mu v_B{}^\kappa \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^\tau \\
&= v_A{}^\mu - \overset{A}{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^\mu v^\lambda \mathrm{d}\underset{1}{x}{}^\nu - \overset{B}{\Gamma}_{\tau\kappa}{}^\mu v_A{}^\kappa \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^\tau + \overset{B}{\Gamma}_{\tau\kappa}{}^\mu \overset{A}{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^\kappa v_A \mathrm{d}\underset{1}{\overset{\nu}{x}} \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^\tau \\
&= v_A^\mu - \overset{A}{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^\mu v^\lambda \left(\mathrm{d}\underset{1}{x}{}^\nu + \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^\nu\right) - \partial_\nu \overset{A}{\Gamma}_{\tau\kappa}{}^\mu v_A^\kappa \mathrm{d}\underset{1}{x}{}^\nu \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^\tau \\
&\quad + \overset{A}{\Gamma}_{\tau\kappa}{}^\mu \overset{A}{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^\kappa v_A^\lambda \mathrm{d}\underset{1}{x}{}^\nu \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^\tau + \mathcal{O}\left(\mathrm{d}x^3\right).
\end{aligned} \tag{12.76}$$

我们现在沿 ADC 再重复上述过程，可以得到同样形式的结果，只不过需将 $\mathrm{d}\underset{1}{x}$ 和 $\mathrm{d}\underset{2}{x}$ 互换. 这两个结果的差为

$$v_{ABC}^\mu - v_{ADC}^\mu = -\frac{1}{2} R_{\nu\tau\kappa}{}^\mu v_a{}^\kappa \mathrm{d}s^{\nu\tau} + \mathcal{O}\left(\mathrm{d}x^3\right), \tag{12.77}$$

其中，$\mathrm{d}s^{\nu\tau} = \left(\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\nu}{x}} \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\tau}{x}} - \mathrm{d}\underset{1}{\overset{\tau}{x}} \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\nu}{x}}\right)$ 为该四边形的无穷小面元.

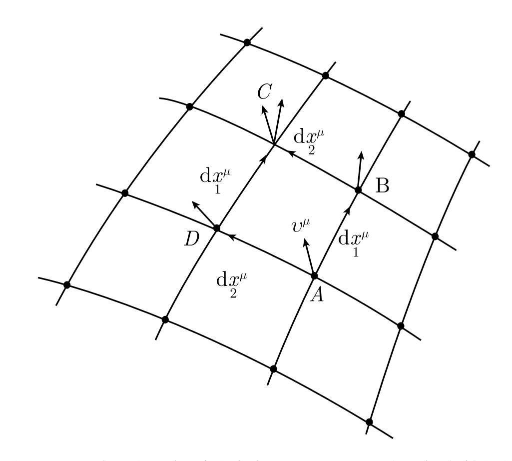
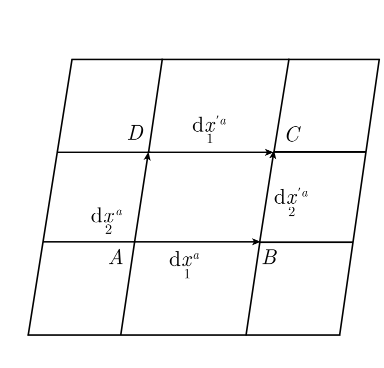


图 12.3 矢量沿闭合回路 $ABCD$ 平行移动的图示

对于挠率特性 $S_{\mu\nu}{}^\lambda \neq 0$，也存在类似的几何描述. 考虑一个带有刃位错的晶体 (图 12.1). 我们现在来把注意力集中于理想的参考晶体 (即其坐标标架为 $\boldsymbol{e}^a$) 中的一个平行四边形状的闭合回路，并且假定它在 $\boldsymbol{e}^\mu$ 标架中的像环绕该位错线 (参看图 12.4).



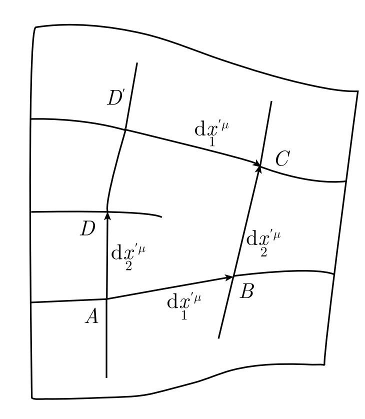


图 12.4　插入一个刃位错后平行四边形不再闭合

在构造位错的 Volterra 手续中，参考晶体会被切开然后再插进一层原子. 在此过程中，原来的平行四边形被打开，于是在相应的含位错的晶体中这切开的两端之间将有一个间隙. 这个间隙矢量正是伯格斯矢量. 具体来说，我们令此理想晶体中的平行四边形由矢量 $AB = \mathrm{d}\underset{1}{\overset{a}{x}} = DC$ 和 $AD = \mathrm{d}\underset{a}{\overset{2}{x}} = BC$ 张成. 而在破缺的时空 x^μ 中，它们变为 $AB = \mathrm{d}\underset{1}{\overset{\mu}{x}}$，$AD = \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\mu}{x}}$，$D'C = \mathrm{d}\underset{1}{\overset{\prime}{x}}{}^{\mu}$ 以及 $BC = \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\prime}{x}}{}^{\mu}$. 由于 $\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\prime}{x}}{}^{\mu}$ 和 $\mathrm{d}\underset{2}{\overset{\prime}{x}}{}^{\mu}$ 在理想的参考晶体中是平行的，它们是平行矢量，即当由 A 转到 B 后矢量 $v^\mu(x) = \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\mu}{x}}$ 和 $v^\mu\left(x^\mu + \mathrm{d}\underset{1}{\overset{\mu}{x}}\right)$ 满足关系 (12.70)，也即 $\partial_\nu \mathrm{d}\underset{2}{\overset{\mu}{x}} = -\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu}\mathrm{d}\underset{2}{\overset{\lambda}{x}}$，因此

$$\mathrm{d}x_2'{}^{\mu} = \mathrm{d}\underset{2}{x}{}^{\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu}\mathrm{d}\underset{2}{x}{}^{\nu}\mathrm{d}\underset{2}{x}{}^{\lambda}. \tag{12.78}$$

类似地，矢量 $\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\mu}{x}}$ 和 $\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\prime}{x}}{}^{\mu}$ 也是平行的，因此有如下关系：

$$\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\prime}{x}}{}^{\mu} = \mathrm{d}\underset{1}{x}{}^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\mathrm{d}\underset{2}{\overset{\nu}{x}}\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\lambda}{x}}. \tag{12.79}$$

由此，我们得

$$b^\mu = \left(\mathrm{d}\underset{2}{\overset{\prime}{x}} + \mathrm{d}\underset{1}{x}\right)^{\mu} - \left(\mathrm{d}\underset{1}{\overset{\prime}{x}} + \mathrm{d}\underset{2}{x}\right)^{\mu} = -S_{\nu\lambda}{}^{\lambda}\mathrm{d}s^{\nu\lambda}. \tag{12.80}$$

在闵可夫斯基时空中，挠率为零，因此这个像也是一个闭合的平行四边形. 爱因斯坦认为引力时空中是不存在挠率的.

12.4　具有曲率和挠率的仿射空间中的回路积分

为了构建与晶体中旋错和位错回路定义的联系，我们现在用回路积分来重新描述式 (12.77) 和式 (12.80) 中的微分结果.

12.4.1　平行矢量场的回路积分

给定一个局域平行的矢量 $v^\mu(x)$ ，即它满足 $D_\nu v^\mu(x)=0$，我们来考虑它沿一个闭合回路的变化

$$\Delta v^\mu=\oint \mathrm{d}v^\mu(x)=\oint \mathrm{d}x^\nu\partial_\nu v^\mu(x). \tag{12.81}$$

将 C 分解为一个无穷小面元的大集合，利用式 (12.77) 我们就得到

$$\Delta v^\mu=\oint_{C(x^\mu)}\mathrm{d}x^\nu\partial_\nu v^\mu=-\frac{1}{2}\int_{S(x^\mu)}\mathrm{d}s^{\tau\nu}R_{\tau\nu\kappa}{}^\mu(x)v^\kappa(x). \tag{12.82}$$

注意，标架场 e_a^μ 按定义是局域平行的，因此它们满足

$$\Delta e_a{}^\mu=-\oint_{C(x^\mu)}\mathrm{d}x^\nu\partial_\nu e_a{}^\mu=-\frac{1}{2}\int_{S(x^\mu)}\mathrm{d}s^{\tau\nu}R_{\tau\nu\kappa}{}^\mu(x)e_a^\kappa(x). \tag{12.83}$$

事实上，这个关系可直接由斯托克斯定理得到

$$\begin{aligned}\Delta e_a^\mu&=\oint_{C(x^\mu)}\mathrm{d}x^\nu\partial_\nu e_a{}^\mu=\oint_{C(x^\mu)}\mathrm{d}s^{\tau\nu}\partial_\tau\partial_\nu e_a{}^\mu\\&=-\frac{1}{2}\oint_{S(x^\mu)}\mathrm{d}s^{\tau\nu}R_{\tau\upsilon\kappa}{}^\mu e_a{}^\kappa.\end{aligned} \tag{12.84}$$

对于一个无穷小回路，我们可以将标架从积分中移出，于是有

$$\Delta e_a{}^\mu\approx\left\{-\frac{1}{2}\oint_{S(x^\mu)}\mathrm{d}s^{\tau\nu}R_{\tau\upsilon\kappa}{}^\mu\right\}e_a{}^\kappa\equiv\omega^\mu{}_\kappa e^\kappa{}_a. \tag{12.85}$$

由于 $R_{\epsilon\nu\kappa\mu}$ 对于指标 $\kappa\mu$ 的反对称性，矩阵 $\omega_{\mu\kappa}=g_{\mu\lambda}\omega^\lambda{}_\kappa$ 是反对称的. 因此，$\omega^\mu{}_\kappa$ 可看作无穷小局域洛伦兹变换的参量. 在三维情形中，此即局域转动，这与我们之前所看到的相一致：曲率对应于旋错，它为转动缺陷.

12.4.2　坐标的回路积分

现在，我们来讨论挠率的积分的特性. 为此，我们来看一个惯性标架下的一个任意的闭合回路 $C(x^a)$ (这推广了我们在之前讨论中用到的平行四边形). 在含缺陷的时空中，该回路的像为 $C'(x^a)$，这个像可能是不闭合的. 为了找到其中的差别，我们来做如下积分：

$$\Delta x^\mu=\oint_{C(x^a)}\mathrm{d}x^\mu=\oint_{C(x^a)}\mathrm{d}x^a\frac{\partial x^\mu}{\partial x^a}=\oint_{C(x^a)}\mathrm{d}x^a e_a{}^\mu(x^a). \tag{12.86}$$

利用斯托克斯定理，此式变为

$$\frac{1}{2}\int_{C(x^a)}\mathrm{d}s^{ab}\left(\partial_a e_b{}^\mu-\partial_b e_a{}^\mu\right)=\frac{1}{2}\oint_{S(x^a)}\mathrm{d}s^{ab}\left(e_a{}^\nu\partial_\nu e_b{}^\mu-(a\leftrightarrow b)\right)=-\oint\mathrm{d}s^{ab}S_{ab}{}^\mu, \tag{12.87}$$

其中

$$S_{ab}{}^{\mu} = -\frac{1}{2} e_a{}^{\nu} \left[\partial_\nu e_b{}^{\mu} - (a \leftrightarrow b)\right] \tag{12.88}$$

可通过将挠率张量 $S_{\lambda\kappa}{}^{\mu}$ 的下指标由局域形式变到惯性标架下而得

$$\begin{aligned} S_{ab}{}^{\mu} &= e_a{}^{\lambda} e_b{}^{\kappa} S_{\lambda\kappa}{}^{\mu} = -\frac{1}{2} \left\{ e_a{}^{\lambda} e_b{}^{\kappa} \left[e^c{}_{\kappa} \partial_\lambda e_c{}^{\mu} - (a \leftrightarrow b) \right] \right\} \\ &\equiv -\frac{1}{2} \left[e_a{}^{\lambda} \partial_\lambda e_b{}^{\mu} - (a \leftrightarrow b) \right]. \end{aligned} \tag{12.89}$$

如果将标架矢量看作外部坐标 x^a 的函数的话，我们还可利用 $e_a{}^{\lambda}\partial_\lambda = \partial_a$ 而将 $S_{ab}{}^{\mu}$ 进一步写为

$$S_{ab}{}^{\mu} \equiv -\frac{1}{2} \left[\partial_a e_b{}^{\mu} - (a \leftrightarrow b)\right]. \tag{12.90}$$

有时，人们也将上面的爱因斯坦指标 μ 变换为洛伦兹指标 c 而考虑如下的量：

$$S_{ab}{}^{c} = e^c{}_{\mu} S_{ab}{}^{\mu} = -\frac{1}{2} \left[e^c{}_{\mu} \partial_a e_b{}^{\mu} - (a \leftrightarrow b) \right]. \tag{12.91}$$

如果不存在挠率的话，则式 (12.87) 中的积分为零. 否则，闭合回路 $C(x^a)$ 的像会存在一个空隙，这就给出了伯格斯矢量的定义

$$b^{\mu} = \int_{C'(x^{\mu})} \mathrm{d}x^{\mu} = -\oint_{C(x^a)} \mathrm{d}s^{ab} S_{ab}{}^{\mu}. \tag{12.92}$$

12.4.3　闭合破损及伯格斯矢量

需要指出的是，我们应从同上面所述相反的方法来进行量度曲率和挠率的回路积分，即在时空 x^{μ} 中作一个围绕缺陷的回路 $C(x^{\mu})$，然后来讨论该回路在理想参考晶体中的像回路 $C'(x^a)$ 的特性. 挠率给出该像回路 $c'(x^a)$ 无法闭合的程度. 该**闭合破损**(closure failure) 由伯格斯矢量给出，即

$$b^a = \int_{c'(x^a)} \mathrm{d}x^a = \int_{c(x'\mu)} \mathrm{d}x^{\mu} \frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu}} = \int_{c(x^{\mu})} \mathrm{d}x^{\mu} e^a{}_{\mu}, \tag{12.93}$$

利用斯托克斯定理，这可重新写为

$$b^a \int_{S(x^{\mu})} \mathrm{d}s^{\nu\mu} \partial_\nu e^a{}_{\mu} = \int_{S(x^{\mu})} \mathrm{d}s^{\nu\mu} S_{\nu\mu}{}^{a}. \tag{12.94}$$

张量 $S_{\mu\nu}{}^{a} \equiv S_{\nu\mu}{}^{\lambda} e^a_\lambda = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu\right)$ 可以通过爱因斯坦指标和局域洛伦兹指标之间的交换而同式 (12.90) 联系在一起.

12.4.4　针对曲率的另一个回路积分

可以用一个类似的回路积分来表征坐标 x^a 下所看到的曲率. 为此，我们引入与 $R_{\mu\nu\rho}{}^{\kappa}$ 相关的局域洛伦兹张量：

$$R_{abc}{}^{d} \equiv e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e_c{}^{\lambda} e^d{}_{\kappa} R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}. \tag{12.95}$$

于是这个回路积分为

$$\Delta e_a{}^{\mu} = -\frac{1}{2}\int_{S(x^\mu)} \mathrm{d}s^{ed} R_{eda}{}^{b} e_b{}^{\mu}. \tag{12.96}$$

如果希望能直接在 x^a 时空利用微分表达式将此积分算出来的话，我们必须清楚，在多值映射 $x^a \to x^\mu$ 下，$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 并不按张量来变换. 事实上，一个简单的计算就可给出

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa} &= e_a{}^{\kappa}\left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right) e^d{}_{\lambda}\\
&= e_d{}^{\kappa}\left[e^a{}_{\mu}\partial_a e^b{}_{\nu}\partial_b - (\mu\leftrightarrow\nu)\right] e^d{}_{\lambda}\\
&= e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} e_d{}^{\kappa}\left(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a\right) e^d{}_{\lambda} + \left[e^a{}_{\mu} e_d{}^{\kappa}\left(\partial_a e^b{}_{\nu}\right)\left(\partial_b e^d{}_{\lambda}\right) - (\mu\leftrightarrow\nu)\right]\\
&= e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu}\tilde{R}_{ab\lambda}{}^{\kappa} + \left[e^a{}_{\mu} e_d{}^{\kappa} e_a{}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}{}^{b} e_b{}^{\tau}\Gamma_{\tau\lambda}{}^{d} - (\mu\leftrightarrow\nu)\right]\\
&= e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu}\tilde{R}_{ab\lambda}{}^{\kappa} + \left[\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\kappa} - (\mu\leftrightarrow\nu)\right]\\
&= e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu}\tilde{R}_{ab\lambda}{}^{\kappa} + 2S_{\mu\nu}{}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}{}^{\kappa},
\end{aligned} \tag{12.97}$$

其中

$$\tilde{R}_{ab\lambda}{}^{\kappa} \equiv e_d{}^{\kappa}\left(\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a\right) e^d{}_{\lambda} \tag{12.98}$$

可按式 (11.130) 中 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 同样的方法得到，不过需要将 ∂_μ 替换为 ∂_a. 类似于式 (12.90)，我们也将挠率 $S_{\mu\nu}{}^{\sigma}$ 用微分算子 $\partial/\partial x^a = \partial_a$ 表示为

$$S_{\mu\nu}{}^{\sigma} = e^a_{\mu} e^b{}_{\nu} e_c{}^{\sigma} S_{ab}{}^{c}. \tag{12.99}$$

同样，我们也可定义仿射联络为

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma} \equiv e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} e_c{}^{\sigma}\Gamma_{ab}{}^{c}, \tag{12.100}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ab}{}^{c} &= e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e^c{}_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = -e_a{}^{\mu} e_b{}^{\nu} e^c{}_{\lambda} e^d{}_{\nu}\partial_\mu e_d{}^{\lambda} = -e_a{}^{\mu} e^c{}_{\lambda}\partial_\mu e_b{}^{\lambda}\\
&= -e^c{}_{\lambda}\partial_a e_b{}^{\lambda} \equiv e^c{}_{\lambda}\Gamma_{ab}{}^{\lambda} = e_b{}^{\lambda}\partial_a e^c{}_{\lambda}.
\end{aligned} \tag{12.101}$$

于是式 (12.95) 中的 $R_{abc}{}^{d}$ 可写为

$$R_{abc}{}^{d} = \tilde{R}_{abd}{}^{d} + 2S_{ab}{}^{e}\Gamma_{ec}{}^{d}. \tag{12.102}$$

12.4.5　宇宙晶体中的平行

从我们的含有缺陷的宇宙晶体的角度看，平行有着很简单的含义. 来看图 11.1(b). 其中的虚线 $x^a(x^\mu)$ = 常数给出局域坐标系 x^μ 中所看到的弹性形变后的晶体中的晶面. 一个在该形变晶体中的观测者就是通过这些 $x^a(x^\mu)$ = 常数的晶面来定向的. 通过数沿着晶格方向上的原子数，他就可以测量出距离和方向. 以上平行性的定义其实也就定义了此观测者角度下的平行矢量场，即如果这些矢量对应于理想参考晶体中的平行矢量的话，则在该观测者看来它们就是平行矢量. 因此，这些虚线所示的 $x^a(x^\mu)$ = 常数的坐标曲面的法矢相互平行. 确实，它们构成矢量场 $e_a^{\mu}(x)$，而该矢量场总满足 $D_\nu e_a^{\mu} = 0$ [参看式 (11.93)].

如果此映射 $x^\mu(x^a)$ 包含缺陷，则一般来讲是无法给出一个整体平行的定义的. 例如，考虑一个如图 12.2 所示的楔形旋错，比方说其角度为 $-90°$. 该晶体已从左边被切开，且新的晶体物质已通过 Volterra 构造手续塞了进来. 此晶体的坐标曲面定义了一组平行线. 由于右手这边的部分还保留着原始晶格的特征，因此存在完全一致的平行的定义. 例如，几乎水平的曲面都平行. 按定义，与之垂直的线也相互平行. 在左边，这些纵向的线光滑地延伸至这个嵌入的新晶体材料中. 然而在中间，它们相交，并且突然就不正交了. 不过，在原始的以及插入的材料中小区域内坐标平面依然可以局域地定义平行，除了在旋错线上.

12.5　曲率和挠率张量的比安基恒等式

我们现在来推导曲率张量和挠率张量的几个重要的特性. 如前所知，按照定义曲率张量对 $\mu\nu$ 反对称，且依据度规张量的可积条件 (11.18)，它对于 $\lambda\kappa$ 也是反对称的. 另外，它满足所谓的**基本恒等式**(fundamental identity). 这可直接从式 (11.129) 中的表述通过加入如下指标 $\mu\nu\lambda$ 轮换的项而得：

$$R_{\underbrace{\nu\mu\lambda}}{}^{\kappa} = 2D_{\underbrace{\nu}}S_{\underbrace{\mu\lambda}}{}^{\kappa} - 4S_{\underbrace{\nu\mu}}{}^{\rho}S_{\lambda\rho}{}^{\kappa}, \tag{12.103}$$

其中，符号 $\sqcup\!\!\sqcup$ 表示对所指明的指标进行轮换求和. 基本恒等式的推导需要加在度规上的导数算符对易，即它要求度规 $g_{\mu\nu}$ 满足可积条件

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)g_{\lambda\kappa} = 0. \tag{12.104}$$

因此，该基本恒等式就是一个比安基恒等式 [参看式 (2.89) 后给出的定义].

在对称时空中 $S_{\mu\nu\lambda} = 0$ 且 $R_{\mu\nu\lambda\kappa} = \bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$，此基本恒等式表明黎曼张量具有一个额外的对称性

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} + \bar{R}_{\nu\lambda\mu\kappa} + \bar{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0. \tag{12.105}$$

利用 $\mu\nu$ 和 $\lambda\kappa$ 的反对称性，我们将再次得到式 (11.147) 中所给出的性质：

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = \bar{R}_{\lambda\kappa\mu\nu}. \tag{12.106}$$

另一个重要的恒等式为原始的**比安基恒等式**，在本书中，这个名称指所有基于可观测场可积条件的相类似的恒等式. 这个原始的比安基恒等式是由仿射联络的单值性假设而得的，这就是说它满足可积条件

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\, \mathit{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^{\rho} = 0. \tag{12.107}$$

现在来考虑矢量场

$$\boldsymbol{R}_{\sigma\nu\mu} \equiv (\partial_\sigma \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\sigma)\, \boldsymbol{e}_\mu, \tag{12.108}$$

它可通过与 $\boldsymbol{e}^\lambda$ 的标量积而确定曲率张量 $R_{\sigma\nu\mu}{}^{\lambda}$ [参看式 (11.130)]. 对其进行协变导数，得

$$D_\tau \boldsymbol{R}_{\sigma\nu\mu} = \partial_\tau \boldsymbol{R}_{\sigma\nu\mu} - \mathit{\Gamma}_{\tau\sigma}{}^{\kappa} \boldsymbol{R}_{\kappa\nu\mu} - \mathit{\Gamma}_{\tau\upsilon}{}^{\kappa} \boldsymbol{R}_{\sigma\nu\kappa}. \tag{12.109}$$

对指标 $\tau\sigma\nu$ 进行轮换求和，并利用 $\boldsymbol{R}_{\sigma\nu\mu}$ 关于 $\sigma\nu$ 的反对称性，我们就得

$$D_\tau \boldsymbol{R}_{\sigma\nu\mu} = \partial_\tau \boldsymbol{R}_{\sigma\nu\mu} - \mathit{\Gamma}_{\tau\mu}{}^{\kappa} R_{\sigma\nu\kappa} + 2S_{\tau\sigma}{}^{\kappa} R_{\nu\kappa\mu}. \tag{12.110}$$

现在，利用

$$\partial_\sigma \partial_\nu \boldsymbol{e}_\mu = \partial_\sigma \left(\mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\alpha} \boldsymbol{e}_\alpha\right) = \mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\kappa} \boldsymbol{e}_\kappa, \tag{12.111}$$

可得

$$\partial_\tau \partial_\sigma \partial_\nu e_\mu = \partial_\tau \mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\kappa} \partial_\sigma \boldsymbol{e}_\kappa + (\tau\sigma) + \partial_\tau \partial_\sigma \mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\kappa} \boldsymbol{e}_\alpha + \mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\kappa} \partial_\tau \partial_\sigma \boldsymbol{e}_\kappa. \tag{12.112}$$

对指标 $\sigma\tau$ 进行反对称化就给出

$$\partial_\tau \partial_\sigma \partial_\nu \boldsymbol{e}_\mu - \partial_\sigma \partial_\tau \partial_\nu \boldsymbol{e}_\mu = \mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{\tau\sigma\alpha} + \left[(\partial_\tau \partial_\sigma - \partial_\sigma \partial_\tau)\, \mathit{\Gamma}_{\nu\mu}{}^{\alpha}\right] \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{12.113}$$

此时，利用联络 (12.107) 的可积条件，可以消掉最后一项，得

$$\partial_{\underbrace{\tau} \boldsymbol{R}_{\sigma\nu}}{}_{\mu} - \mathit{\Gamma}_{\underbrace{\nu\mu}{}^{\alpha} \boldsymbol{R}_{\tau}}{}_{\sigma\alpha} = 0. \tag{12.114}$$

将此代入式 (12.110) 并乘以 $\boldsymbol{e}^n$ 我们得到一个包含曲率张量协变导数的表达式

$$D_{\underbrace{\tau R_{\sigma\nu}}}{}_{\mu}{}^{\kappa} - 2S_{\underbrace{\tau\sigma}{}^{\lambda} R_{\nu}}{}_{\lambda\mu}{}^{\kappa} = 0. \tag{12.115}$$

此即**比安基恒等式**，它保证了联络的可积性.

在挠率张量和曲率张量的缺陷描述下，我们现在已可以证明以上这两个恒等式具有非常简单的物理含义. 它们就是位错和旋错密度守恒律的非线性表述. 它们

可表示为[①]

$$\partial_i \alpha_{ij} = -\epsilon_{jkl}\theta_{kl}, \tag{12.116}$$

$$\partial_i \theta_{ij} = 0. \tag{12.117}$$

这说明旋错线永远不会终结而位错线最多终结于旋错线上.

现在来考虑式 (12.115). 对它线性化给出

$$\partial_\tau R_{\sigma\nu\mu}{}^{\lambda} + \partial_\sigma R_{\nu\tau\mu}{}^{\lambda} + \partial_\nu R_{\tau\mu\sigma}{}^{\lambda} = 0. \tag{12.118}$$

将 ν 和 μ 以及 τ 和 λ 进行缩并，我们得

$$\partial_\tau R_{\sigma\nu}{}^{\nu\tau} + \partial_\sigma R_{\nu\lambda}{}^{\nu\lambda} + \partial_\nu R_{\tau}{}^{\nu}{}_{\sigma}{}^{\tau} = 2\partial_\tau R_\sigma{}^\tau + \partial_\sigma R = 2\partial_\tau G_\sigma{}^\tau = 0. \tag{12.119}$$

在三维情形中，爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 对应于式 (12.34) 中的旋错密度 $\theta_{\mu\nu}$，而式 (12.119) 确实等价于式 (12.117) 中的缺陷守恒律.

基本恒等式 (12.103) 具有如下线性化形式：

$$2\left(\partial_\nu S_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + \partial_\mu S_{\lambda\nu}{}^{\kappa} + \partial_\lambda S_{\nu\mu}{}^{\kappa}\right) = R_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} + R_{\mu\lambda\nu}{}^{\kappa} + R_{\lambda\nu\mu}{}^{\kappa}. \tag{12.120}$$

将 ν 和 κ 缩并就给出

$$2\left(\partial_\nu S_{\mu\nu}{}^{\nu} + \partial_\mu S_{\lambda\nu}{}^{\nu} - \partial_\lambda S_{\mu\nu}{}^{\nu}\right) = R_{\nu\mu\lambda}{}^{\nu} + R_{\mu\lambda\kappa}{}^{\kappa} + R_{\lambda\nu\mu}{}^{\nu} = R_{\mu\lambda} - R_{\lambda\mu}, \tag{12.121}$$

其中，我们已经用到了 $R_{\nu\mu\lambda\kappa}$ 对于后两个指标的反对称性，而这是度规张量可积性条件的结果. 式 (12.21) 右边就等于 $G_{\mu\lambda} - G_{\lambda\mu}$.

在三维中我们可以用 ϵ 张量对此方程进行缩并，从而得

$$\epsilon_{jkl}\left(\partial_i S_{kli} + \partial_k S_{lnm} - \partial_l S_{knn}\right) = \epsilon_{ijkl} G_{kl}. \tag{12.122}$$

在此插入式 (12.34) 中的 $S_{klj} = (1/2)\epsilon_{kli}\alpha_{ij}$ 以及式 (12.40) 中的 G_{lk}，式 (12.122) 就变成了式 (12.116) 中的位错密度守恒律.

12.6 黎曼时空中的一些特殊坐标系

由于引力理论与坐标选取无关，而坐标的选取不过是对时空进行参数化，因此依照所研究的具体的物理问题，对于时空坐标我们有很多选择的可能性. 本节将简单介绍其中的几个.

12.6.1 测地坐标系

对于一个局域观测者而言，在紧邻他的区域内弯曲的时空看起来是平坦的. 这

① 参看参考文献 [1] 第 III 部分中的方程 (11.90) 和 (11.91).

其实也就是为什么很长一段时间人类认为地球是个平的盘子. 在四维时空中等价的表述是，在一个自由下落的电梯里，只要这个电梯小到足以忽略任何高阶非线性效应的话，人在里面是感知不到任何引力的. 这个电梯仓就构成了一个质点运动的惯性参考系. 从方程 (11.21) 中我们看到在任意一个几何中它的坐标可以通过要求克里斯托夫符号为零 $\{\mu'\lambda',\kappa'\}=0$ 来加以确定，这等价于

$$\partial_{\lambda'} g_{\mu'\lambda'}(x')=0, \tag{12.123}$$

$$\partial_{\lambda'} g^{\mu'\lambda'}(x')=-g^{\mu'\sigma'}g^{\lambda'\tau'}\partial_{\lambda'} g_{\sigma'\tau'}(x')=0. \tag{12.124}$$

给定任意一组坐标 x，相关的导数关系为

$$\begin{aligned}\partial_{\lambda'} g^{\mu'\lambda'}(x')=&\partial_\lambda\left[g^{\mu\nu}(x)\alpha_\mu{}^{\mu'}\alpha_\nu{}^{\nu'}\right]\alpha^\lambda{}_{\lambda'}\\=&\partial_\lambda g^{\mu\nu}(x)\alpha_\mu{}^{\mu'}\alpha_\nu{}^{\nu'}\alpha^\lambda{}_{\lambda'}\\&+g^{\mu\nu}\partial_\lambda\alpha_\mu{}^{\mu'}\alpha_\nu{}^{\nu'}\alpha^\lambda{}_{\lambda'}+g^{\mu\nu}\alpha_\mu{}^{\mu'}\partial_\lambda\alpha_\nu{}^{\nu'}\alpha^\lambda{}_{\lambda'}.\end{aligned} \tag{12.125}$$

注意，导数算符 ∂_μ 只作用于它后面第一个函数上. 对于 D 个坐标 $x'^{\mu'}(x)$，式 (12.123) 和式 (12.124) 给出了 $D^2(D+1)/2$ 个偏微分方程，而这一般来讲在有限区域上是无解的. 而如果 $\partial_{\lambda'} g^{\mu'\lambda'}$ 在某个区域上为零的话，该地时空就会是平坦的. 因此，我们至多能在某个点 $x=X$ 上得

$$\partial_{\lambda'} g^{\mu'\nu'}(X')=0. \tag{12.126}$$

借助于式 (12.123)，这同时也说明 $\partial_{\lambda'} g_{\sigma'\tau'}(X')=0$，于是克里斯托夫符号在此点就为零. 因此，质点在点 X 处将自由运动. 而在 X 点的；邻域上，则存在量级为 $O(x-X)$ 的引力.

通过以下展开：

$$\begin{aligned}x'^{\mu'}=&X^\mu+a^\mu{}_\lambda(x-X)^\lambda+\frac{1}{2!}a^\mu_{\lambda\kappa}(x-X)^\lambda(x-X)^\kappa\\&+\frac{1}{3!}a^\mu_{\lambda\kappa\delta}(x-X)^\lambda(x-X)^\kappa(x-X)^\delta+\cdots,\end{aligned} \tag{12.127}$$

我们现在试着来求解式 (12.126). 相关变换矩阵 $\alpha_\mu{}^{\mu'}\equiv\partial x'^{\mu'}/\partial x^\mu$ 满足

$$\begin{aligned}\alpha_\mu{}^{\mu'}=&a_\mu{}^{\mu'}+a_{\mu\lambda}{}^{\mu'}(x-X)^\lambda+\frac{1}{2!}a_{\mu\lambda\kappa}{}^{\mu'}(x-X)^\lambda(x-X)^\kappa+\cdots,\\\partial_\lambda\alpha_\mu{}^{\mu'}=&a_{\mu\lambda}{}^{\mu'}+a_{\mu\lambda\kappa}{}^{\mu'}(x-X)^\kappa+\cdots,\\\partial_\kappa\partial_\lambda\alpha_\mu{}^{\mu'}=&a_{\mu\lambda\kappa}{}^{\mu'}+\cdots.\end{aligned} \tag{12.128}$$

将此代入式 (12.125)，我们发现

$$\begin{aligned}\partial_\lambda g^{\mu'\nu'}=&\partial_\lambda g^{\mu\nu}(X)a_\mu{}^{\mu'}a_\nu{}^{\nu'}+g^{\sigma\tau}(X)\left[a_{\sigma\lambda}{}^{\mu'}a_\tau{}^{\nu'}+(\mu'\leftrightarrow\nu')\right]\\=&0+\mathcal{O}(x-X).\end{aligned} \tag{12.129}$$

根据式 (11.97)，它的解为

$$a_\mu{}^{\mu'} = g_\mu{}^{\mu'}(X), \quad a_{\lambda\kappa}{}^\mu = \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\mu(X). \tag{12.130}$$

于是在 X 处的局域测地坐标可如下给出：

$$x'^\mu = X^\mu + (x-X)^\mu + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\mu(x-X)^\lambda(x-X)^\kappa + \mathcal{O}\left((x-X)^3\right). \tag{12.131}$$

注意，如果 X 处的曲率不为零的话，尽管克里斯托夫符号在 X 处的测地坐标中为零，它们的导数也是不为零的.

为了完成此自由落体坐标系的构建，我们注意到，在 X 点的邻域内，测地坐标总可以通过下述进一步的线性变换而取闵可夫斯基形式：

$$(x'-X)^\mu \to L^\mu{}_\alpha\,(x-X)^\alpha\,, \tag{12.132}$$

该变换将 $g_{\mu\nu}$ 变换到 $g_{\alpha\beta}$，即

$$g_{\alpha\beta} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}. \tag{12.133}$$

这样的线性变换并不会改变坐标系的测地性质，这一特性使得坐标系 $(x''-X)^\alpha$ 为一个局域惯性系，而这正是我们想要的.

就晶体缺陷而言，构建测地坐标系的可能性其实是基于以下事实，即在缺陷间的区域，晶体总可以通过弹性形变而形成正规的原子排列. 在连续统极限下，这些区域会收缩成零，但同时缺陷的伯格斯矢量也会. 因此，尽管任何小邻域都会包含一些缺陷，这些缺陷也是无穷小的，于是晶体的完整性也只是有一个无穷小的扰动而已.

12.6.2 正则测地坐标

测地性条件将坐标变换 (12.127) 精确至至二次项的系数：

$$\begin{aligned} x'^\mu = {} & X^\mu + (x-X)^\mu + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\mu\,(x-X)^\lambda\,(x-X)^\kappa \\ & + \frac{1}{3!}a^\mu{}_{\lambda\kappa\delta}\,(x-X)^\lambda\,(x-X)^\kappa\,(x-X)^\delta + \cdots \end{aligned} \tag{12.134}$$

通过构造，变换矩阵

$$\alpha^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu + \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^\mu\,(x-X)^\lambda + \frac{1}{2}a^\mu{}_{\lambda\kappa\nu}\,(x-X)^\lambda\,(x-X)^\kappa + \cdots \tag{12.135}$$

可使克里斯托夫符号在 X 处为零. 很明显，高阶项系数 $a^\mu_{\lambda\kappa\delta}$ 定会对克里斯托夫符号的导数产生影响. 一般来讲，这是这是无法消除的，因为在 $\bar{\Gamma}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'}$ 为零的 X 点处的曲率张量为

$$R_{\mu'\nu'\lambda'}{}^{\kappa'} = \partial_{\mu'}\bar{\Gamma}_{\nu'\lambda'}{}^{\kappa'} - (\mu' \leftrightarrow \nu')\,. \tag{12.136}$$

这表明，只有当时空是平坦的时候，才有可能找到相应的 $a^{\mu}_{\lambda\kappa\nu}$ 使得 $\partial_{\mu'}\bar{\Gamma}_{\nu'\lambda'}{}^{\kappa'}=0$.

尽管此导数无法设成零，却仍然存在一个最合适的坐标系，称为**正则坐标系**，在该坐标系中导数满足如下关系：

$$\partial_{\mu'}\bar{\Gamma}_{\nu'\lambda'}{}^{\kappa'}+\partial_{\lambda'}\bar{\Gamma}_{\nu'\mu'}{}^{\kappa'}=0. \tag{12.137}$$

在我们构造此系统之前，我们先来看看它的优势所在. 正则条件使得我们可以将式 (12.136) 中关于 $R^{\kappa'}_{\mu'\nu'\lambda'}$ 的关系式反转过来，并且将克里斯托夫符号的导数唯一地用曲率张量表达出来 (始终要在测地坐标点上)

$$\partial_{\nu'}\bar{\Gamma}_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}=-\frac{1}{3}\left(R_{\mu'\nu'\lambda'}{}^{\kappa'}+R_{\lambda'\mu'\nu'}{}^{\kappa'}\right). \tag{12.138}$$

于是在 X^{μ} 点的邻域上，我们就可将黎曼联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x)$ 展开至 $x-X$ 的一阶：

$$\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=-\frac{1}{3}\left(R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}+R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\right)(x-X)^{\lambda}+\mathcal{O}((x-X)^2). \tag{12.139}$$

对于度规 $g_{\mu\nu}(x)$ ，我们可以得到其相关的 $x-X$ 的二阶展开表达式. 为了看清这一点，我们回头来看方程式 (11.96). 对此再求一次导数就得

$$\partial_{\kappa}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}=\partial_{\kappa}\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}{}^{\sigma}g_{\sigma\nu}+\partial_{\kappa}\bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^{\sigma}+\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}{}^{\sigma}\partial_{\kappa}g_{\sigma\nu}+\bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^{\sigma}\partial_{\kappa}g_{\mu\sigma}. \tag{12.140}$$

如果某一点上的坐标是测地的，则这就会简单地变为

$$\begin{aligned}\partial_{\kappa'}\partial_{\lambda'}g_{\mu'\nu'}&=-\frac{1}{3}\left(R_{\lambda'\kappa'\mu'}{}^{\sigma'}+R_{\mu'\kappa'\lambda'}{}^{\sigma'}\right)g_{\sigma'\nu'}-\frac{1}{3}\left(R_{\lambda'\kappa'\nu'}{}^{\sigma'}+R_{\nu'\kappa'\lambda'}{}^{\sigma'}\right)g_{\mu'\sigma'}\\&=\frac{1}{3}\left(R_{\kappa'\mu'\lambda'\upsilon'}+R_{\kappa'\nu'\lambda'\mu'}\right).\end{aligned} \tag{12.141}$$

因此，度规的展开式为

$$\begin{aligned}g_{\mu'\nu'}(x')&=g_{\mu'\nu'}(X)+\frac{1}{2}\partial_{\kappa'}\partial_{\lambda'}g_{\mu'\nu'}(X)\,(x'-X)^{\kappa'}(x'-X)^{\lambda'}+\cdots\\&=g_{\mu'\nu'}(X)+\frac{1}{3}R_{z'\mu'\lambda'\nu'}\,(x'-X)^{\kappa'}(x'-X)^{\lambda'}+\cdots\\&=g_{\mu'\nu'}(X)+\frac{1}{3}R_{z'\mu'\lambda'\nu'}\,(x'-X)^{\kappa'}(x'-X)^{\lambda'}+\cdots.\end{aligned} \tag{12.142}$$

如果我们将式 (12.139) 中的黎曼联络代入测地运动方程 (11.22) 中，我们就得

$$g_{\lambda\sigma}\delta\ddot{x}^{\nu}(\sigma)-\frac{1}{3}\left(R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}+R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\right)\delta x^{\lambda}(\tau)\dot{\delta}x^{\mu}(\tau)\dot{\delta}x^{\nu}(\tau)=0,\quad \delta x\equiv x'-X. \tag{12.143}$$

该方程说明，尽管由于具有坐标 X 的点作自由下落而使得在该点没有加速度，然而 X 点的邻域却会感受到**潮汐力**. 这会扭曲所有自由下落中具有空间延展的物体，比方说绕太阳旋转的行星.

现在，我们回过来构建这种正则坐标. 为此，我们考察式 (11.101) 中克里斯托夫符号的变换律

$$\bar{\Gamma}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'} = \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\mu}\alpha^{\lambda'}{}_{\nu}\,, \tag{12.144}$$

并对此再一次作如下微分：

$$\partial_{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\partial_{\kappa} = \alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\partial_{\kappa}. \tag{12.145}$$

这就给出

$$\begin{aligned}\partial_{\kappa'}\bar{\Gamma}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'} =& \alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\partial_{\kappa}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\partial_{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\\ &+\alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\partial_{\kappa}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\kappa}\alpha^{\lambda'}{}_{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\\ &-\alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\partial_{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\mu}\alpha^{\lambda'}{}_{\nu} - \alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\partial_{\kappa}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\mu}\alpha^{\lambda'}{}_{\nu}\\ &+\alpha_{\kappa'}{}^{\kappa}\alpha_{\mu'}{}^{\mu}\alpha_{\nu'}{}^{\nu}\partial_{\kappa}\partial_{\mu}\alpha^{\lambda'}{}_{\nu}.\end{aligned} \tag{12.146}$$

在已知的变换系数 $\alpha^{\mu}{}_{\nu}$ 之外，此式还包含了相应的逆反系数 $\alpha_{\kappa}{}^{\lambda}$. 由于两者在 $x \sim X$ 时都趋向于 1，因此很简单可得出 $\alpha^{\mu}{}_{\nu}$ 的逆为 [参看式 (11.66)]

$$\alpha_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\mu}{}^{\nu} - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^{\mu}\,(x-X)^{\lambda} + \cdots\,, \tag{12.147}$$

而这确实给出

$$\alpha_{\mu}{}^{\nu}\alpha^{\mu'}{}_{\nu} \;=\; \delta_{\mu}{}^{\mu'} + \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^{\mu}\,(x-X)^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^{\mu}\,(x-X)^{\lambda} + \cdots = \delta_{\mu}{}^{\mu'}. \tag{12.148}$$

将 $\alpha_{\mu}{}^{\nu}$ 和 $\alpha^{\nu}{}_{\nu}$ 代入上面所提变换律，就给出

$$\partial_{\kappa'}\bar{\Gamma}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'} = \left[\partial_{\kappa}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\sigma\kappa}{}^{\lambda} - a^{\lambda}{}_{\kappa\mu\nu}\right]_{\kappa'=\kappa,\lambda'=\lambda,\mu'=\mu,\nu'=\nu}. \tag{12.149}$$

请留意这里所出现的三次方展开项的系数 $a^{\lambda}{}_{\kappa\mu\nu}$. 对式 (12.147) 左边进行指标 $\kappa'\mu'\nu'$ 的轮换，然后将这三个展开式相加，我们就得到

$$\begin{aligned}&\partial_{\kappa'}\bar{\Gamma}_{\mu'\nu'}{}^{\lambda'} + 2\text{关于}\,(\kappa'\mu'\nu')\,\text{的轮换}\\ &\quad+\left[\partial_{\kappa}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\sigma}\bar{\Gamma}_{\sigma\kappa}{}^{\lambda} + 2\text{关于}\,(\kappa\mu\nu)\,\text{的轮换} - 3a^{\lambda}{}_{\kappa\mu\nu}\right]\Bigg|_{\kappa'=\kappa,\lambda'=\lambda,\mu'=\mu,\nu'=\nu}.\end{aligned} \tag{12.150}$$

令此左手边等于零，我们就得到了我们想要的关于 $a^{b}{}_{\kappa\mu\nu}$ 的方程.

因此，给定一个任意的坐标系 x^{μ}，我们确实可以选取系数 $a^{b}{}_{\kappa\mu\nu}$ 使得测地坐标系 x'^{μ} 在 X 点的邻域上是正则的，从而如式 (12.142) 所示，可以利用曲率张量而将 $g_{\mu\nu}(x')$ 确定至 $x-X$ 的二阶.

12.6.3 谐和坐标

虽然坐标系的测地性最多只可在一点上成立，我们仍然可以找到一种途径去确定整个时空中坐标的选取，即选取所谓的**谐和坐标**(harmonic coordinates). 这首先由 T. DeDonder 和 C. Lanczos 引入，继而被 V. Fock 在其关于引力的工作[2] 中广泛使用. 给定任意一组坐标 x^μ，我们来寻求 d 个独立的标量函数 $f^a(x)$ $(a=0,1,2,d)$，它们在弯曲时空中满足拉普拉斯方程

$$D^2 f^a(x) = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f^a(x) = 0. \tag{12.151}$$

由于 $f^a(x)$ 应为标量函数，因此有

$$D_\mu D_\nu f = D_\mu \partial_\nu f = \left(\partial_\mu \partial_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \partial_\lambda\right) f, \tag{12.152}$$

于是上述拉普拉斯方程变为

$$D^2 f = g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = \left(g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu - \Gamma^\lambda \partial_\lambda\right) f, \tag{12.153}$$

其中，我们已引入了约化仿射联络

$$\Gamma^\lambda \equiv \Gamma_\mu{}^{\mu\lambda}. \tag{12.154}$$

在对称时空中

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda =& \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa}\left(\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right)\\ =& g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} \partial_\mu g_{\nu\kappa} - \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} g^{\mu\nu} \partial_\kappa g_{\mu\nu}\\ =& -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\kappa \sqrt{-g} g^{\lambda\kappa},\end{aligned} \tag{12.155}$$

且

$$D^2 f = \left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\kappa \sqrt{-g} g^{\lambda\kappa}\right] f = \Delta f, \tag{12.156}$$

其中

$$\Delta \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \tag{12.157}$$

为弯曲时空中的 Laplace-Beltrami **算子** Δ. 具有挠率的时空中的拉普拉斯算子与 Laplace-Beltrami 算子由如下关系：

$$D^2 f = \Delta f - S_\mu{}^{\mu\nu} \partial_\lambda f. \tag{12.158}$$

假定我们有 d 个满足式 (12.151) 的函数 $f^a(x)$，我们就可如下引入谐和坐标：

$$X^a = f^a(x). \tag{12.159}$$

当把拉普拉斯方程 (12.151) 由坐标 x^μ 变换到谐和坐标 X^a 下，我们就得

$$\left(g^{bc}\partial_b\partial_c - \Gamma^c\partial_c\right) X^a = -\Gamma^c{\delta_c}^a = 0. \tag{12.160}$$

因此，谐和坐标由 Γ^a $(a = 1, \cdots, d)$ 等于零来表征.

12.6.4 $\det(g_{\mu\nu}) = 1$ 的坐标

爱因斯坦所偏好的另一种坐标选择则是在其中度规的行列式 g 为常数且在整个时空上取 -1. 由于

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\sqrt{-g} = \partial_\nu \log\sqrt{-g},\end{aligned} \tag{12.161}$$

此条件可写为

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\mu} = 0. \tag{12.162}$$

给定任意一个坐标系 x^μ，该种特殊的坐标系 $\bar{x}^\mu$ 可通过如下变换找到：

$$\bar{x}^\mu = \alpha^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{12.163}$$

它满足条件

$$\sqrt{-g} = |\det\left(\alpha^\mu{}_\nu\right)|\sqrt{-g} = |\det\left(\alpha^\mu{}_\nu\right)|. \tag{12.164}$$

对它取对数然后求导，就给出了如下 d 个条件：

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\mu} = \partial_\nu \log\det\left(\alpha^\lambda{}_\kappa\right) = \partial_\nu \mathrm{tr}\log\left(\alpha^\lambda{}_\kappa\right) = \mathrm{tr}\left(\alpha^{-1}\partial_\nu\alpha\right) = \alpha_\lambda{}^\kappa\partial_\nu\alpha^\lambda{}_\kappa = 0. \tag{12.165}$$

此 d 个微分方程决定了 d 个新的坐标函数 $\bar{x}(x)$.

请注意它与谐和坐标系的区别，后者满足 $\Gamma^\mu = \Gamma_\lambda{}^{\lambda\mu} = 0$，即仿射联络的前两个指标要缩并掉 [参看式 (12.154) 和式 (12.160)]. 然而，目前这个条件则是克里斯托夫符号的第一个 (或者第二个) 指标与第三个指标的缩并.

12.6.5 正交坐标系

对很多计算而言，采用正交坐标系会比较方便，在此坐标系中 $g_{\mu\nu}$ 只含有对角元. 这就使得克里斯托夫符号的很多分量都为零：

$$\bar{\Gamma}_{\mu\lambda,\kappa} = 0, \quad \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = 0, \quad \mu \neq \lambda, \kappa \neq \mu, \kappa \neq \lambda. \tag{12.166}$$

这一结果又可简化其他分量的计算. 在对称时空中，对黎曼张量 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 运用式 (12.1)，我们发现只要所有的指标都不相同，它就为零. 其非零的分量可以如下计算得到：

$$
\begin{aligned}
&\nu \neq \kappa, \lambda \neq \mu, \nu \neq \lambda \\
\bar{R}_{\nu\kappa\lambda\mu} = &-\frac{1}{2}\left(\partial_\lambda \partial_\kappa g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\kappa\lambda} - \partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\kappa}\right) \\
&+\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\nu g_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right)\left(\partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\mu g_{\lambda\kappa}\right) \\
&-\frac{1}{2}\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\left(\partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right) \\
&-\frac{1}{2}\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\left(\partial_\lambda g_{\kappa\mu} - \partial_\mu g_{\kappa\lambda}\right) + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_{\kappa\lambda}{}^{\rho}\partial_\rho g_{\nu\mu},
\end{aligned}
\tag{12.167}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nu \neq \kappa, \lambda \neq \mu, \nu \neq \lambda, \nu \neq \mu \\
\bar{R}_{\nu\kappa\lambda\mu} = &-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \partial_\nu g_{\kappa\lambda} - \partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\kappa}\right) \\
&+\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\nu g_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\alpha g_{\mu\kappa} \\
&-\frac{1}{2}\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right)\left(\partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\mu g_{\lambda\kappa}\right) - \frac{1}{2}\partial_\nu \log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\left(\partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\mu g_{\kappa\lambda}\right),
\end{aligned}
\tag{12.168}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nu \neq \kappa, \lambda \neq \mu, \nu \neq \lambda, \nu \neq \mu, \kappa \neq \lambda \\
\bar{R}_{\nu\kappa\lambda\mu} = &\frac{1}{2}\partial_\lambda \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\lambda\lambda}}\right)\partial_\lambda g_{\mu\kappa} \\
&-\frac{1}{2}\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\nu g_{\mu\kappa}.
\end{aligned}
\tag{12.169}
$$

相应的里奇张量变为

$$
\bar{R}_{\mu\nu} = \sum_\lambda \frac{1}{g_{\lambda\lambda}}\bar{R}^{\mu\lambda\lambda\nu},
\tag{12.170}
$$

其非对角元为

$$
\begin{aligned}
&\mu \neq \nu \\
\bar{R}_{\mu\nu} = &\sum_{\lambda\neq\mu,\lambda\neq\nu}\left[\partial_\mu\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right) - \partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\right. \\
&\left.-\partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right) + \partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\partial_\nu\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\right] \\
= &-\partial_\mu\partial_\nu\log\sqrt{-g} + \partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\nu\left(\log\sqrt{-g}\right) + \partial_\mu\log\sqrt{-g}\,\partial_\nu\log\sqrt{g_{\mu\mu}} \\
&+\partial_m\partial_\nu\log\sqrt{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}} - 2\partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\nu\nu}}\right)\partial_\nu\log\sqrt{g_{\mu\mu}} \\
&-\sum_{\lambda=1}^{d}\partial_\mu(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}})\partial_\nu(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}),
\end{aligned}
\tag{12.171}
$$

而其对角元为

$$
\begin{aligned}
\bar{R}^{\mu\mu} = &-\partial^2\log\sqrt{-g} + 2\partial_\mu^2\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right) - 2\left(\partial_\mu\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right)^2 \\
&+2\partial_\mu\left(\log\sqrt{-g}\right)\partial_\mu\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right) - \sum_{\lambda=1}^{d}\left(\partial_\mu\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-g_{\mu\mu}\sum_{\lambda=1}^{d}\frac{1}{g_{\lambda\lambda}}\left[\partial_\lambda^2\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right)+\partial_\lambda\left(\log\sqrt{-g}\right)\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\mu\mu}}\right)\right.\\
&\left.-2\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\right]. \qquad (12.172)
\end{aligned}
$$

标曲率则为

$$
\begin{aligned}
\bar{R}=\sum_{\lambda}^{d}\frac{1}{g_{\lambda\lambda}}&\left\{2\partial_\lambda{}^2\left(\log\sqrt{-g}\right)-2\partial_\lambda{}^2\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right.\\
&+2\left(\partial_\lambda\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)^2-4\partial_\lambda\left(\log\sqrt{g_{\lambda\lambda}}\right)\partial_\lambda\left(\log\sqrt{-g}\right)\\
&\left.+\left(\partial_\lambda\log\sqrt{-g}\right)^2+\sum_{\kappa}^{d}\left(\partial_\lambda\sqrt{g_{\kappa\kappa}}\right)^2\right\}. \qquad (12.173)
\end{aligned}
$$

12.7 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 和 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的独立分量个数

根据 $\mu\nu$ 以及 $\lambda\kappa$ 的反对称性，我们首先可以判断，在 d 维情形中，$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 有 $N_d^{\bar{R}}=[d(d-1)/2]^2$ 个分量，而 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 则有 $N_d^S=d^2(d-1)/2$ 个分量. 因此，$R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 可看作一个以指标对为指标的 $\frac{1}{2}d(d-1)\times\frac{1}{2}d(d-1)$ 矩阵 $R_{(\mu\nu)\,(\lambda\kappa)}$. 在对称时空中，$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 在矩阵对 $\mu\nu$ 和 $\lambda\kappa$ 之间还存在一个额外的对称性，因此它具有

$$
\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}d(d-1)\times\left[\frac{1}{2}d(d-1)-1\right]\right\}=\frac{1}{8}d(d-1)(d^2-d+2) \qquad (12.174)
$$

分量. 现在，基本恒等式 (12.105) 不仅给出对称关系，它同时包含有如下信息，即 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}+\bar{R}_{\nu\lambda\mu\kappa}+\bar{R}_{\lambda\nu\kappa}$ 的全反对称部分为零. 这会再给出 $d(d-1)(d-2)(d-3)/4!$ 个关系式，于是，$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 就剩下

$$
N_d^{\bar{R}}=\frac{1}{8}d(d-1)(d^2-d+2)-\frac{1}{24}d(d-1)(d-2)(d-3)=\frac{1}{12}d^2(d^2-1) \qquad (12.175)
$$

个独立分量. 在四维情形中，这个数为 20，而在三维中这个数为 6.

12.7.1 二维情形

在二维中，曲率张量只存在一个独立分量，比方说是 $\bar{R}_{1221}$. 其实，具有以上对称性的最一般的张量为

$$
\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}=-\text{const}\times e_{\mu\nu}e_{\lambda\kappa}, \qquad (12.176)
$$

其中，$e_{\mu\nu}=\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu}$ 为列维–西维塔符号 ($\epsilon_{01}=-\epsilon_{10}=1$ (参看式 (11A.7)) 的协变形式. 将此同 $g^{\nu\lambda}$ 缩并就给出了里奇张量

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\kappa} &= -\text{常数} \times g^{\nu\lambda}\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\lambda\kappa} = -\text{常数} \times \left(g_{\mu\kappa} - g_{\lambda}{}^{\lambda}g_{\mu\kappa}\right) \\ &= \text{常数} \times g_{\mu\kappa},\end{aligned} \tag{12.177}$$

相应的标曲率为

$$\bar{R} = \text{常数} \times g^{\mu\kappa}g_{\mu\kappa} = 2 \times \text{常数}. \tag{12.178}$$

因此 常数 $= \bar{R}/2$，于是 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 的这个单独的独立分量为

$$\bar{R}_{0110} = \bar{R}_{1001} = g\,\frac{\bar{R}}{2}. \tag{12.179}$$

所以，完整的曲率张量为

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = -e_{\mu\nu}e_{\lambda\kappa}\frac{\bar{R}}{2}. \tag{12.180}$$

12.7.2　三维情形

在三维情形中，$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 的独立分量个数 $N_d^{\bar{R}} = 6$ 与里奇张量 $\bar{R}_{\mu\nu}$ 的独立分量个数是相一致的，因此，里奇张量所包含的信息足以用来计算出 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$. 确实，我们很容易可以看出

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = e_{\mu\nu\delta}e_{\lambda\kappa\tau}\left(\bar{R}^{\tau\delta} - \frac{1}{2}g^{\tau\delta}\bar{R}\right), \tag{12.181}$$

其中，$e_{\mu\nu\delta} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\delta}$ 为式 (11A.7) 中列维–西维塔符号在三维中的协变形式. 式 (12.181) 可以通过用 $e^{\mu\nu\delta}e^{\lambda\kappa\tau}$ 缩并来加以证明，利用式 (1A.17) 中关于两个列维–西维塔张量的公式上述缩并给出

$$\bar{R}^{\tau\delta} - \frac{1}{2}g^{\tau\delta}\bar{R} = \frac{1}{4}e^{\mu\nu\delta}e^{\lambda\kappa\tau}\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}. \tag{12.182}$$

根据式 (1A.18) 以及里奇张量的定义式 (11.141)，上述方程明显成立 [参看式 (12.27)].

由于 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 是一个张量，它的 $N_d^{\bar{R}} = d^2(d^2-1)/12$ 个分量在不同的坐标系中是不同的. 因此，找出有多少个独立的不变量可以不依赖于坐标系而构造是很有用的. 在二维情形中，标曲率 $\bar{R}$ 可完全确定 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$. 一般来讲，$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 的不变量都可通过用 $g^{\mu\nu}$ 进行恰当的缩并而得到. 张量 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 共有 $d^2(d^2-1)/12 + d(d+1)/2$ 个矩阵元. 同时，有 d^2 个任意的坐标变换矩阵 $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ 加在以上矩阵上. 因此，不变量的个数就为 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 的独立分量的个数. 这个数为

$$N_d^{\text{inv}} = \frac{1}{12}d^2(d^2-1) + \frac{d(d+1)}{2} - N^2 = \frac{d}{12}(d-1)(d-2)(d+3). \tag{12.183}$$

此公式只对 $d \neq 2$ 的情形成立. 在二维中我们已经看到只有一个不变量，那就是标曲率. 上述一般性的计数方法在这里不成立是因为 N^2 个在式 (12.183) 中减掉的坐

标变换中的一个恰好使得 R_{1234} 和 $g_{\mu\nu}$ 是不变的. 对于 $d=3$ 和 4，相应的数分别为 $N_{3,4}^{\text{inv}}=3,\,14$.

在三维中，不变量为如下特征方程的本征值：

$$\det\left(g^{\mu\lambda}\bar{R}_{\lambda\kappa}-\lambda\delta^{\mu}{}_{\kappa}\right) = \det\left(g^{-1}\bar{R}-\lambda\right)=-\lambda^3+\lambda^2 I_1-\lambda I_2+I_3, \tag{12.184}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\left(g^{-1}\bar{R}\right)=g^{\mu\nu}\bar{R}_{\lambda\mu}=\bar{R}, \\ I_2 &= \frac{1}{2}\left(\bar{R}^{\mu}{}_{\nu}\bar{R}^{\nu}{}_{\lambda}-\bar{R}_{\lambda}{}^{\lambda}\bar{R}_{\kappa}{}^{\kappa}\right), \\ I_3 &= \det\left(g^{-1}\bar{R}\right)=\det\left(g^{\mu\lambda}\bar{R}_{\lambda\nu}\right)=\frac{\det\left(\bar{R}_{\mu\nu}\right)}{\det\left(g_{\mu\nu}\right)}. \end{aligned} \tag{12.185}$$

12.7.3 四维及更高维情形

在四维或高维中，式 (12.181) 中的关系式扩展为曲率张量的**Weyl 分解**

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = &-\frac{1}{d-2}\left(g_{\mu\lambda}\bar{R}_{\nu\kappa}-g_{\nu\lambda}\bar{R}_{\mu\kappa}+g_{\nu\kappa}\bar{R}_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}\bar{R}_{\nu\lambda}\right) \\ &+\frac{\bar{R}}{(d-1)(d-2)}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}\right)+C_{\mu\nu\lambda\kappa}, \end{aligned} \tag{12.186}$$

其中，$C_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 称为**Weyl 共形张量**，由于式 (12.181)，它在 $d=3$ 时为零. 以上分解式中的每一项都具有与 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 相同的对称性. 另外，$C_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 满足以下 $d(d+1)/2$ 个条件：

$$C_{\mu}{}^{\kappa}=C_{\mu\nu}{}^{\nu\kappa}=0, \tag{12.187}$$

这是因为里奇张量完全出自前两项. 因此，Weyl 张量具有

$$N_d^C=\frac{1}{12}d^2(d^2-1)-\frac{1}{2}d(d+1)=\frac{1}{12}d(d+1)(d+2)(d-3) \tag{12.188}$$

个独立分量，这与 $\bar{R}^{\mu\nu\lambda\kappa}$ 的独立分量数是相等的. 在很多情形中，通过选取使 $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ 且 $\bar{R}_{\mu\nu}$ 为对角的坐标系，我们是有可能找到以上所有的不变量的. 我们首先可以选自由下落参考系，然后再做一个恰当的洛伦兹变换. 只要 $\bar{R}_{\mu\nu}$ 不含任何简并本征值，这样的手续总归是可行的. 否则，洛伦兹变换依然是独立的，上述计数将不再成立[3].

就低维时空中引力的一种可能的几何理论而言，上述结论会有一个比较有趣的后果. 它显示，在 $3+1$ 维时空中不存在一种在弱耦合极限下退化成牛顿理论的理论. 正如我们在第 15 章中将要看到的，爱因斯坦理论中一个关键的几何量为

$$\bar{G}_{\mu\nu}=\bar{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{R}. \tag{12.189}$$

从上面的讨论我们知道，二维时空中的里奇张量可用标曲率表示为

$$\bar{R}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\frac{\bar{R}}{2}. \tag{12.190}$$

这说明在二维时空中，爱因斯坦张量 $\bar{G}_{\mu\nu}$ **恒为零**.

在式 (15.64) 中，我们将给出著名的爱因斯坦引力场方程，依照此方程，在不存在挠率的情形中爱因斯坦张量正比于物质的对称的能动张量：

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \kappa \overset{\rm m}{T}_{\mu\nu}, \tag{12.191}$$

其中，κ 为由牛顿引力常数所确定的常数. 因此，能动张量也为零，即不存在爱因斯坦引力理论. 乍一看，似乎存在一个例外，即存在一个所谓的**宇宙常数项** (cosmological term)，在此情形下爱因斯坦方程变为

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{12.192}$$

然而，即使加上这一项，二维理论仍存在一个严重的问题：度规张量完全由局域的能动张量决定

$$g_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{\Lambda} \overset{\rm m}{T}_{\mu\nu}, \tag{12.193}$$

因此会在质点间空空如也的时空中为零. 于是，这个引力理论也是非物理的.

那么，在 $2+1$ 维中引力的几何理论又如何？此时里奇张量与标曲率相独立，因此确实存在非平凡的爱因斯坦张量 $\bar{G}_{\mu\nu}$. 但是，这个张量依然几乎是平凡的. 在三维中不存在 Weyl 张量 $C_{\mu\nu\lambda\kappa}$ ，且完整的曲率张量可如式 (12.186) 中所示由里奇张量决定

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} = &-\left(g_{\mu\lambda}\bar{R}_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}\bar{R}_{\mu\kappa} + g_{\nu\kappa}\bar{R}_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa}\bar{R}_{\nu\lambda}\right)\\ &+\frac{\bar{R}}{2}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}\right).\end{aligned} \tag{12.194}$$

将

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2}\bar{G} \tag{12.195}$$

代入，就得

$$\begin{aligned}\bar{R}^{\mu\nu\lambda\kappa} = &-\left(g_{\mu\lambda}\bar{G}_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}\bar{G}_{\mu\kappa} + g_{\nu\kappa}\bar{G}_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa}\bar{G}_{\nu\lambda}\right)\\ &+ \bar{G}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa}\right).\end{aligned} \tag{12.196}$$

结合爱因斯坦方程 (12.191)，这就意味着整个能动张量 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 由局域能量分布决定. 因此，在物质之间的真空中也是不存在曲率的. 我们以后会看到，物理上这就是说星际尘埃不会感受到相对加速度，即不存在式 (12.143) 中的潮汐力.

文献与注记

[1] 关于缺陷的物理特性在以下专著中有详尽的论述：

H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`), where `kl` is short for the www address `http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert`.

[2] 关于谐和坐标的介绍，请参阅：

T. DeDonder, *La gravifique Einsteinienne*, Gauthier-Villars, Paris, 1921;

C. Lanczos, Phys. Z. **23**, 537 (1923).

以及

V. Fock, *The Theory of Space, Time, and Gravitation*, Elsevier, Amsterdam, 1964.

[3] 关于独立分量和不变量的计数，请参阅：

S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology Principles and Applications of the General Theory of Relativity,* John Wiley & Sons, New York, 1972.

第 13 章　嵌入引起的曲率和挠率

Do it big or stay in bed.

LARRY KELLY

(Opera producer in movie "Callas Forever")

在前一章中，通过进行一个坐标变换 $x^a(x^\mu)$，我们可以构造一个含有曲率和挠率的空间，此坐标变换不可积且其导数也是不可积的. 第一个不可积性给出挠率，第二个则给出曲率 [参考式 (12.7)]. 第二个不可积性是可以通过以下方法加以避免的，即由一个高维时空出发，然后将它映射到一个具有期望的维度的子时空中. 这一手续称为**嵌入**(embedding). 我们都已熟知如何通过此构造只具有曲率的时空. 这可通过对高维时空施加一个恰当的约束条件来实现. 挠率则可通过允许这些约束条件为非完整的来给出[1].

13.1　常曲率时空

对于一个 d 维常曲率空间，嵌入过程非常简单. 我们可以选取一个 $D = d + 1$ 维欧几里得空间作为嵌入空间 (embedding space)，此空间中无穷小距离由下式确定：

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^D)^2. \tag{13.1}$$

此空间中一个半径为 r 的球面则通过以下约束条件加以定义：

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^d)^2 + (x^D)^2 = r^2. \tag{13.2}$$

这可用来消掉式 (13.1) 中 D 个坐标中的一个，比如

$$x^D = \sqrt{r^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \cdots - (x^d)^2}. \tag{13.3}$$

于是式 (13.1) 变为

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^d)^2 + \frac{(x^1\mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 + \cdots + x^d\mathrm{d}x^d)^2}{r^2 - r_d^2}, \tag{13.4}$$

其中

$$r_d^2 \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^d)^2. \tag{13.5}$$

方程 (13.4) 可重新写为

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = g_{\mu\nu}(x)^d x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{13.6}$$

其中，$g_{\mu\nu}(x)$ 为球面上的诱导度规：

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{r^2 - r_d^2}. \tag{13.7}$$

球面具有常曲率 $\bar{R}$. 这可通过在球面上任意一点求解方程 (11.129)、(11.141) 和 (11.142) 来得到，比方说可在 $x^\mu = 0$ $(\mu = 1, \cdots, d)$ 的邻域上，此处 $r_d = \mathcal{O}((x^\mu)^2)$ 且 $g_{\mu\nu}(x) \approx \delta_{\mu\nu} + x^\mu x^\nu / r^2 + \mathcal{O}((x^\mu)^4)$. 克里斯托夫符号 (11.21) 则为 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \approx \Gamma_{\mu\nu\lambda} \approx \delta_{\mu\nu} x_\lambda / r^2 + \mathcal{O}((x^\mu)^3)$. 将此代入式 (11.129) 就得到了对于小的 x^μ 的曲率张量：

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa} \approx \frac{1}{r^2} \left(\delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\kappa}\right). \tag{13.8}$$

通过将 $\delta_{\mu\lambda}$ 替换为度规张量 $g_{\mu\lambda}(x)$，这个局域的表达式可以协变地扩展至整个球面，于是就给出

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}(x) = \frac{1}{r^2} \left[g_{\mu\kappa}(x) g_{\nu\lambda}(x) - g_{\mu\lambda}(x) g_{\nu\kappa}(x)\right]. \tag{13.9}$$

此结果在双曲空间中依然成立，尤其是对于常曲率时空.

将 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}(x)$ 用 $g^{\mu\kappa}(x)$ 缩并就给出了里奇张量 [参看式 (11.141)]

$$\bar{R}_{\nu\lambda}(x) = \bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\mu(x) = \frac{d-1}{r^2} g_{\nu\lambda}(x). \tag{13.10}$$

将此再用 $g^{\nu\kappa}(x)$ 缩并就给出了标曲率 [参看式 (11.142)]：

$$\bar{R} = \frac{(d-1)d}{r^2}. \tag{13.11}$$

13.2 基 矢

以上的嵌入手续可以推广至任意弯曲时空. 我们将坐标为 x^μ $(\mu = 1, \cdots, d)$ 的 d 维时空嵌入一个高维的坐标为 x^A $(A = 1, \cdots, D)$ 的平坦时空中，该平坦时空的度规 η_{AB} 是对角的，其对角元为 ± 1. 嵌入是通过 D 个函数 $x^A(x^\mu)$ 来完成的. 它们的导数 $\partial x^A(x^\mu)/\partial x^\kappa$ 则给出 $D \times d$ 个函数

$$\varepsilon^A{}_\lambda(x^\mu) \equiv \frac{\partial x^A}{\partial x^\lambda}, \tag{13.12}$$

由此我们就由 D 个基矢 $\boldsymbol{e}_A$ 构造出

$$\boldsymbol{e}_\lambda(x^\mu) = \boldsymbol{e}_A \varepsilon^A{}_\lambda(x^\mu). \tag{13.13}$$

此为具有坐标 x^μ 的 d 维子时空中坐标线的局域切矢量. 在此，它们将诱导出如下度规：

$$g_{\lambda\kappa}(x^\mu) = \boldsymbol{e}_\lambda(x^\mu)\,\boldsymbol{e}_\kappa(x^\mu), \tag{13.14}$$

它的逆 $g^{\lambda\kappa}(x^\mu)$ 可用来将式 (13.12) 中的指标升上去而定义出以下 $D\times d$ 个函数：

$$\varepsilon^{A\lambda}(x^\mu) \equiv g^{\lambda\lambda'}(x^\mu)\varepsilon^A{}_{\lambda'}(x^\mu). \tag{13.15}$$

如我们所知，度规 g_{AB} 可用来将上指标 $A, B, \cdots$ 降下来，而它的逆矩阵，$g^{AB} = (g^{-1})^{AB}$ 等于 g_{AB}，则可用来将下指标 $A, B, \cdots$ 升上去.

这不同于式 (11.37) 中的多值基标架 $\varepsilon^{a\lambda}(x)$ 和 $e_{b\lambda}(x)$，这里不存在完备关系 [请同式 (11.41) 进行对比]，即

$$\varepsilon^{A\lambda}(x^\mu)e_{B\lambda}(x^\mu) \neq \delta^A{}_B. \tag{13.16}$$

这是很明显的，因为 λ 只是从 1 到 $d<D$，因此没有足够的函数 $\varepsilon^{A\lambda}(x^\mu)$ 来张成 D 维嵌入空间. 然而，函数 $\varepsilon^{A\lambda}(x^\mu)$ 和 $e_{A\kappa}(x^\mu)$ 则确实满足正交关系 [请与式 (11.40) 和式 (11.41) 相对比]

$$\varepsilon^{A\lambda}(x^\mu)e_{A\kappa}(x^\mu) = e_A{}^\lambda(x^\mu)\varepsilon^A{}_\kappa(x^\mu) = \delta^\lambda{}_\kappa. \tag{13.17}$$

注意，由于非完备条件 (13.16)，曲率张量须从式 (11.129) 计算而得. 式 (11.130) 已变得毫无意义，因为那个公式的推导需要以下方程：

$$\partial_\mu\varepsilon^A{}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda\varepsilon^A{}_\lambda, \tag{13.18}$$

而这已不再正确.

幸好，内嵌空间 (embedded space) x^μ 的仿射联络的决定方程依然取与式 (11.91) 中一样的形式：

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \varepsilon_A{}^\lambda\partial_\mu\varepsilon^A{}_\nu = -\varepsilon^A{}_\nu\partial_\mu\varepsilon_A{}^\lambda. \tag{13.19}$$

这可以通过将第 11.3.4 节的推导过程稍稍做些修正而推导出来. 首先，我们看到，已无法再从形如式 (11.84) 的方程来引入矢量场 $v_\mu(x^\sigma)$ 的协变导数. 而这应该基于类似于式 (11.80) 的方程上. 通过以下定义：

$$v_A(x^\sigma) \equiv \varepsilon_A{}^\mu(x^\sigma)\,v_\mu(x^\sigma) \tag{13.20}$$

来将矢量场扩展至嵌入时空，于是有

$$\partial_B v_A = \partial_B\left(\varepsilon_A{}^\mu v_\mu\right) \qquad (\text{未定义}). \tag{13.21}$$

但这个方程是没有意义的，因为函数 v_A 只依赖于 x^A 中子空间的 x^μ.

其实，对方程 (11.80) 做一个小的修正就可给出一个有意义的用以起步的方程，这一修正可通过对方程 (11.80) 的两边同乘以 $e^b{}_\lambda$ 来实现，这就给出

$$\partial_\lambda v_a = \partial_\lambda \left(e_a{}^\mu v_\mu\right). \tag{13.22}$$

计算此导数就可给出协变导数的定义式

$$\partial_\lambda v_a = e_a{}^\mu D_\lambda v_\mu. \tag{13.23}$$

这就替换掉了式 (11.84) 中的定义式.

方程 (13.22) 和方程 (13.23) 这两个方程在嵌入方案中都还是有意义的，在此方案中，它们可写为

$$\partial_\lambda v_A = \partial_\lambda \left(\varepsilon_A{}^\mu v_\mu\right), \tag{13.24}$$

且

$$\partial_\lambda v_A = \varepsilon_A{}^\mu D_\lambda v_\mu. \tag{13.25}$$

对后一个乘以式 (13.12) 中的 $\varepsilon^A{}_\sigma$，并利用正交关系 (13.17)，我们就得

$$D_\lambda v_\mu = \varepsilon^A{}_\mu \partial_\lambda v_A. \tag{13.26}$$

将 v_A 通过式 (13.20) 用 v_μ 来表示，就给出

$$D_\lambda v_\mu = \varepsilon^A{}_\mu \partial_\lambda \varepsilon_A{}^\lambda v_\lambda = \partial_\lambda v_\mu + (\varepsilon^A{}_\mu \partial_\lambda \varepsilon_A{}^\lambda) v_\lambda = \partial_\lambda v_\mu - (\varepsilon_A{}^\lambda \partial_\lambda \varepsilon^A{}_\mu) v_\lambda. \tag{13.27}$$

这表明，仿射联络确由式 (13.19) 给出，借此，协变导数取与式 (11.85) 同样的形式.

注意，此映射 $x^A(x^\mu)$ 可通过加在嵌入时空的坐标 x^A 上的约束条件来得到. 第 13.1 节就是这种情形，其中的约束条件是通过式 (13.2) 限制在一个球上，由此我们得到了式 (13.3) 中的映射函数.

如果存在挠率，则给出不可积映射函数 $x^D(x^\mu)$ 的约束条件在经典力学的意义上是非完整的. 根据赫兹分类法 [2]，如果约束条件是可积的，则说它是完整的 (即只等价于构型时空上的某些约束). 如果约束条件是不可积的，则称它们为不完整的. 有时候，具有非完整约束条件的动力学体系也称为非完整系统.

现在，通过再一次计算球面的曲率张量我们来说明函数 $\varepsilon^A{}_\mu$ 的用途. 不同于在第 13.1 节中所采取的方法，我们这里将在三维空间中从以下嵌入映射：

$$x^A = \left(x^1, x^2, x^3\right) = r\left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta, \sin\varphi, \cos\theta\right) \tag{13.28}$$

来得到一个半径为 r 的球面. 该球面的切矢具有 3×2 分量

$$\begin{aligned}\varepsilon^A{}_1 &= r\left(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta, \sin\varphi, -\sin\theta\right) = \varepsilon_{A1},\\ \varepsilon^A{}_2 &= r\left(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0\right) = \varepsilon_{A2},\end{aligned} \tag{13.29}$$

其中的两个坐标 x^μ 就选为是球面角 $\theta \in (0,\pi)$ 和 $\varphi \in (0,2\pi)$. 此时式 (13.14) 中的诱导度规变为

$$g_{\mu\nu} = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \tag{13.30}$$

如此一来，

$$\varepsilon^1_A = \varepsilon_{A1} = \varepsilon^A{}_1, \qquad \varepsilon^2_A = \frac{1}{r}\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}, 0\right). \tag{13.31}$$

相应的黎曼联络为对称的

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{221} &= \varepsilon_{A1}\partial_2\varepsilon^A{}_2 = r\,\varepsilon_{A1}\left(-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, 0\right) \\ &= -r^2\sin\theta\cos\theta = -\bar{\Gamma}_{212} = -\bar{\Gamma}_{122}. \end{aligned} \tag{13.32}$$

其他的分量则为零. 将最后那个指标升上去，我们就得

$$\bar{\Gamma}_{22}{}^1 = -\sin\theta\cos\theta, \quad \bar{\Gamma}_{21}{}^2 = \cot\theta. \tag{13.33}$$

黎曼曲率的分量则相应为 [参看式 (11.129)]:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{122}{}^1 &= \partial_1\bar{\Gamma}_{22}{}^1 - \partial_2\bar{\Gamma}_{12}{}^1 - \bar{\Gamma}_{12}{}^1\bar{\Gamma}_{21}{}^1 - \bar{\Gamma}_{12}{}^2\bar{\Gamma}_{22}{}^1 + \bar{\Gamma}_{22}{}^1\bar{\Gamma}_{11}{}^1 + \bar{\Gamma}_{22}{}^2\bar{\Gamma}_{12}{}^1 \\ &= -\cos^2\theta + \sin^2\theta + \cot\theta\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta, \end{aligned} \tag{13.34}$$

也即

$$\bar{R}_{12}{}^{21} = \frac{1}{r^2}. \tag{13.35}$$

其他所有的分量则都可通过 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 关于 $\mu \to \nu$ 和 $\lambda \to \kappa$ 的反对称性以及关于 $\mu\nu \leftrightarrow \lambda\kappa$ 的对称性而得，而这是 $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda$ 关于 $\mu\nu$ 的对称性的结果 [参考式 (12.106) 的推导过程]. 于是我们就可一构造出里奇张量

$$\bar{R}_{\mu\nu}{}^{\lambda\mu} = \bar{R}_\nu{}^\lambda = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{13.36}$$

以及相应的标曲率

$$\bar{R} = \bar{R}_\mu{}^\nu = \frac{2}{a^2}. \tag{13.37}$$

一般来讲，任何弯曲时空都可通过将它嵌入一个高维的平坦时空来构造. 如果这个弯曲时空的维数为 d，则嵌入时空的维数至少为 $d(d+1)/2$. 这可通过以下方法看出：给定 $g_{\mu\nu}(x)$，式 (13.14) 中形如

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{AB}\frac{\partial x^A}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^B}{\partial x^\nu} \tag{13.38}$$

的诱导度规方程恰给出了 $d(d+1)/2$ 个关于 $x^A(x^\mu)$ 的微分方程.

13.3 挠　　率

只要允许嵌入映射 $x^A(x^\mu)$ 为多值的，我们就可以很容易地在内嵌空间中引入挠率. 这样做的结果就是，我们可以从仿射联络的反对称部分得到如式 (11.107) 所定义的非零的挠率张量

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda}\right) = \varepsilon_A{}^{\lambda}\partial_\mu \varepsilon^A{}_\nu - \varepsilon_A{}^{\lambda}\partial_\nu \varepsilon^A{}_\mu. \tag{13.39}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$ 含有 $D(D+1)/2$ 个独立分量. 而挠率张量 $S_{\nu\kappa}{}^{\mu}$ 则有 $D^2(D-1)/2$ 个独立分量. 为了将一个带有挠率的一般仿射度量时空嵌入一个更大的空间的话，嵌入函数 $\varepsilon^A{}_\mu$ 的独立个数 $D \times d$ 至少要等于 $D(D^2+1)/2$.

这就给出了 x^μ 空间维数和 x^A 空间维数的一个关系式

$$2\dim[x^A] \geqslant (\dim[x^\mu])^2 + 1. \tag{13.40}$$

文献与注记

[1] H. Kleinert and S.V. Shabanov, *Spaces with Torsion from Embedding, and the Special Role of Autoparallel Trajectories*, Phys. Lett B **428** , 315 (1998) (quant-ph/9503004) (`www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/259`).

[2] V.I. Arnold, V.V. Koslov, and A.I. Neishtadt, in: *Encyclopedia of Mathematical Sciences, Dynamical Systems III, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1988;

L.A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 1965;

G. Hamel, *Theoretische Mechanik – Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*, Springer Series in Mathematics, Vol. 57, Springer, Berlin, 1978.

第 14 章　多值映射原理

Those are my principles,
and if you don't like them . . . well, I have others.
Groucho Marx (1890~1977)

由平坦时空到带挠率的弯曲时空的多值非完整映射使得我们可以给出关于爱因斯坦等效原理一个更加强有力的阐述. 爱因斯坦断言，平坦时空中曲线坐标系下写出的方程在弯曲时空中同样成立，而我们则给出一个**新等效原理：**

弯曲时空中的基本物理定律就是平坦时空中物理定律在多值映射下的直接的像.

如果时空只具有曲率而不存在挠率的话，基于坐标不变性引力的最小耦合，我们就可重新得到由爱因斯坦提出的那些为人熟知的定律. 当存在挠率时，这个新的等效原理将给出一些新的预言，研究这些问题当然会十分有趣.

必须提请大家注意，最小耦合的假设只可应用于基本粒子. 这类似于电磁理论，在该理论中复合粒子如质子和中子就与不同矢势 $A^{\mu}(x)$ 最小耦合在一起. 它们的磁矩反映出了其内部夸克流的非平凡分布. 然而，夸克作为基本粒子，则确实发生了最小耦合. 轻子也一样，它的反常磁矩可以由高阶电弱微扰修正来加以解释.

在引力中，只有点粒子才能发生最小耦合. 而如星球这样具有空间延展的物体却不会. 它们的四极矩非最小耦合于潮汐力，也即耦合于几何的曲率张量，这就导致了自旋矢量 S^{μ} 在测地或自平行进动 (将在第 14.1.3 节中加以讨论) 之外的额外的进动率. 同样，质子和中子也感受到潮汐力，虽然到目前为止实验上还没有观测到. 夸克和轻子当然是最小耦合的. 光子及引力子也一样. 然而，希格斯粒子却可能不是最小耦合的，因为它并不是一个基本的场. 弱相互作用的 W 波色子和 Z 玻色子同样也是这样，它们类似于光子，但通过与希格斯粒子混合而获得质量.

14.1　点粒子的运动

弯曲时空中点粒子的测地轨迹我们已经在第 11.2 节中加以了推导. 在此新的等效原理下只需进行些微修正. 如同在从式 (11.13) 到式 (11.14) 的过程中所观察到的，如果用固有时 τ 来参数化路径的话，我们可以利用式 (11.15) 中的非相对论性作用量 $\overset{\mathrm{m}}{\bar{\mathcal{A}}}$ 来简化讨论过程.

14.1.1 具有曲率的空间中的经典作用量原理

不同于在平坦时空中那样利用式 (11.6) 作由闵可夫斯基坐标系 x^a 到曲线坐标系 x^μ 的一般坐标变换，这里我们将作如下多值坐标变换：

$$\mathrm{d}x^a = e^a{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu, \tag{14.1}$$

其中，基矢 $e^a{}_\mu$ 给出一个坐标变换，在该坐标变换下有

$$\partial_\mu e^a{}_\nu(x) - \partial_\nu e^a{}_\mu(x) \neq 0. \tag{14.2}$$

这说明在多值函数 $x^a(x^\mu)$ 前的两次微分算子并不会像式 (11.30) 中那样对易：

$$(\partial_\lambda\partial_\kappa - \partial_\kappa\partial_\lambda)x^a(x) \neq 0, \tag{14.3}$$

而这就破坏了施瓦茨可积性判据. 这样的时空含有挠率. 如果该时空同时还具有曲率的话，则函数 $e^a{}_\nu(x) = \partial_\nu x^a(x)$ 的导数也不对易 [参看式 (11.31)]：

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)e^a{}_\lambda(x) = (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\partial_\lambda x^a(x) \neq 0. \tag{14.4}$$

无论哪种情形，度规张量在像空间都取跟式 (11.8) 相同的形式，且第一眼看上去，对作用量极值的推导与第 11.2 节中完全一样，最终给出式 (11.24) 中测地轨迹的运动方程. 由于非完整变换后的作用量 (11.2) 与挠率张量场 $S_{\mu\nu}{}^\lambda$ 是独立的，因此运动方程 (11.2) 在有挠情形下也不会有何差别.

如果这一结果与用新的变分原理得到的另外的结果无明显矛盾的话，这个结果应该是完全可以接受的. 这里，我们将不采用通常途径对作用量进行变换，取而代之，我们将把平坦空间中自由粒子的运动方程 (11.1) 非完整地变换到有挠的弯曲时空中.

14.1.2 有挠空间中的自平行轨迹

在没有外力的情形下，平坦空间中的运动方程 (11.1) 表明 $x^i(\tau)$ 的二阶导数为零. 在时空中，自由运动方程为 $\ddot{x}^a(\tau) = 0$，其中的点符号表示对固有时 $\tau = s/c$ 的导数，s 为该路径的不变长度. 运动方程 $\ddot{x}^a(\tau) = 0$ 可通过式 (14.1) 中的多值映射而变换为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^a}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(e^a{}_\mu\dot{x}^\mu) = e^a{}_\mu\ddot{x}^\mu + e^a{}_{\mu,\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0, \tag{14.5}$$

或者写为

$$\ddot{x}^\mu + e_a{}^\mu e^a{}_{\kappa,\lambda}\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda = 0. \tag{14.6}$$

由逗号分割开的下标 λ 表示偏微分：$f_{,\lambda}(x) \equiv \partial_\lambda f(x)$. $\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda$ 之前的量为**仿射联络** (11.91). 于是，我们就得到了变换后的平坦时空中的运动方程

$$\ddot{x}^{\mu}+\Gamma_{\kappa\lambda}{}^{\mu}\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}=0. \tag{14.7}$$

该方程的解就称作**自平行**轨迹. 这同式 (11.24) 中的测地轨道的差别是多了一个额外的挠率项. 将分解式 (11.115) 代入，并利用 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 对前两个指标的反对称性，我们就可将式 (14.7) 重新写为

$$\ddot{x}^{\mu}+\bar{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}-2S^{\mu}{}_{\kappa\lambda}\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}=0. \tag{14.8}$$

请注意挠率张量指标的位置，这其实可以更明确地写为 $S^{\mu}{}_{\kappa\lambda}\equiv g^{\mu\sigma}g_{\lambda\tau}S_{\sigma\kappa}{}^{\tau}$. 这对于后两个指标并不是反对称的，因此它具有相应的对称部分，而这个对方程 (14.7) 是有贡献的.

我们怎样才能将此结果同上一节中将新的等效原理应用于作用量上的结果协调起来？由于此变换后的作用量独立于挠率而只携带有时空几何黎曼部分的信息，因此挠率只可能通过某些在变分过程中所忽略掉的特征来引入到运动方程中. 然而，仔细一想，我们就知道在前一节中我们的讨论是不恰当的. 根据这个新的等效原理，我们同时也需将变分手续非完整地变换到有挠弯曲时空中. 我们必须找到平坦时空变分 $\delta x^{a}(\tau)$ 在多值映射

$$\dot{x}^{\mu}=e_{a}{}^{\mu}(x)\dot{x}^{a} \tag{14.9}$$

下的像. 这个像完全不同于如图 14.1(a) 所示的普通变分. 笛卡儿坐标系的变分 $\delta x^{a}(\tau)$ 是对端点固定的路径而作的，即它们构成了 x 时空中的**闭合回路**. 然而它们的像存在于一个含有缺陷的时空中，因此具有闭合破损特性，这给出了由映射引发的挠率的大小. 我们将通过将该像写为 $\delta^{S}x^{\mu}(\tau)$ 来强调这一性质，并且称其为**非完整变分**(nonholonomic variations) . 该表达式的上标就表示这个特性是由挠率引起的.

现在，我们来对此进行严格计算. 这两个空间中的路径由下述积分方程相联：

$$x^{\mu}(\tau)=x^{\mu}(\tau_{a})+\int_{\tau_{a}}^{\tau}\mathrm{d}\tau' e_{a}{}^{\mu}(x(\tau'))\dot{x}^{a}(\tau'). \tag{14.10}$$

对于 x 空间中相邻的两个相差一个变分 $\delta x^{a}(\tau)$ 的轨道，方程 (14.10) 就确定出了非完备变分 $\delta^{S}x^{\mu}(\tau)$:

$$\delta^{S}x^{\mu}(\tau)=\int_{\tau_{a}}^{\tau}\mathrm{d}\tau'\delta^{S}[e_{a}{}^{\mu}(x(\tau'))\dot{x}^{a}(\tau')]. \tag{14.11}$$

同式 (14.9) 的比较显示出这个变分 δ^{S} 同 $x^{\mu}(\tau)$ 关于参数 τ 的导数是相互对易的：

$$\delta^{S}\dot{x}^{\mu}(\tau)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^{S}x^{\mu}(\tau), \tag{14.12}$$

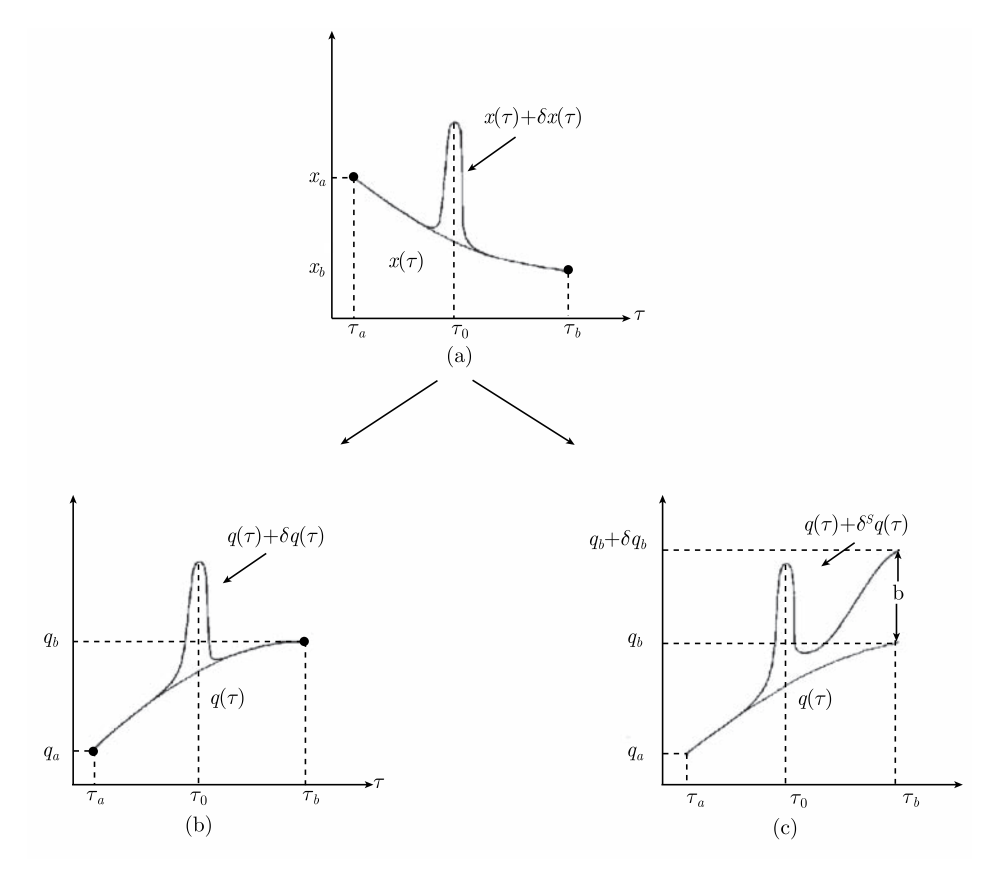


图 14.1 δ 函数路径变分在完整和非完整映射下的像. 在完整映射情况下，(a) 中的路径 $x(\tau)$ 和 $x(\tau)+\delta x(\tau)$ 变为 (b) 中的路径 $x(\tau)$ 和 $x(\tau)+\delta x(\tau)$. 在 $S_{\mu\nu}^{\lambda}\neq 0$ 的非完整情形下，它们变为 (c) 中的 $x(\tau)$ 和 $x(\tau)+\delta^S x(\tau)$，且在 t_b 处有一个闭合破损 b^μ ，类比于含位错的固体中的伯格斯矢量 b^μ

这就同式 (2.7) 中普通的变分 δx^a 是一样的：

$$\delta\dot{x}^a(\tau)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x^a(\tau). \tag{14.13}$$

我们这里也引入一个 x^μ 空间中轨道 $x^\mu(\tau)$ 的**辅助非完整变分**(auxiliary non-holonomic variation)：

$$\bar{\delta}x^\mu\equiv e_a{}^\mu(x)\delta x^a. \tag{14.14}$$

不同于 $\delta^S x^\mu(\tau)$，这在端点处为零，

$$\bar{\delta}x(\tau_a)=\bar{\delta}x(\tau_b)=0, \tag{14.15}$$

就如通常的变分 $\delta x^a(\tau)$ 一样，也即它们同没有变动的轨道构成了**闭合**路径.

利用式 (14.12)、式 (14.13) 以及由定义得出 $\delta^S x^a(\tau) \equiv \delta x^a(\tau)$ 这一事实，我们就可从式 (14.11) 得到如下关系：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^S x^\mu(\tau) &= \delta^S e_a{}^\mu(x(\tau))\dot{x}^a(\tau) + e_a{}^\mu(x(\tau))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x^a(\tau) \\ &= \delta^S e_a{}^\mu(x(\tau))\dot{x}^a(\tau) + e_a{}^\mu(x(\tau))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[e^a{}_\nu(\tau)\bar{\delta} x^\nu(\tau)]. \end{aligned} \tag{14.16}$$

将

$$\delta^S e_a{}^\mu(x) = -\Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \delta^S x^\lambda e_a{}^\nu, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}e^a{}_\nu(x) = \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\lambda e^a{}_\mu \tag{14.17}$$

代入后，式 (14.16) 就变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^S x^\mu(\tau) = -\Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \delta^S x^\lambda \dot{x}^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\lambda \delta x^\nu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{\delta} x^\mu. \tag{14.18}$$

引入非完整变分 $\delta^S x^\mu$ 同辅助闭合非完整变分 δx^μ 之间的差：

$$\delta^S b^\mu \equiv \delta^S x^\mu - \bar{\delta} x^\mu. \tag{14.19}$$

于是我们就可将式 (14.18) 重新写为 $\delta^S b^\mu$ 的一阶微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^S b^\mu = -\Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu \delta^S b^\lambda \dot{x}^\nu + 2S_{\lambda\nu}{}^\mu \dot{x}^\lambda \bar{\delta} x^\nu. \tag{14.20}$$

当引入度规

$$G^\mu{}_\lambda(\tau) \equiv \Gamma_{\lambda\nu}{}^\mu(x(\tau))\dot{x}^\nu(\tau) \tag{14.21}$$

以及

$$\Sigma^\mu{}_\nu(\tau) \equiv 2S_{\lambda\nu}{}^\mu(x(\tau))\dot{x}^\lambda(\tau) \tag{14.22}$$

后，方程 (14.20) 就可写为一个矢量微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta^S b = -G\delta^S b + \Sigma(\tau)\,\bar{\delta} x^\nu(\tau). \tag{14.23}$$

尽管没有必要再向前一步，我们还是给出这一方程的解

$$\delta^S b(\tau) = \int_{\tau_a}^{\tau} \mathrm{d}\tau'\, U(\tau,\tau')\,\Sigma(\tau')\,\bar{\delta} x(\tau'), \tag{14.24}$$

其中，矩阵

$$U(\tau,\tau') = \hat{T}_s \exp\left[-\int_{\tau'}^{\tau}\mathrm{d}\tau'' G(\tau'')\right], \tag{14.25}$$

$\hat{T}_s$ 表示关于参数 s 的编时算子. 当不存在挠率时，$\Sigma(\tau)$ 恒为零，且 $\delta^S b(\tau) \equiv 0$，变分 $\delta^S x^\mu(\tau)$ 就与辅助闭合非完整变分 $\delta x^\mu(\tau)$ 相一致 [图 14.1(b)]. 在一个具有挠率的时空中，则变分 $\delta^S x^\mu(\tau)$ 与 $\bar{\delta} x^\mu(\tau)$ 是不相同的 [图 14.1(c)].

现在，我们来计算任意一个非完整变分 $\delta^S x^\mu(\tau) = \delta x^\mu + \delta^S b^\mu$ 下作用量 (11.10) 的变分. 由于 s 为不变路径长度，我们正巧就可以利用辅助作用量 (11.15) 来计算这个量 (它们之间仅仅相差一个无关要紧的系数 2)：

$$\delta^S \bar{\mathcal{A}} = M \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \delta^S \dot{x}^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\lambda\kappa} \delta^S x^\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \right). \tag{14.26}$$

对 $\delta \dot{x}$ 项进行分部积分，并利用式 (14.15)、式 (14.12) 以及由定义 $g_{\mu\nu} \equiv e^a{}_\mu e^a{}_\nu$ 和 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv e_a{}^\lambda \partial_\mu e^a{}_\nu$ 而得到的恒等式 $\partial_\mu g_{\nu\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}$，我们就得

$$\delta^S \bar{\mathcal{A}} = M \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \left[-g_{\mu\nu} \left(\ddot{x}^\nu + \bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \right) \delta x^\mu + \left(g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \frac{d}{d\tau} \delta^S b^\mu + \Gamma_{\mu\lambda\kappa} \delta^S b^\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \right) \right]. \tag{14.27}$$

为了得到运动方程，我们首先对作用量在无挠时空中作变分. 于是 $\delta^S b^\mu(\tau) \equiv 0$，且式 (14.27) 变为

$$\delta^S \bar{\mathcal{A}} = -M \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}\tau g_{\mu\nu} (\ddot{x}^\nu + \bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa) \delta x^\nu. \tag{14.28}$$

这样，作用量原理 $\delta^S \bar{\mathcal{A}} = 0$ 就给出了式 (11.24) 中的测地线方程，而这正是无挠情形下的正确的粒子轨迹.

当存在挠率时，$\delta^S b^\mu$ 不再为零，则式 (14.27) 中的第二个括号内的部分将对运动方程有所贡献. 当把式 (14.20) 代入后，与 $\delta^S b^\mu$ 成正比的非局域项将被消掉，于是作用量总的非完整变分就为

$$\begin{aligned} \delta^S \bar{\mathcal{A}} &= -M \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau g_{\mu\nu} \left[\ddot{x}^\nu + \left(\bar{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\nu + 2S^\nu{}_{\lambda\kappa} \right) \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \right] \delta x^\mu \\ &= -M \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau g_{\mu\nu} \left(\ddot{x}^\nu + \Gamma_{\lambda\kappa}{}^\nu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\kappa \right) \delta x^\mu. \end{aligned} \tag{14.29}$$

式 (14.29) 第二行可利用 $\Gamma_{\lambda\kappa}{}^\nu = \bar{\Gamma}_{\{\lambda\kappa\}}{}^\nu + 2S^\nu{}_{\{\lambda\kappa\}}$ 由第一行直接导出. 花括号表示对所包含的指标对称化. 令 $\delta^S \bar{\mathcal{A}} = 0$ 并对 $\bar{\delta} x(\tau)$ 将式 (14.14) 下任意一个 δ 函数变分 $\delta x^a(\tau) \propto \epsilon^a \delta(\tau - s_0)$ 的像代入就给出了式 (14.7) 中的自平行运动方程，而这正是我们想要证明的.

上述对于作用量的变分处理仍然有些繁琐，因此需要更简便的方法[1, 2]. 变分式 (14.27) 中第二个括号给出的额外的项其实同辅助闭合非完整变分 (14.14) 的一个简单的特性相联. 为了找到这个，我们将定义方程 (14.14) 对时间求导 $d_t \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t$，

于是就得

$$d_t \bar{\delta} x^\mu(\tau) = \partial_\nu e_a{}^\mu(x(\tau))\,\dot{x}^\nu(\tau)\delta x^a(\tau) + e_a{}^\mu(x(\tau)) d_\tau \delta x^a(\tau). \tag{14.30}$$

现在，我们来通过对变分 $\bar{\delta}$ 和 s 导数作相反顺序的操作来计算 $d_\tau \bar{\delta} x^\mu(\tau)$. 由式 (14.9) 及式 (11.40) 我们就有关系式

$$d_\tau x^\lambda(\tau) = e_i{}^\lambda(x(\tau))\, d_\tau x^i(\tau)\,. \tag{14.31}$$

对此进行变分得

$$\bar{\delta} d_\tau x^\mu(\tau) = \partial_\nu e_a{}^\mu(x(\tau))\,\bar{\delta} x^\nu d_t x^a(\tau) + e_a{}^\mu(x(\tau))\bar{\delta} d_\tau x^a. \tag{14.32}$$

由于 x^a 时空中的变分同 s 导数是可对易的 [参看式 (14.13)]，我们得

$$\bar{\delta} d_\tau x^\mu(\tau) - d_\tau \bar{\delta} x^\mu(\tau) = \partial_\nu e_a{}^\mu(x(\tau))\,\bar{\delta} x^\nu d_t x^a(\tau) - \partial_\nu e_a{}^\mu(x(\tau))\,\dot{x}^\nu(\tau)\delta x^a(\tau). \tag{14.33}$$

当把 $\delta x^a(\tau)$ 和 $d_t x^a(\tau)$ 重新用 $\bar{\delta} x^\mu(\tau)$ 和 $d_t x^\mu(\tau) = \dot{x}^\mu(\tau)$ 来表示，并利用式 (11.91) 后，这就变为

$$\bar{\delta} d_\tau x^\mu(\tau) - d_\tau \bar{\delta} x^\mu(\tau) = 2S_{\nu\lambda}{}^\mu \dot{x}^\nu(\tau)\bar{\delta} x^\lambda(\tau). \tag{14.34}$$

于是，由于有挠时空中的闭合破损，路径 $x^\mu(\tau)$ 前的算子 d_τ 和 $\bar{\delta}$ 是不可交换的. 换句话说，与开放变分 $\bar{\delta} x^\mu(\tau)$ 不同 [当然也同普通变分 $\delta x^\mu(\tau)$ 不同]，速度 $\dot{x}^\mu(\tau)$ 的辅助闭合非完整变分 $\bar{\delta}$ 将不再与变分的速度相一致.

这一特性就导致了轨迹由测地线变为了自平行的. 的确，对作用量

$$\bar{\mathcal{A}} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau L\left(x^\mu(\tau), \dot{x}^\mu(\tau)\right) \tag{14.35}$$

直接用 $\bar{\delta} x^\mu(\tau)$ 来变分并利用式 (14.34)，我们就得到

$$\bar{\delta}\bar{\mathcal{A}} = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \mathrm{d}\tau \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\bar{\delta} x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\bar{\delta} x^\mu + 2\,S^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\,\dot{x}^\nu \bar{\delta} x^\lambda \right\}. \tag{14.36}$$

对第二项进行分部积分并利用端点处变分 $\bar{\delta} x^\mu(\tau)$ 为零，我们就得欧拉 - 拉格朗日方程

$$\frac{\delta \bar{\mathcal{A}}}{\delta x^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\bar{\delta}\bar{\mathcal{A}}}{\bar{\delta} x^\mu} - 2S_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} = -2S_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}. \tag{14.37}$$

这同标准的欧拉–拉格朗日方程相差一个额外的扭转力. 对于式 (11.10) 中的作用量，我们于是就得到了下述运动方程：

$$\ddot{x}^\mu + \left[g^{\mu\kappa}\left(\partial_\nu g_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\,\partial_\kappa g_{\nu\lambda}\right) + 2S^\mu{}_{\nu\lambda}\right]\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0, \tag{14.38}$$

我们再一次得到了自平行线方程 (14.7).

因此，对这个新的等效原理的合理运用将会给出有挠弯曲时空中点粒子的自平行轨迹方程.

14.1.3 自旋的运动方程

在式 (1.296) 中我们已经求出了闵可夫斯基时空中一个自旋点粒子自旋 4-矢量对时间的导数. 而多值或者说是非完整映射原理则将此变到一个一般的仿射几何中：

$$\frac{DS_\mu}{\mathrm{d}\tau} = S_\kappa \frac{Du^\kappa}{\mathrm{d}\tau} u_\mu. \tag{14.39}$$

该方程表示，当没有外力时，沿着整个自平行轨迹，点粒子的自旋 4-矢量将永远同它自旋的初始指向平行：

$$\frac{DS_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{14.40}$$

在爱因斯坦理论中，有同样的方程，只不过将 D_μ 换为黎曼协变导数 $\bar{D}_\mu$. 时空弯曲的一个结果就是自旋的指向将发生**测地进动**. 如果时空中还存在挠率的话，方程 (14.40) 预言还会存在**自平行进动**.

14.1.4 梯度挠率的特性

考虑一个特殊的挠率，它由一个标量场 $\theta(x)$ 梯度的反对称组合构成

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda(x) = \frac{1}{2}\left[\delta_\nu{}^\lambda \partial_\mu \theta(x) - \delta_\mu{}^\lambda \partial_\nu \theta(x)\right]. \tag{14.41}$$

此表达式称为**梯度挠率** (gradient torsion)[3]. 如果时空只具有梯度挠率，则它对于点粒子运动方程的影响完全可以用纯粹的黎曼时空来模拟，只要将作用量用此标量场 $\theta(x)$ 做一个特殊的修正，这个修正我们将在式 (14.44) 中予以说明. 将此修正后的作用量按通常的方法取极值，所得到的运动方程同式 (14.8) 中在具有挠率的原始时空中由修正变分原理所得的自平行方程

$$\ddot{x}^\mu + \bar{\Gamma}^\mu_{\kappa\lambda}\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda - 2S^\mu{}_{\kappa\lambda}\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda = 0 \tag{14.42}$$

完全一致. 对于纯梯度挠率 (14.41)，该方程变为

$$\ddot{x}^\lambda(s) + \overline{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda(x(s))\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s) = -\dot{\theta}(x(s))\dot{x}^\lambda(s) + g^{\lambda\kappa}(x(s))\partial_\kappa\theta(x(s)), \tag{14.43}$$

上式右边这些多出来的项正反映了挠率对平行四边形闭合的破坏.

对于这一轨迹，我们可以通过以下这个不同的作用量在纯黎曼时空中得到：

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = -mc\int_{\sigma_a}^{\sigma_b} \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{e}^{\theta(x)} \left[g_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^\mu(\sigma)\dot{x}^\nu(\sigma)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{14.44}$$

这个额外的因子 $\mathrm{e}^{\theta(x)}$ 在黎曼时空中的效应与黎曼–嘉当时空中梯度挠率 (14.41) 的效果是完全一致的. 事实上，此作用量的极值可以通过引入辅助度规

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \mathrm{e}^{2\theta(x)} \equiv g_{\mu\nu}(x). \tag{14.45}$$

而从不含 θ- 场的测地轨迹中推导得出. 当然，不变线元依然为

$$\mathrm{d}s = [g_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^{\mu}(\sigma)\dot{x}^{\nu}(\sigma)]^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\theta(x)}\,[\tilde{g}_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^{\mu}(\sigma)\dot{x}^{\nu}(\sigma)]^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\theta(x)}\mathrm{d}\tilde{s}. \tag{14.46}$$

然后，如同式 (11.13) 到式 (11.18) 中那样对对作用量作变分，我们就得到了修正的运动方程 (11.20)：

$$\tilde{g}_{\lambda\nu}\frac{\mathrm{d}^2x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\tilde{\sigma}^2} + \left(\partial_{\mu}\tilde{g}_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\lambda}\tilde{g}_{\mu\nu}\right)\frac{\mathrm{d}x^{\mu}(\sigma)}{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\tilde{\sigma}} = 0. \tag{14.47}$$

将式 (14.45) 和式 (14.46) 代入，这就变成

$$\begin{aligned} g_{\lambda\nu}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma^2} - \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right) + \left(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}\right)\frac{\mathrm{d}x^{\mu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} \\ +2\dot{\theta}(x)\frac{\mathrm{d}x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} - \partial_{\lambda}\theta(x)g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = 0, \end{aligned} \tag{14.48}$$

而这与式 (14.43) 中的自平行轨迹是一致的.

14.2　由嵌入而得的自平行轨迹

对自平行轨迹的推导还存在另一条途径. 我们将用第 13.2 节中所述的嵌入手续来代替将物理定律由平坦时空变到有挠弯曲时空中的多值映射方法.

14.2.1　自平行的特殊作用

我们首先要说明，黎曼时空中的测地线不仅仅可以通过对两个固定点间路径长度取极值而得到，也可以通过将黎曼时空嵌入到高维平坦时空中来求得. 这可以通过对张成该平坦时空的坐标加以某种特殊约束条件来实现. 此限定超曲面上的点就构成了该内嵌黎曼时空. 平直时空中的直线是测地和自平行的，它们给出了在此时空中自由粒子运动的轨迹. 如果此运动被限制在该约束超曲面上，则这些线就变成了相应的测地线. 这种约束可以通过给运动方程加上限定方程这种传统的方法来实现. 而当相应的约束力被移除后，测地线将变成潜入时空中的直线.

对于有挠弯曲时空，第 13 章已讨论了相应的嵌入手续. 文献 [4] 也给出了关于轨迹的相应结果. 原来，即便从这一角度看，自平行曲线在内嵌时空中也是特别受青睐的几何曲线. 它们正是嵌入时空中的直线的像.

14.2.2 高斯的最小约束原理

相较于测地运动，经典力学论据也更倾向于自平行. 这其实与惯性的概念有着内在的联系. 惯性偏好这样一类轨迹，该轨迹的加速度相较于非约束运动的加速度偏离**最小**. 这一性质在数学上可以用高斯最小约束原理来系统阐述[5, 6].

考虑时空 x^A 中一个具有拉格朗日量 $L = L(x^A, \dot{x}^A) = L(x^A, u^A)$ 的拉格朗日系统. 每一刻，该系统的一个态都可用相空间 $(x^A(\tau), u^A(\tau))$ 中的一个点来标记. 令 $H_{AB}(x^A(\tau), u^A(\tau)) \equiv \partial^2 L/\partial u^A \partial u^B$ 为该系统的**海赛矩阵**(Hessian matrix). 令 $x_1^A(\tau)$ 和 $x_2^A(\tau)$ 为两条稍稍不同的路径. 高斯对这两个路径引入了一个偏差函数：

$$G = \frac{1}{2}\left(\dot{v}_1^A - \dot{v}_2^A\right) H_{AB}\left(\dot{v}_1^B - \dot{v}_2^B\right) \ , \tag{14.49}$$

其中，圆点表示对 τ 求导. 它描述两种可能的运动间的相互偏移[5, 6].

现在对 x^A 时空中的运动加以约束. 该约束所允许的所有路径 $x^A(\tau)$ 称为**容许的** (conceivable) 运动. 如果一个路径 $\bar{x}^A(\tau)$ 不加约束即满足欧拉–拉格朗日方程，则称为是**被释放的**(released). 高斯最小约束原理说，容许的运动相对于释放运动的偏差在物理轨道上应保持不变. 在嵌入时空 x^A 中被释运动即为加速度为零 $\ddot{x}^A = \dot{u}^A = 0$ 的自由运动，也即它沿直线跑动. 该原理表明，物理轨道会尽可能地接近直线.

利用式 (13.20) 计算容许运动的加速度 $\dot{u}^A$ ，我们发现

$$\dot{u}^A = \varepsilon^A{}_\mu \dot{u}^\mu + \partial_\nu \varepsilon^A{}_\mu u^\mu u^\nu \ . \tag{14.50}$$

参考方程 (13.19)、(11.85) 以及 (11.118)，我们也可将此写为

$$\dot{u}^A = \varepsilon^A{}_\mu \frac{D}{\mathrm{d}\tau} u^\mu. \tag{14.51}$$

由于 H_{AB} 在平直时空中只包含为常数 ± 1 的对角元，则高斯偏差函数 (14.49) 取下列形式：

$$G = \frac{1}{2}\left[\dot{u}^A\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{Du^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right]^2 \ , \tag{14.52}$$

其中，我们已消掉了无穷小因子 $\mathrm{d}\tau^2$. 该函数在满足运动方程

$$\frac{Du^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \ . \tag{14.53}$$

的路径上取最小值 $G = 0$. 这再一次给出了自平行轨迹.

另一个推导自平行轨迹的方法依赖于达朗贝尔–拉格朗日原理[5, 6]. 在理论力学中，我们定义了**拉格朗日导数**

$$[L]_A \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial u^A} - \frac{\partial L}{\partial x^A}. \tag{14.54}$$

达朗贝尔–拉格朗日原理断言，具有拉格朗日量 L 的系统地运动对于约束所允许的任何速度均满足

$$u^A [L]_A = 0. \tag{14.55}$$

取自由拉格朗日 $L = u^A u_A/2$ ，相应地有 $[L]_A = \dot{u}_A$，借助式 (14.51)，我们发现自平行方程 (14.53) 满足式 (14.55).

最后，我们需指出，**完整**系统的运动完全决定于约束曲面上拉格朗日量的限定条件[5]. 因此，完整约束体系是同一般的非约束拉格朗日系统不可区分的. 然而，这对于非完整系统却不适用，意味着限定在约束曲面上的拉格朗日量的相应的欧拉–拉格朗日方程与约束运动的原始方程并不一致. 这一困难使得我们无法将常规的哈密顿形式应用于自平行运动以及对此进行正则量子化. 换句话说，狄拉克关于约束系统的量子化方法[7] 是无法用于非完整系统的，因为它们不满足传统的拉格朗日形式[5].

14.3　可看作自平行轨迹的麦克斯韦–洛伦兹轨道

在弯曲时空中对带电粒子的运动建立麦克斯韦–洛伦兹方程是相当直接的. 我们可以将平直时空运动方程 (1.170) 改写为

$$\ddot{x}^a(\tau) = \frac{e}{c} F^a{}_b(x(\tau))\dot{x}^b(\tau), \tag{14.56}$$

并对它作多值映射. 这就会增加一个式 (14.7) 中的几何力，于是就导致

$$\ddot{x}^\lambda(\tau) + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda(x(\tau)\dot{x}^\mu(\tau)\dot{x}^\nu(\tau) = \frac{e}{mc} F^\lambda{}_\kappa(x(\tau))\,\dot{x}^\kappa(\tau). \tag{14.57}$$

有意思的是，我们现在看到，这个运动方程可看作有挠仿射几何中的自平行运动方程. 而依据方程[8]

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda(x(\tau)) = \frac{e}{mc} F_{\mu\nu}(x(\tau))\dot{x}^\lambda(\tau), \tag{14.58}$$

挠率只产生于粒子轨道上. 事实上，如果我们将此挠率表达式代入式 (14.8) 中的自平行方程中，我们就得到了弯曲时空中的麦克斯韦–洛伦兹方程 (14.57).

注意，此类型的挠率是不在时空中传播的.

14.4　由挠率而得 Bargmann-Michel-Telegdi 方程

很有意思，自旋进动方程 (1.309) 也可看作有挠时空中的一个纯粹的几何方程. 如果我们将平直时空中的方程 (1.309) 变到弯曲时空中，就得

$$\frac{\bar{D}}{\mathrm{d}\tau}S^{\mu}=\frac{e}{2mc}\left[gF^{\mu\nu}S_{\nu}+\frac{g-2}{m^2c^2}p^{\mu}S_{\lambda}F^{\lambda\kappa}p_{\kappa}\right]=0. \tag{14.59}$$

对于经典粒子，$g=1$，依照式 (14.40) 中定律，该方程同沿路径 $q^{\mu}(\tau)$ 平行移动的自旋矢量的运动方程是相同的. 根据式 (11.120) 将协变微商分解为黎曼部分和挠率贡献部分，我们就得

$$\frac{DS_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\bar{D}S_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}+S^{\mu}{}_{\nu\lambda}S^{\nu}\dot{x}^{\lambda}-S_{\nu\lambda}{}^{\mu}S^{\nu}\dot{x}^{\lambda}+S_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu}S^{\nu}\dot{x}^{\lambda}. \tag{14.60}$$

此处将挠率 (14.58) 代入就得

$$\frac{DS_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\bar{D}S_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}+\frac{e}{mc^3}\left(F^{\mu}{}_{\nu}\,\dot{x}_{\lambda}S^{\nu}\dot{x}^{\lambda}-F_{\nu\lambda}\,\dot{x}^{\mu}S^{\nu}\dot{x}^{\lambda}+F_{\lambda}{}^{\mu}\,\dot{x}_{\nu}S^{\nu}\dot{x}^{\lambda}\right). \tag{14.61}$$

我们知道 $\dot{x}^{\lambda}\dot{x}_{\lambda}=c^2$[参看式 (1.151)]，并且自旋矢量具有横向性 (1.290)，式 (14.61) 最后一项为零，我们就得

$$\frac{DS_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\bar{D}S_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}+\frac{e}{mc}\left(F^{\mu}{}_{\nu}S^{\nu}-\frac{1}{c^2}\,\dot{x}^{\mu}\,S^{\nu}F_{\nu\lambda}\dot{x}^{\lambda}\right), \tag{14.62}$$

对于 $g=1$ 的情形，这确实同式 (14.59) 是相等的.

文献与注记

[1] H. Kleinert and A. Pelster, Gen. Rel. Grav. **31**, 1439 (1999) (gr-qc/9605028);
H. Kleinert, Mod. Phys. Lett. **A 4**, 2329 (1989) (`kl/199`),
其中`kl` 为网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的缩写;
H. Kleinert, *Quantum Equivalence Principle for Path Integrals in Spaces with Curvature and Torsion*, Lecture at the XXVth International Symposium Ahrenshoop on *Elementary Particles* held in Gosen/Germany, CERN report 1991, ed. H. J. Kaiser (quant-ph/9511020);
H. Kleinert, *Quantum Equivalence Principle,* Lecture presented at the Summer School *Functional Integration: Basics and Applications* in Cargèse/France (1996) (`kl/199`).

[2] See the discussion in Chapter 10 of the textbook:
H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, 4th ed., World Scientific, Singapore, 2006 (`kl/b5/psfiles/pthic10.pdf`).

[3] S. Hojman, M. Rosenbaum, and M.P. Ryan, Phys. Rev. D **19**, 430 (1979).

[4] H. Kleinert and S.V. Shabanov, *Spaces with Torsion from Embedding, and the Special Role of Autoparallel Trajectories*, Phys. Lett B **428** , 315 (1998) (quant-ph/9503004) (`kl/259`).

[5] V.I. Arnold, V.V. Koslov and A.I. Neishtadt, in: *Encyclopedia of Mathematical Sciences, Dynamical Systems III, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer, Berlin, 1988;
L.A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann, London, 1965;
G. Hamel, *Theoretische Mechanik – Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*, Springer Series in Mathematics, Vol. 57, Springer, Berlin, 1978.

[6] L.S. Polak (ed.), *Variational principles of mechanics. Collection of papers*, Fizmatgiz, Moscow, 1959.

[7] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University Press, NY, 1964.

[8] H.I. Ringermacher, Class. Quant. Grav. **11**, 2383 (1994).

第 15 章　引力场方程

A field that has rested gives a bountiful crop.

Ovid (43BC~17AD)

在第 14 章，我们给出了引力场中粒子的运动方程. 它看起来同闵可夫斯基时空中粒子运动方程在曲线坐标系中的表达式完全一样. 引力场的所有信息都包含在度规张量的特定的性质中. 现在，我们要问如何才能得到引力质量物质所引起的度规. 为此，度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 的十个分量就必须看成动力学变量，并且我们需要一个作用量原理来确定它们[1~3].

15.1　不变作用量

$g_{\mu\nu}(x)$ 的运动方程必须与所采用的坐标无关. 而这点可以用作用量在爱因斯坦变换 $x^\mu \to x'^{\mu'}(x^\mu)$ 下的不变性来加以保证. 相应的坐标增量的变换关系为

$$\mathrm{d}x^\mu \to \mathrm{d}x'^{\mu'} = \alpha^{\mu'}{}_{\mu}(x)\mathrm{d}x^\mu, \quad \alpha^{\mu'}{}_{\mu}(x) = \partial x'^{\mu'}/\partial x^\nu. \tag{15.1}$$

我们希望为引力场建立一个**局域作用量**. 根据第 2.3.1 节中的定义，这个作用量必须是一个拉格朗日密度的积分

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x). \tag{15.2}$$

这个拉格朗日密度 $\mathcal{L}(x)$ 只可能依赖于度规及其一阶导数 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)$，最多相差一个全散度.

在式 (15.1) 中的坐标变换下，体元的变换如下：

$$\mathrm{d}^4x \to \mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x\ \det\alpha. \tag{15.3}$$

最简单的使得作用量 (15.2) 不变的拉格朗日密度 $\mathcal{L}(x)$ 可以从下述度规张量的行列式来构造：

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{15.4}$$

由于在变换 (15.1) 下度规张量变为 $g'_{\mu'\nu'}(x') = g_{\mu\nu}(\alpha^{-1})^{\mu}{}_{\mu'}(\alpha^{-1})^{\nu}{}_{\nu'}$，我们看到

$$g \to g' = g \overset{-2}{\det}\alpha, \tag{15.5}$$

于是积分

$$\mathcal{A}_\Lambda = \int \mathrm{d}^4 x \, \mathcal{L}_\Lambda(x) \equiv \frac{\Lambda}{\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \tag{15.6}$$

在坐标变换 (15.1) 下是不变的. 然而，这个表达式还不能作为引力的作用量，因为它还不包含度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的导数，因此还无法给出运动方程. 为了能够使引力在时空中传播，我们必须得找到一个标量拉格朗日密度 $\mathcal{L}$，它包含 $g_{\mu\nu}$ 以及 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ ，即作用量的形式应取

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4 x \, \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \partial g). \tag{15.7}$$

由前面几何的分析，我们知道，包含导数 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ 的唯一的标量就是标曲率 R. 因此，希尔伯特和爱因斯坦提出下述引力场作用量

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \, \bar{R}, \tag{15.8}$$

其中，κ 与式 (1.3) 中的牛顿引力常数 $G_{\mathrm{N}} \approx 6.673 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^2)$ 有如下关系：

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{c^3}{8\pi G_{\mathrm{N}}}. \tag{15.9}$$

这也可以用式 (12.42) 中的普朗克长度表示为

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{8\pi l_{\mathrm{P}}^2}. \tag{15.10}$$

如果时空含有挠率的话，作用量仍取式 (15.8) 中同样的形式，但需要将黎曼标曲率 $\bar{R}$ 替换为式 (11.142) 中黎曼–嘉当形式的 R：

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \, R. \tag{15.11}$$

这个作用量称为**爱因斯坦–嘉当作用量**.

从基本的观点来看，爱因斯坦–希尔伯特作用量 (15.8) 有个到目前为止还没有解决的问题，就是无法量子化引力. 对该理论的量子化尝试会在普朗克长度 l_{P} 量级这样小的尺度上碰到严重的困难，在这个极短的尺度上会出现发散，而且无法吸收到耦合常数 κ 中. 这一特性称为引力的**不可重整化**. 这样一个理论只在经典有效理论下才有意义.

但从实用的角度来看，引力量子化并无关紧要. 至少到现在看来，实验完全无法探测那样一个极小的距离. 另外，很有可能引力波量子，即**引力子**，原则上来讲在整个宇宙寿命内是无法探测的[4]. 因此，看起来我们并不需要对引力进行量子化

就可以活得很好[4]. 但必须指出，如果要建立一个在任何小尺度上可以解释所有物理现象的**全能理论**的话，引力量子化则是需要的. 这方面的学者认为目前已知的基本理论无法给出普朗克尺度下物质的全新的特性. 本书的作者并不同意这一观点，作者始终相信，自然总是会不断地给我们惊喜，而且实验物理学家们一定会发现一些目前理论物理学家无法想像的现象.

假如为了理论完美的原因，我们坚持要对引力量子化的话，我们只需在爱因斯坦作用量 (15.8) 上增加一个由曲率张量构成的不变的二次型项，它的一般形式为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{\kappa_{2,1}}\bar{R}^2 + \frac{1}{\kappa_{2,1}}\bar{R}_{\mu\nu}\bar{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa_{2,3}}\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}\bar{R}^{\mu\nu\lambda\kappa}\right), \tag{15.12}$$

其中，耦合常数 $\kappa_{2,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ 是无量纲的. 这个理论是可重整化的，即所有的发散可以吸收到耦合常数中. 而且这个理论在普朗克长度这样小的尺度上也是有意义的. 但它仍然包含有非物理的特性，比如负模态 (states with negative norm). 不过，我们并不需要为此担心，因为在那个极小尺度上的物理会在今后很多年之内保持未知. 我们必须清楚，即便是量子电动力学，这个目前为止量子场论方面最精确的而且是可以完美重整化的理论，在极小的尺度上也具有非物理的性质. 这就是著名的朗道鬼态，而这个却永远不会检测到，因为远在它可以显现之前，该理论从强烈的相互作用中已获得了大得多的修正，而这并没有包含在量子电动力学的作用量里. 这正是重整化理论令人满意的地方，它可以给出合理的预言而不依赖于无法探测的尺度上的物理.

因此，我们就可以将我们的注意力关注在爱因斯坦–希尔伯特作用量 (15.8) 所给定的经典引力理论上. 对于一个包含有一组质点 $m_1, \ldots, m_N$ 的体系，我们将式 (11.2) 中的质点作用量加入，就得到了总的作用量

$$\mathcal{A} = \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} - \sum_{n=1}^{N} m_n c\int \mathrm{d}s_n \equiv \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} + \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}\,. \tag{15.13}$$

在接下来的计算中，设 $\kappa = 1$ 会比较方便，因为在所有的将要推导的场方程中 κ 总可以看成是场和物质部分的一个相对因子.

固定 $g_{\mu\nu}(x)$ 而对粒子轨道 $x_n(s_n)$ 作变分，我们就得到了开始时讨论的点粒子在外界引力场中的运动方程. 另外，作用量 (15.13) 还可用来确定这些点粒子所产生的引力场. 这可通过变分方程

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = 0 \tag{15.14}$$

来得到. $g_{\mu\nu}$ 有 10 个独立分量. 其中四个是非物理的，只不过给出了再参数化自由度.

然而，要确定时空几何，方程 (15.14) 是不够的. 曲率张量 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 中还包含有由挠率张量 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 结合而构成的扭曲张量 $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$. 它具有 24 个独立分量，且可用下述运动方程来确定：

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta K_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x)} = 0. \tag{15.15}$$

由于只考虑对称 (黎曼) 时空，爱因斯坦从一开始就避免这一问题. 然而，对于自旋物质，这确实就不够了，为了建立一个完整的动力学理论，我们就需要确定由自旋密度所诱导的挠率场.

15.2 能动张量与自旋密度

我们现在来对作用量中各项关于 $g^{\mu\nu}$ 和 $K^{\mu\nu\lambda}$ 的导数分别进行计算. 考虑到后面将要给出的物理解释，我们分别令

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}, \tag{15.16}$$

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \overset{\mathrm{f}}{T}{}^{\mu\nu} \tag{15.17}$$

为物质和场的**对称能动张量**，而

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta K_{\mu\nu}{}^{\lambda}} \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{,\mu}, \tag{15.18}$$

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta K_{\mu\nu}{}^{\lambda}} \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \overset{\mathrm{f}}{\Sigma}{}^{\nu}{}_{\lambda}{}^{,\mu} \tag{15.19}$$

则分别为物质和场的**自旋密度**.

之前我们曾经强调过，式 (11A.24) 中的恒等式意味着如果我们用 $\delta g_{\mu\nu}$ 而不是 $\delta g^{\mu\nu}$ 作变分来计算能动张量的话，会出一个负号，这样，式 (15.16) 和式 (15.17) 就变为

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \overset{\mathrm{m}}{T}{}_{\mu\nu}, \tag{15.20}$$

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \overset{\mathrm{f}}{T}{}_{\mu\nu}. \tag{15.21}$$

现在，对于点粒子，我们来计算这些量. 对于一个给定的由任意一个类时变量 σ 作参数的世界线 $x^{\mu}(\sigma)$，相应的作用量为 [参看式 (11.10) 和式 (11.11)]

$$
\begin{aligned}
\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} &= -mc\int \mathrm{d}s = -mc^2\int \mathrm{d}\sigma\,\sqrt{g_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^{\mu}(\sigma)\dot{x}^{\nu}(\sigma)} \\
&= -mc\sqrt{-g}\int \mathrm{d}\sigma \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^{\mu}(\sigma)\dot{x}^{\nu}(\sigma)}\,\delta^{(4)}(x-x(\sigma)).
\end{aligned}
\tag{15.22}
$$

对 $g_{\mu\nu}(x)$ 的变分给出

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta g_{\mu\nu}(x)} &\equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,mc\int \mathrm{d}\sigma\,\frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x(\sigma))\dot{x}^{\mu}(\sigma)\dot{x}^{\nu}(\sigma)}}\dot{x}^{\mu}(\sigma)\dot{x}^{\nu}(\sigma)\delta^{(4)}(x-x(\sigma)) \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,m\int \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}^{\nu}(\tau)\delta^{(4)}(x-x(\tau)),
\end{aligned}
\tag{15.23}
$$

其中，$\tau = s/c$ 为式 (1.141) 中的固有时. 而对 ${K_{\mu\nu}}^{\lambda}(x)$ 的泛函导数则恒为零：

$$
\frac{\delta\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta {K_{\mu\nu}}^{\lambda}(x)} \equiv 0.
\tag{15.24}
$$

于是，我们就确定出了能动张量及自旋流密度为

$$
\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}(x) \equiv m\int \mathrm{d}\tau\,\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}^{\nu}(\tau)\delta^{(4)}(x-x(\tau)),
\tag{15.25}
$$

$$
\overset{\mathrm{f}}{\Sigma}{}^{\nu}{}_{\lambda,}{}^{\mu}(x) \equiv 0.
\tag{15.26}
$$

现在，利用爱因斯坦–嘉当作用量 (15.11)，我们来计算引力场相应的物理量. 首先，我们对 $\sqrt{-g}$ 作关于 $\delta g_{\mu\nu}$ 的变分. 我们有

$$
\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g,
\tag{15.27}
$$

利用式 (11A.25)，式 (15.27) 就可表为

$$
\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.
\tag{15.28}
$$

现在，我们来对作用量 (15.8) 求变分. 首先将它重新写为如下形式：

$$
\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},
\tag{15.29}
$$

于是我们就得到

$$
\begin{aligned}
\delta\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}R + \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\delta g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right].
\end{aligned}
\tag{15.30}
$$

与 $\delta g^{\mu\nu}$ 相乘的因子就是所谓的**爱因斯坦张量**

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{15.31}$$

注意，该张量只在对称时空中才对称. 然而变分 $\delta g^{\mu\nu}$ 却只取其中的对称部分.

现在我们来考察式 (15.30) 中里奇张量的变分

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\kappa \delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa - \partial_\mu \delta \Gamma_{\kappa\nu}{}^\kappa - \delta \Gamma_{\kappa\nu}{}^\tau \Gamma_{\mu\tau}{}^\kappa - \Gamma_{\kappa\nu}{}^\tau \delta \Gamma_{\mu\tau}{}^\kappa + \delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\tau \Gamma_{\kappa\tau}{}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}{}^\tau \delta \Gamma_{\kappa\tau}{}^\kappa. \tag{15.32}$$

左手边显然是个张量. 我们现在来将右手边也表示成协变的形式. 由变换律 (11.104) 我们知道，仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ 并不是一个张量. 然而，它的变分 $\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ 却是一个张量[①]. 这可直接由变换律 (11.104) 得出，该变换最后一项 $\partial_\mu\partial_\nu\xi^\kappa$ 将不出现在 $\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ 中，因为该项在 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ 和 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa + \delta\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ 中是一样的. 正因为这一原因，我们可以将式 (15.32) 重新协变地写为

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\kappa \delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa - D_\mu \delta \Gamma_{\kappa\nu}{}^\kappa + 2S_{\kappa\mu}{}^\tau \delta \Gamma_{\tau\nu}{}^\kappa. \tag{15.33}$$

的确，将上式中的协变微商展开，我们得

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} = &-\partial_\kappa \delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa - \partial_\mu \delta \Gamma_{\kappa\nu}{}^\kappa - \Gamma_{\kappa\mu}{}^\tau \delta \Gamma_{\tau\nu}{}^\kappa - \Gamma_{\kappa\nu}{}^\tau \delta \Gamma_{\mu\tau}{}^\kappa \\ &+ \Gamma_{\kappa\tau}{}^\kappa \delta \Gamma_{\mu\nu}{}^\tau + \Gamma_{\mu\kappa}{}^\tau \delta \Gamma_{\tau\nu}{}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}{}^\tau \delta \Gamma_{\kappa\tau}{}^\kappa - \Gamma_{\mu\tau}{}^\kappa \delta \Gamma_{\kappa\nu}^\tau + 2S_{\kappa\mu}{}^\tau \delta \Gamma_{\tau\nu}{}^\kappa,\end{aligned} \tag{15.34}$$

于是就回到了式 (15.32). 在对称时空研究中，Palatini 首先使用了式 (15.32) 中的协变关系.

现在，我们需将 $\delta R_{\mu\nu}$ 用 $\delta g^{\mu\nu}$ 和 $\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 表示出来. 在式 (15.30) 中的积分下

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{15.35}$$

进行上述操作会比较方便. 由于 $\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^\kappa$ 的张量特性，我们可以将 $g^{\mu\nu}$ 放到协变导数里面从而将式 (15.35) 写为

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(D_\kappa \delta \Gamma_\mu{}^{\mu\kappa} - D_\mu \delta \Gamma_\kappa{}^{\mu\kappa} + 2S_\kappa{}^{\mu\tau} \delta \Gamma_{\tau\mu}{}^\kappa\right). \tag{15.36}$$

现在，协变微商可以通过分部积分而将其移除. 在有挠时空中，分部积分有些特殊的性质，我们需要对此专门讨论.

取任意张量 $U^{\mu\cdots\nu}$ 和 $V_{\dots\nu\dots}$ 并作不变的体积分

$$\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,U^{\mu\cdots\nu\cdots}D_\mu V_{\dots\nu\dots}. \tag{15.37}$$

对此进行分部积分给出

① 注意，这个张量特性只对固定度规下 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 的独立变分成立. 这与差分 $\Gamma'_{\mu\nu\kappa} - \Gamma_{\mu\nu\kappa}$ 的非张量行为是不一样的，其中 $\Gamma'_{\mu\nu\lambda}$ 由变化后的 $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ 构成.

$$-\int \mathrm{d}^4x \left[(\partial_\mu \sqrt{-g}\, U^{\mu\cdots\nu\cdots})V_{\cdots\nu\cdots} + \sum_i U^{\mu\cdots\nu_i\cdots} \varGamma_{\mu\nu_i}{}^{\lambda_i} V_{\cdots\lambda_i\cdots}\right] + 表面项, \quad (15.38)$$

其中，对 i 的求和遍历 $V_{\cdots\lambda_i\cdots}$ 的所有指标，并通过仿射联络将它们同 $U^{\mu\cdots\nu_i\cdots}$ 上的相应的指标连在一起. 现在，利用关系式

$$\partial_\mu \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\, \bar{\varGamma}_{\mu\kappa}{}^{\kappa} = \sqrt{-g}\, \varGamma_{\mu\kappa}{}^{\kappa} = \sqrt{-g}\,(2S_\mu + \varGamma_{\kappa\mu}{}^{\kappa})\,, \quad (15.39)$$

式 (15.38) 就变为

$$-\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left[(\partial_\mu U^{\mu\cdots\lambda_i\cdots} - \varGamma_{\kappa\mu}{}^{\kappa} U^{\mu\cdots\lambda_i\cdots} + \sum_i \varGamma_{\mu\nu_i}{}^{\lambda_i} U^{\mu\cdots\nu_i\cdots})V_{\cdots\lambda_i\cdots} \right.$$
$$\left. +2S_\mu \sum_i U^{\mu\cdots\lambda_i\cdots} V_{\cdots\lambda_i\cdots}\right] + 表面项. \quad (15.40)$$

括号中的各项可以合起来构成 $U^{\mu\cdots\nu_i\cdots}$ 的协变导数，于是我们就得到了相应的分部积分法则

$$\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, U^{\mu\cdots\nu\cdots} D_\mu V_{\cdots\nu\cdots} = -\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, D^*_\mu U^{\mu\cdots\nu\cdots} V_{\cdots\nu\cdots} + 表面项, \quad (15.41)$$

其中，D^*_μ 定义为

$$D^*_\mu \equiv D_\mu + 2S_\mu, \quad (15.42)$$

并且我们引入以下简写：

$$S_\kappa \equiv S_{\kappa\lambda}{}^{\lambda}, \quad S^\kappa \equiv S^\kappa{}_\lambda{}^\lambda. \quad (15.43)$$

很容易可以证明，如果将算子 D_μ 和 D^*_μ 进行交换，式 (15.43) 也是成立的，即

$$\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, U^{\mu\cdots\nu\cdots} D^*_\mu V_{\cdots\nu\cdots} = -\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, D_\mu U^{\mu\cdots\nu\cdots} V_{\cdots\nu\cdots} + 表面项. \quad (15.44)$$

对于 $V_{\cdots\nu\cdots} = 1$ 的特殊情形，由后一个法则我们知道

$$\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} D_\mu U^\mu = -\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, 2S_\mu U^\mu + 表面项. \quad (15.45)$$

这就使得我们可以将式 (15.36) 中张量 $\delta\varGamma_\mu{}^{\mu\kappa}$ 和 $\delta\varGamma_\kappa{}^{\mu\kappa}$ 的协变导数算子分别用 $-2S_\kappa$ 和 $-2S_\mu$ 替换掉，得

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\,(-2S_\kappa \delta\varGamma^\nu{}_\nu{}^\kappa + 2S_\mu \delta\varGamma_\kappa{}^{\mu\kappa} + 2S_\kappa{}^{\nu\tau} \delta\varGamma_{\tau\nu}{}^\kappa)\,. \quad (15.46)$$

这一结果还可写为如下形式：

$$-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}S^{\mu}{}_{\kappa}{}'^{\tau}\delta\Gamma_{\tau\mu}{}^{\kappa}, \tag{15.47}$$

其中，$S_{\mu\kappa}{}'^{\tau}$ 为挠率张量的如下组合：

$$\frac{1}{2}S_{\mu\kappa}{}'^{\tau} \equiv S_{\mu\kappa}{}^{\tau} + \delta_{\mu}{}^{\tau}S_{\kappa} - \delta_{\kappa}{}^{\tau}S_{\mu}. \tag{15.48}$$

此张量称为 Palatini**张量**. 这一关系我们也可以将它反过来写为

$$S_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(S_{\mu\nu,\lambda} + \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}S_{\nu\kappa}{}'^{\kappa} - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}S_{\mu\kappa}{}'^{\kappa}\right). \tag{15.49}$$

现在我们来将 $\delta\Gamma_{\tau\mu}{}^{\kappa}$ 用 $\delta g_{\mu\nu}$ 和 $\delta K_{\mu\nu\lambda}$ 表示出来. 为此，我们注意到变化后的 $g_{\mu\rho} + \delta g_{\mu\rho}$ 显然满足关系式 (11.95)，即

$$D_{\tau}{}^{\Gamma+\delta\Gamma}\left(g_{\mu\rho} + \delta g_{\mu\rho}\right) = 0, \tag{15.50}$$

其中，$D^{\Gamma+\delta\Gamma}$ 为由变换后的联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 所构成的协变导数. 对于变分 $\delta g_{\mu\rho}$，这给出

$$\overset{\Gamma}{D}_{\tau}\ \delta g_{\mu\rho} = \delta\Gamma_{\tau\mu\rho} + \delta\Gamma_{\tau\rho\mu} \tag{15.51}$$

其中，我们已引入

$$\delta\Gamma_{\mu\tau\rho} \equiv g_{\rho\lambda}\,\delta\Gamma_{\mu\tau}{}^{\lambda}. \tag{15.52}$$

于是就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\overset{\Gamma}{D}_{\tau}\ \delta g_{\mu\rho} + \overset{\Gamma}{D}_{\mu}\ \delta g_{\tau\rho} - \overset{\Gamma}{D}_{\rho}\ \delta g_{\tau\mu}\right) &= \delta\Gamma_{\tau\mu\rho} - \delta S_{\tau\mu\rho} + \delta S_{\mu\rho\tau} - \delta S_{\rho\tau\mu}\\ &= \delta\Gamma_{\tau\mu\rho} - \delta K_{\tau\mu\rho},\end{aligned} \tag{15.53}$$

其中

$$\delta S_{\tau\mu\rho} \equiv g_{\rho\lambda}\,\delta S_{\tau\mu}{}^{\lambda} \equiv g_{\rho\lambda}\,\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\tau\mu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\tau}{}^{\lambda}\right) \tag{15.54}$$

和

$$\delta K_{\tau\mu\rho} \equiv \delta S_{\tau\mu\rho} - \delta S_{\mu\mu\rho} - \delta S_{\mu\rho\tau} + \delta S_{\rho\tau\mu} \tag{15.55}$$

为固定 $g_{\mu\nu}$ 下关于 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 变分的结果. 注意，尽管 $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$，式 (15.53) 的右边却不能等同于 $g_{\rho\kappa}\delta\bar{\Gamma}_{\tau\mu}{}^{\kappa}$，因为 $\delta K_{\mu\nu}{}^{\kappa}$ 包含有固定 $g_{\mu\nu}$ 下 $\delta S_{\mu\nu}{}^{\kappa}$ 的贡献以及固定 $S_{\mu\nu}{}^{\kappa}$ 下 $\delta g_{\mu\nu}$ 的贡献. 事实上，式 (15.53) 的第一项等于 $g_{\rho\kappa}\delta\bar{\Gamma}_{\tau\mu}{}^{\kappa} + \delta K_{\tau\mu}{}^{\kappa}|_{\text{固定的}S_{\mu\nu}^{\lambda}}$.

利用式 (15.53)，我们可将式 (15.47) 改写为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\\
=&-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}S^{\mu\kappa,\tau}\left[\delta K_{\tau\mu,\kappa}+\frac{1}{2}\left(D_\tau\delta g_{\mu\kappa}+D_\mu\delta g_{\tau\kappa}-D_\kappa\delta g_{\tau\mu}\right)\right]. \qquad (15.56)
\end{aligned}
$$

第一项显示，Palatini 张量 $S^{\mu}{}_{\kappa}{}^{,\tau}$ 所扮演的角色就是引力场的自旋流 [这同定义式 (15.19) 只相差一个因子 $1/\kappa$]

$$
\overset{\mathrm{f}}{\Sigma}{}^{\mu}{}_{\kappa}{}^{,\tau}=-\frac{1}{\kappa}S^{\mu}{}_{\kappa}{}^{,\tau}. \qquad (15.57)
$$

第二项可进行分部积分，给出

$$
\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{D^*_\mu S^{\mu\rho,\epsilon}\delta g_{\mu\rho}+D^*_\mu S^{\mu\rho,\tau}\delta g_{\tau\rho}-D^*_q S^{\mu\rho,\tau}\delta g_{\mu\tau}\right\}+\text{表面项}. \qquad (15.58)
$$

当重新标定式 (15.53) 中的指标后，并利用由式 (11A.24) 得到的关系式 $\delta g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}=-\delta g_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$，我们就得到了关于 $\delta g_{\mu\nu}$ 的作用量的变分式

$$
-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}D^*_\lambda\left(S^{\mu\nu,\lambda}-S^{\nu\lambda,\mu}+S^{\lambda\mu,\nu}\right)\right]\delta g_{\mu\nu}, \qquad (15.59)
$$

于是，场的完整的能动张量为

$$
\overset{\mathrm{f}}{T}{}^{\mu\nu}=-\frac{1}{\kappa}\left[G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}D^*_\lambda\left(S^{\mu\nu,\lambda}-S^{\nu\lambda,\mu}+S^{\lambda\mu,\nu}\right)\right]. \qquad (15.60)
$$

事实上，$\delta g^{\mu\nu}$ 的变分只能给出 $\overset{\mathrm{f}}{T}_{\mu\nu}$ 的对称部分. 然而，这样一个说明其实并不必要. 我们在后续讨论中将会证明，式 (18.60) 推导出的自旋流密度守恒律事实上会使得 $\overset{\mathrm{f}}{T}{}^{\mu\nu}$ 对称 (甚至在 $G^{\mu\nu}$ 不对称的情形下也如此).

这样，我们就得到了爱因斯坦–嘉当场方程

$$
-\kappa\,\overset{\mathrm{f}}{\Sigma}_{\mu\kappa}{}^{,\tau}=S_{\mu\kappa}{}^{,\tau}=\kappa\,\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\mu\kappa}{}^{,\tau}, \qquad (15.61)
$$

$$
-\kappa\,\overset{\mathrm{f}}{T}{}^{\mu\nu}=G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}D^*_\lambda\left(S^{\mu\nu,\lambda}-S^{\nu\lambda,\mu}+S^{\lambda\mu,\nu}\right)=\kappa\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}, \qquad (15.62)
$$

对于一组无自旋点粒子的话，该方程退化为

$$
S_{\mu\kappa}{}^{,\tau}=0\ , \qquad (15.63)
$$

$$
G^{\mu\nu}=\kappa\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}. \qquad (15.64)
$$

15.3 对称能动张量和缺陷密度

在缺陷物理中，式 (15.60) 中得到的对称能动张量有一个直观的物理解释. 在三维欧氏空间中，式 (15.60) 的线性化形式为

$$-\kappa \overset{\mathrm{f}}{T}{}^{ij} = G_{ij} - \frac{1}{2}\partial_\kappa \left(S_{ij,k} - S_{jk,i} - S_{ki,j}\right), \tag{15.65}$$

相应的自旋密度 (15.48) 为

$$-\frac{1}{2}\kappa \overset{\mathrm{f}}{\Sigma}_{ij,k} = \frac{1}{2}S_{ij,k} = S_{ijk} + \delta_{ik}S_j - \delta_{jk}S_i. \tag{15.66}$$

现在，依照

$$S^{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i\right)u_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\alpha_{lk}, \tag{15.67}$$

我们来将位错密度引入其中. 这样，自旋密度就变为

$$S_{ij,k} = \epsilon_{ijl}\alpha_{lk} + \delta_{ik}\epsilon_{jpl}\alpha_{lp} - \delta_{jk}\epsilon_{ipl}\alpha_{lp}. \tag{15.68}$$

由于方程两边对 ij 都是反对称的，我们就可用 ϵ_{ijn} 来对它们进行缩并，

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijn}S_{ij,k} &= 2\alpha_{nk} + \epsilon_{kjn}\epsilon_{jpl}\alpha_{lp} - \epsilon_{ikn}\epsilon_{ipl}\alpha_{lp} = 2\alpha_{nk} - 2\left(\delta_{kp}\delta_{nl} - \delta_{kl}\delta_{np}\right)\alpha_{lp} \\ &= 2\alpha_{kn},\end{aligned} \tag{15.69}$$

并且发现 $S_{ij,k}$ 可以很简单地写为

$$S_{ij,k} = \epsilon_{ijl}\alpha_{kl}. \tag{15.70}$$

于是，自旋密度就等于位错密度.

该自旋密度的散度为零

$$\partial_k S_{ij,k} = \epsilon_{ijl}\partial_k\alpha_{kl} = 0. \tag{15.71}$$

利用位移场 $u_i(x)$ 的导数，自旋密度可写为

$$S_{ij,k} = \epsilon_{ijl}\epsilon_{kmn}\partial_m\partial_n u_l. \tag{15.72}$$

在此表达式中，式 (15.71) 中的守恒律自然满足.

现在，我们来看式 (15.65) 中出现的关于 ij,k 的三项组合

$$\frac{1}{2}\left(S_{ij,k} - S_{jk,i} + S_{ki,j}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijl}\alpha_{kl} - \epsilon_{jkl}\alpha_{ij} + \epsilon_{kil}\alpha_{jl}\right). \tag{15.73}$$

将等式关系

$$\epsilon_{ijl}\delta_{km} + \epsilon_{jkl}\delta_{im} + \epsilon_{kil}\delta_{jm} = \epsilon_{ijk}\delta_{lm} \tag{15.74}$$

同 α_{ml} 进行缩并，我们得

$$\epsilon_{ijl}\alpha_{kl} + \epsilon_{jkkl}\alpha_{il} + \epsilon_{kil}\alpha_{jl} = \epsilon_{ijk}\alpha_{ll}. \tag{15.75}$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(S_{ij,k} - S_{jk,i} + S_{ki,j}\right) = -\epsilon_{jkl}\alpha_{il} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\alpha_{ll}. \tag{15.76}$$

式 (15.76) 右手边就是

$$\epsilon_{jkl}K_{li}, \tag{15.77}$$

其中

$$K_{lj} = -\alpha_{jl} + \frac{1}{2}\delta_{lj}K_{kk}$$

为 Nye 扭曲张量. 利用这一符号，方程 (15.65) 就变为

$$-\kappa \overset{\mathrm{f}}{T}_{ij} = G_{ij} - \epsilon_{jhl}\partial_n K_{li}. \tag{15.78}$$

而对于度规 $g_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i u_j + \delta_j u_i$，我们知道，相应的爱因斯坦张量 G_{ij} 同旋错密度 $\varTheta_{ji}$ 是一样的. 这样一来，通过与式 (12.41) 相比较，我们就发现总的能动张量乘以 $-\kappa$ 就是总的缺陷密度 η_{ij}：

$$-\kappa \overset{\mathrm{f}}{T}_{ij} = \eta_{ij}. \tag{15.79}$$

文献与注记

[1] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[2] T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[3] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II: *Stresses and Defects, Differential Geometry, Crystal Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`), where `kl` is short for the www address (`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b2`).

[4] 参看 Freeman Dyson 的文章*The World on a String*, New York Review of Books, **51**, 8 (2004)，他在其中评论了 Brian Greene 所写的一本书，题为*The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality*, Knopf, New York, 2004，并对引力量子化尝试提出了很多严肃的评论. 参看网页 kl/papers/dyson2004.txt. 相关文献为:
T. Rothman and S. Boughn, *Can Gravitons Be Detected?*, Found. Phys. **36**, 1801 (2006) (gr-qc/0601043).

第 16 章　整数自旋的最小耦合场

The more minimal the art,
the more maximum the explanation.
HILTON KRAMER (*1928)

到目前为止，我们已经讨论了与经典相对论性质点粒子相互作用的引力场. 如果我们希望将量子效应包含进来的话，我们必须用相对论性场来描述这些粒子，如第 2.3 节中的标量场，或是第 2.4 节中的麦克斯韦场. 然后将这些场量子化，于是入射负能量的波就描述了出射的反粒子 (参看 2.3 节).

如果我们希望将这些场同引力场耦合起来，我们只需遵循第 14 章中所论述的多值映射原理，根据这一原理，平直时空中的作用量定会通过多值坐标变换而变到有挠弯曲时空中. 其结果就是最小耦合引力场.

在本章中我们将不去讨论相对论性场的量子特性，而是关注于耦合这个在经典场的层面上就可以加以讨论的问题.

16.1　黎曼–嘉当空间中的标量场

平坦时空中带电标量场的作用量 (2.25) 很容易就可以变换到一般度规–仿射时空中. 由式 (14.1)，偏导 ∂_a 可写为

$$\partial_a = e_a{}^{\mu}(x)\partial_{\mu}, \tag{16.1}$$

而平直时空中的体元 d^4x^a 则变为

$$\mathrm{d}^4x^a = \mathrm{d}^4x^{\mu}\,|\det\, e^a{}_{\mu}(x)|. \tag{16.2}$$

由于 $e^a{}_{\mu}(x)$ 为度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的平方根 [参看式 (11.38)]，因此它的行列是也应同一个平方根相关，这样，式 (16.2) 就给出了下述体元替换规则：

$$\mathrm{d}^4x \to \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}. \tag{16.3}$$

因此，作用量 (2.25) 就被映射为

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\left[\hbar^2 e^{a\mu}(x)\partial_{\mu}\phi^*(x)e_a{}^{\nu}(x)\partial_{\nu}\phi(x) - M^2c^2\phi^*(x)\phi(x)\right]. \tag{16.4}$$

但这个表达式目前还不能应用于场论计算，因为场量 $e_a{}^{\nu}(x)$ 是多值的. 然而，利用式 (11.42)，我们可将作用量改写为

$$\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\left[\hbar^2 g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi^*(x)\partial_\nu\phi(x)-M^2c^2\phi^*(x)\phi(x)\right]. \tag{16.5}$$

该表达式中只包含单值度规矩阵.

相应的运动方程可以十分容易地通过对梯度项进行分部积分而求得. 忽略边界项贡献，我们就得

$$\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\left[-\hbar^2\phi^*(x)\Delta\phi(x)-M^2c^2\phi^*(x)\phi(x)\right], \tag{16.6}$$

其中，$\Delta=\sqrt{-g}^{\,-1}\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu$ 为式 (12.157) 中的 Laplace-Beltrami 微分算子. 由作用量 (16.6) 我们就可直接得到运动方程 [对比式 (2.38)]：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\phi^*(x)}&=\int \mathrm{d}^4x'\,\sqrt{-g'}\left[-\hbar^2\delta^{(4)}(x'-x)\Delta'\phi(x')-m^2c^2\delta^{(4)}(x'-x)\phi(x')\right]\\&=(-\hbar^2\Delta-M^2c^2)\phi(x)=0.\end{aligned} \tag{16.7}$$

该运动方程包含有一个重要的预断，即在波动方程里并不包含额外的 $R-$ 项，而爱因斯坦协变原理则允许这个项的存在. 在很多教科书中[1]，Klein-Gordon 方程因此写为

$$(-\hbar^2\Delta-\xi\hbar^2R-M^2c^2)\phi(x), \tag{16.8}$$

对于其中的参数 ξ，在文献中有几个不同的数值：1/6, 1/12, 1/8. 这个 R 项同样也出现在方程 (16.8) 的非相对论极限中. 该极限可通过设 $\phi(x)\equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mc^2t/\hbar}\psi(x)$ 且令光速 c 趋于无穷大而得到. 设 $g_{0i}=0$ 且令 $g_{00}=1$，这就给出了薛定谔方程：

$$\left(-\frac{1}{2M}\hbar^2\Delta-\xi\hbar^2R_d\right)\psi(x)=\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(x), \tag{16.9}$$

其中，R_d 为 $D=d+1$ 维时空中空间部分的标曲率. 在一个半径为 r 的 D 维球上，由式 (13.10) 可知 R_d 等于 $d(d-1)/r^2$.

该参数形如 $\xi=(D-2)/4(D-1)$ 的选择可使得波函数 (16.8) 在 $M=0$ 时在 D 维时空是共形不变的[2]，因此场论专家们比较倾向于 $\xi=1/6$. Bryce DeWitt 在建立弯曲空间时间切片路径积分时[3]，他从特定的时间切割方式得到了 $\xi=1/6$ 这个值. 而对时间切割一个稍稍不同的处理方式却给出 $\xi=1/12$[4]. 最近，基于维数正规化路径积分的微扰处理[6]，DeWitt 更倾向于 $\xi=1/8$[5]. 而作用量 (16.4) 中 $\xi=0$ 这个值则基于文献 [6] 中的多值映射而得到的.

到目前为止，还没有一个直接的实验证实 $\xi=0$ 这一理论预测. 关于 ξ 的测量对于实验物理学家来说确实是一个挑战. 因为由天体诱导的 $R(x)$ 对于 x 的依

赖性太小了，实在难以对原子谱有什么影响. 目前来看，测量 ξ 的唯一的一个比较现实的可能的方法就是去研究禁锢在一个薄的椭球面上的电子的能谱. 薛定谔方程 (16.9) 中的 R_d 项会对该能谱造成一个可见的依赖于 ξ 的畸变.

到此, 我们注意到一个重要的事实. 拉格朗日密度 (16.5) 并不包含仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$. 这是因为对于标量场而言，普通导数 $\partial_\mu\phi(x)$ 就已经是协变的了. 它的一个结果就是，相应的程函近似 (eikonal approximation) 将给出其经典路径，该路径并不与挠率耦合，即这些路径应是测地线，而不是如第 14.1 节中作用量原理所要求的自平行线. 场论和经典轨道的这种矛盾目前看来只能通过动力学途径加以解决. 这使得我们断定，物质只能产生全反对称的挠率. 这样，自平行性就同测地性相一致了，同样也就不存在标量粒子经典路径与程函近似所得标量场轨道之间的不一致了. 事实上，这一推断在一种理论中可以自动得以满足，在此种理论中，挠率只同自旋 $-1/2$ 的基本费米子–如夸克及轻子–发生耦合，在第 20.3.1 节中我们将对此详加讨论.

16.2 黎曼–嘉当空间中的电磁学

现在，我们对式 (2.83) 中的电磁作用量进行同样的处理. 体元同样要根据式 (16.3) 中的法则进行一个映射. 而对于协变旋度，我们可以如下处理. 首先，我们引入矢量场，它们的变换同坐标微商 $\mathrm{d}x_\mu$ 是一样的：

$$A_\mu(x) = e^a{}_\mu(x)A_a(x), \quad j_\mu(x) = e^a{}_\mu(x)j_a(x), \tag{16.10}$$

并且利用式 (11.84) 将场强写为

$$\begin{aligned} F_{ab}(x) &= \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x) = e_a{}^\mu(x)\partial_\mu e_b{}^\nu(x)A_\nu(x) - e_b{}^\mu(x)\partial_\mu e_a{}^\nu(x)A_\nu(x) \\ &= e_a{}^\mu(x)e_b{}^\nu(x)\left[D_\mu A_\nu(x) - D_\nu A_\mu(x)\right] \equiv e_a{}^\mu(x)e_b{}^\nu(x)F_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \tag{16.11}$$

于是作用量 (2.83) 就变为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) \equiv \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4c}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c^2}j^\mu(x)A_\mu(x)\right], \tag{16.12}$$

将协变导数的具体表达式 (11.85) 代入式 (16.11)，并根据式 (11.114) 和式 (11.115) 将 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 分解为克里斯托夫符号及挠率部分，我们就有

$$F_{\mu\nu}(x) = \bar{F}_{\mu\nu}(x) - 2S_{\mu\nu}{}^{\lambda}A_\lambda(x), \tag{16.13}$$

其中，$\bar{F}_{\mu\nu}(x)$ 为从黎曼协变导数 (11.116) 计算得到场强：

$$\bar{F}_{\mu\nu}(x) = \bar{D}_\mu A_\nu(x) - \bar{D}_\nu A_\mu(x). \tag{16.14}$$

此式右边所包含的克里斯托夫符号相互抵消掉了，于是有

$$\bar{F}_{\mu\nu} \equiv \bar{D}_\mu A_\nu - \bar{D}_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda A_\lambda - \partial_\nu A_\mu + \bar{\Gamma}_{\nu\mu}{}^\lambda A_\lambda = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (16.15)$$

因此，黎曼协变的场强同平直空间中的麦克斯韦场强是一致的

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (16.16)$$

现在式 (16.13) 中的协变场强就变为

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - 2S_{\mu\nu}{}^\lambda A_\lambda(x). \quad (16.17)$$

正如薛定谔所指出的[8]，上式最后一项破坏了规范不变性 (参看本书前言中相关段落). 这就在作用量 (16.12) 中赋予光子一个依赖于时空位置的张量质量项

$$\frac{1}{2} m_A^2{}^{\lambda\kappa}(x) A_\lambda(x) A_\kappa(x), \text{ 和 } m_A^2{}^{\lambda\kappa}(x) = 2S_{\mu\nu}{}^\lambda(x) S^{\mu\nu\kappa}(x). \quad (16.18)$$

这就促使薛定谔估算出了实验观测允许的光子的质量上限. 目前观测表明这个质量极端的小：

$$m_A < 3 \times 10^{-27}\text{eV}, \quad (16.19)$$

而这所对应的光子的康普顿波长巨大无比，为

$$l_A = \frac{\hbar}{m_A c} > 6952 \text{ 光年}. \quad (16.20)$$

这一估算来源于对脉冲星散播到时空中磁场范围观测. 由此，他得出结论，时空中的挠率张量应该非常的小.

而这也正是为什么很多学者[9] 主张引力理论中在场强中不应包含挠率张量. 他们认为麦克斯韦作用量应该是以式 (16.15) 中的黎曼协变场强构成，而不是式 (16.11) 中的度规仿射协变场强 $F_{\mu\nu}$. 因此，电磁场作用量应为

$$\overset{\text{em}}{\mathcal{A}} = \int d^4x \sqrt{-g}\, \overset{\text{em}}{\mathcal{L}}(x) \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4c} \bar{F}^{\mu\nu}(x) \bar{F}_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c^2} j^\mu(x) A_\mu(x) \right]. \quad (16.21)$$

该作用量在一般坐标变换及电磁规范变换

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (16.22)$$

下均是不变的. 在此表达式中，光子不再同挠率张量有任何的耦合，当然也就保持了零质量特性. 在保证电磁规范不变性及爱因斯坦不变性的最小耦合思想体系下，很显然，这个作用量比式 (16.12) 更加最小，而且这同时说明了略去挠率的正当性.

对于传递弱相互作用的矢量玻色子 W 和 Z 的裸场，上述结论同样适用. 在标准弱电统一理论中，裸矢量场 $A_\mu(x)$、$W_\mu(x)$ 以及 $Z_\mu(x)$ 从规范不变得角度来看地位是相同的. 因此，它们的协变导数也应与挠率无关.

而由于迈斯纳–希格斯效应，物理的矢量玻色子是有质量的. 其质量是通过“吃掉”希格斯场的无质量戈德斯通玻色子而产生的. 而由于这些无质量粒子为标量粒子，它们同样与挠率没有耦合，因此上述的物理矢量玻色子将保持与挠率的无耦合状态[10]. 这与由夸克和反夸克对构成的带质量矢量介子如 ρ 和 ω 是不同的. 关于这部分，我们将在第 20.3.1 节中加以讨论.

后面我们会看到挠率是非传播场. 乍一看，这似乎暗示真空中不存在挠率，因此，即便取式 (16.12) 中的作用量，光子在真空中同样也是以光速在传播. 然而，这样的结论应该是不正确的. 在式 (16.13)$F_{\mu\nu}(x)$ 的表达式中的 $A_\mu(x)$ 和 $S_{\mu\nu\lambda}(x)$ 的耦合项会给出这样一个结果，即宇宙中的微波背景辐射同样会产生挠率张量场. 利用式 (3.238) 中矢势的自旋流密度，从爱因斯坦–嘉当场方程 (15.61) 可以给出 Palatini 张量

$$S^{\mu\kappa,\tau} = \kappa \overset{\text{em}}{\Sigma}{}^{\mu\kappa,\tau} = -\frac{\kappa}{c}\left[F^{\tau\mu}A^{\kappa} - (\mu \leftrightarrow \kappa)\right]. \tag{16.23}$$

这可用来代入式 (15.49) 而得挠率张量，而从式 (16.18) 可得非零光子质量，从而破坏规范不变性.

另一个局域挠率的来源则是宇宙学常数. 正如在第 22.2 节中将会讨论到的，这可源于所有场的非零真空涨落. 通过式 (16.23)，这会给出挠率张量场，它弥散在整个时空中，这样，如作用量取式 (16.12) 的话，同样会赋予光子一个微小的质量.

尽管用这种方式从挠率张量中得到的光子质量小到试验无法探测的地步，电弱相互作用的统一理论却必须是规范不变的. 因此，尽管挠率是不可传播的，我们仍然必须要放弃式 (16.12) 中的作用量，而只能采用不包含挠率张量的作用量 (16.21). 不同于由多值映射原理所得到的我们之前所说的最小耦合，这个不包含挠率场的协变表达式才应该说是**真正的最小**.

文献与注记

[1] N.D. Birell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] 参看以下专著中的式 (13.241):
H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific, Singapore 2004, 4th ed. `kl/b5`).

[3] B.S. DeWitt, Rev. Mod. Phys., **29**, 337 (1957).

[4] K.S. Cheng, J. Math. Phys. **13**, 1723 (1972).

[5] B.S. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[6] 参看 [2] (`kl/b5/psfiles/pthic10.pdf`) 中的第 10 章和第 11 章.

[7] 参看 in textbook [2] (`kl/b5/psfiles/pthic13.pdf`) 中的第 13.10 节.

[8] E. Schrödinger, Proc. R. Ir. Acad. A **49**, 43, 135 (1943); **49**, 135 (1943); **52**, 1 (1948); **54**, 79 (1951).

[9] See the review article:
F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick, and J.M. Nester, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[10] 此物理结论与文献 [9] 中的推断相悖.

第 17 章　半整数自旋粒子

We can lick gravity,
but sometimes the paperwork is overwhelming.
Wernher von Braun (1912∼1977)

现在我们来看看电子以及其他半整数自旋粒子是如何同引力相耦合的[1].

17.1　局域洛伦兹不变性与非完整坐标

在洛伦兹不变的理论中，自旋定义为在粒子的静止参考系中的总角动量. 为了测量以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的粒子的自旋 s，我们就需通过局域洛伦兹变换变到粒子的共动坐标系中. 在此坐标系中粒子是静止的，而关于其自旋的量子力学描述则给出 $2s+1$ 不同的态 $|s, s_3\rangle$，其中 $s_3 = -s, \cdots, s$. 在转动下，这会依照具有角动量 s 的转动群的不可约表示来进行变换.

对于闵可夫斯基时空中一个自旋为 $s = 1/2$ 的粒子，如电子、缪子 (muon) 或其他带质量轻子，这一变换可以通过狄拉克场 $\psi_\alpha(x)$ 的量子自动加以记及，相应的作用量为式 (2.141)：

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4 x^a \, \bar{\psi}(x^a) \, (\mathrm{i}\gamma^a \partial_a - m) \, \psi(x^a), \tag{17.1}$$

其中，狄拉克矩阵 γ^a 满足式 (1.224) 中代数关系：

$$\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = 2g^{ab}. \tag{17.2}$$

如同在方程 (2.143) 中一样，狄拉克方程可通过对此作用量求极值得到

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta \bar{\psi}(x^a)} = (\mathrm{i}\gamma^a \partial_a - m) \, \psi(x^a) = 0. \tag{17.3}$$

17.1.1　狄拉克作用量的非完整像

通过跟第 16.1 节中处理标量场作用量完全类似的方法，我们就立即可以在有挠弯曲时空中写出相应的作用量

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \, \bar{\psi}(x) \, [\mathrm{i}\gamma^a e_a{}^\mu(x) \partial_\mu - m] \, \psi(x), \tag{17.4}$$

其中，x 为物理坐标 x^μ. 然而，不同于标量场情形，该变换后的作用量包含有多值标架场，对此场论形式将不再有效. 因此，我们必须找到一种途径将 $e_a{}^\mu(x)$ 中的多值部分变换掉. 这可以通过在每一点 x^μ 引入与自由下落洛伦兹标架相关的无穷小坐标元 $\mathrm{d}x^\alpha$ 而加以实现. 我们不难想象一个无穷小的自由下落的电梯中是不存在引力的. 对于一个物体，只有在其质心上引力才可完全消除. 任何偏离这点的位置上都会感受到潮汐力，或是离心力或是引力吸引 [参见式 (12.143)]. 在质心处，坐标 $\mathrm{d}x^\alpha$ 是闵可夫斯基的，但仿射联络却不为零，并且一般来讲会有非零曲率，这就会造成潮汐力.

中间理论

按照第 4.5 节中一样的操作，我们看到，修正的狄拉克拉格朗日密度

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}= \bar{\psi}(x)\left\{\mathrm{i}\gamma^\alpha\left[\partial_\alpha - D(\Lambda(x))^{-1}\partial_\alpha D(\Lambda(x))\right] - m\right\}\psi(x) \tag{17.5}$$

同作用量 (17.4) 中原始的拉格朗日密度一样描述了电子的行为. 这里，$\Lambda(x)$ 为一个任意的依赖于 x 的洛伦兹变换，该变换给出了式 (17.1) 中平坦时空微分 $\mathrm{d}x^a = e^a{}_\mu \mathrm{d}x^\mu$ 与新的坐标微分 $\mathrm{d}x^\alpha$ 间的关系：

$$\mathrm{d}x^a = \Lambda^a{}_\alpha(x)\mathrm{d}x^\alpha, \quad \mathrm{d}x^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_a(x)\mathrm{d}x^a \equiv \Lambda_a{}^\alpha(x)\mathrm{d}x^a, \tag{17.6}$$

$D(\Lambda)$ 为式 (1.229) 中定义的局域洛伦兹变换的表示. 不论如何选取 $\Lambda^a{}_\alpha(x)$，度规在这两个坐标体系内都是闵可夫斯基的 [请与式 (1.28) 作比较]：

$$g_{\alpha\beta}(x) = \Lambda^a{}_\alpha(x)\Lambda^b{}_\beta(x)g_{ab} = (\Lambda^{\mathrm{T}})_\alpha{}^a(x)\, g_{ab}\, \Lambda^b{}_\beta(x) \equiv g_{ab}, \tag{17.7}$$

令 $\psi_\Lambda(x)$ 为下述对应于式 (17.5) 的狄拉克方程的解：

$$\left\{\mathrm{i}\gamma^\alpha\left[\partial_\alpha - D(\Lambda(x))^{-1}\partial_\alpha D(\Lambda(x))\right] - m\right\}\psi(x) = 0. \tag{17.8}$$

这个解可与使原始作用量 (17.4) 取极值的场 $\psi(x)$ 通过一个局域旋量变换相联系：

$$\psi_\Lambda(x) = D(\Lambda(x))\psi(x). \tag{17.9}$$

这反映出满足狄拉克反对称法则 (1.224) 的依赖于 x 的 γ 矩阵的任意性 [参看式 (1.235)]：

$$\gamma^\alpha(x) \equiv D(\Lambda(x))^{-1}\gamma^\alpha D(\Lambda(x)) = \Lambda^\alpha{}_\beta\gamma^\beta. \tag{17.10}$$

事实上，利用式 (1.28)，我们不难验证

$$\{\gamma^\alpha(x), \gamma^\beta(x)\} = \Lambda^\alpha{}_a(x)\Lambda^\beta{}_b(x)\{\gamma^a, \gamma^b\} = \Lambda^\alpha{}_a(x)\Lambda^\beta{}_b(x)g^{ab} = g^{\alpha\beta}. \tag{17.11}$$

现在，我们回头来看式 (1.340)，据此，用稍稍不同的记法，我们有

$$D(\Lambda(x))^{-1}\partial_\alpha D(\Lambda(x)) = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{\alpha;\delta\sigma}(x)\Sigma^{\delta\sigma}. \tag{17.12}$$

如果将 $D(\Lambda(x))$ 用狄拉克指标写成分量形式，则式 (17.12) 右边可定义为**狄拉克场的自旋联络**：

$$\overset{\mathrm{D}}{\Gamma}_{\alpha B}{}^{C}(x) \equiv \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\omega_{\alpha;\delta\sigma}(x)\left(\Sigma^{\delta\sigma}\right)_B{}^C. \tag{17.13}$$

这里 $\omega_{\alpha;\beta\gamma}$ 为广义角速度，它可通过形如式 (1.335)~ 式 (1.337) 的关系式从局域洛伦兹变换 $\Lambda(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\beta\gamma}(x)\Sigma^{\beta\gamma}}$ 中依赖于 x 的张量参量 $\omega_{\beta\gamma}(x)$ 而得到.

根据式 (1.339)，广义角速度 $\omega_{\alpha;\beta}{}^{\gamma}$ 也出现在局域洛伦兹矩阵 $\Lambda^a{}_\alpha(x)$ 的导数中

$$\Lambda^{-1\gamma}{}_a(x)\partial_\alpha\Lambda^a{}_\beta(x) = \omega_{\alpha;}{}^{\gamma}{}_\beta(x) = -\omega_{\alpha;\beta}{}^{\gamma}(x). \tag{17.14}$$

于是，如果我们定义

$$\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \equiv \Lambda_a{}^\gamma\partial_\alpha\Lambda^a{}_\beta = -\Lambda^a{}_\beta\partial_\alpha\Lambda_a{}^\gamma, \tag{17.15}$$

我们就可将自旋联络写为

$$\overset{\mathrm{D}}{\Gamma}_{\alpha B}{}^{C}(x) \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\delta}{}^{\sigma}(x)\left(\Sigma^\delta{}_\sigma\right)_B{}^C. \tag{17.16}$$

该变换使得拉格朗日密度取如下形式：

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}} = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^\alpha D_\alpha - m\right)\psi(x), \tag{17.17}$$

其中的协变导数矩阵为

$$(D_\alpha)_B{}^C = \delta_B{}^C\partial_\alpha - \overset{\mathrm{D}}{\Gamma}_{\alpha B}{}^{C}(x). \tag{17.18}$$

只要自旋联络是由单值洛伦兹变换 $\Lambda_a{}^\gamma(x)$ 通过式 (17.15) 给出的，式 (17.17) 中的拉格朗日密度就同式 (17.4) 中原始的狄拉克拉格朗日密度完全等价. 这同我们之前讨论薛定谔–拉格朗日 (4.81) 的情形完全类似，而后者正是由多值规范变换得出电磁学的出发点.

现在，类似于之前的做法，我们可允许 $\omega_{\beta\gamma}(x)$ 具有多值性. 这样，自旋联络的分量将不再是式 (17.14) 中的广义角动量，而是构成了新的场

$$A_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(x) \equiv \omega_{\alpha;\beta}{}^{\gamma}(x) = \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}. \tag{17.19}$$

由于 $\omega_\beta{}^\gamma(x)$ 不具有可交换的导数，因此，我们无法将式 (17.19) 作为 $\omega_\beta{}^\gamma(x)$ 的微分方程而加以求解计算. 事实上，具有协变导数 (17.18) 的拉格朗日密度 (17.17) 现在所描述的是一个与挠率耦合的场的理论. 从式 (17.71) 中我们将会看到，仿射联络 (17.15) 同局域闵可夫斯基微商 $\mathrm{d}x^\alpha$ 的扭曲张量相一致. 到此，还不存在黎曼曲

率张量，因此，总的黎曼–嘉当曲率张量则完全由扭曲张量通过式 (11.146) 给出. 利用由克里斯托夫符号构成的协变导数，我们可以定义任意距离上的平行矢量场. 这个理论正对应于著名的**绝对平行理论**，该理论由爱因斯坦在 1928 年后受到与嘉当通信的启发影响而发展起来的 (参看序言部分). 在该理论中，情况同我们上面讨论的正好相反：黎曼 - 嘉当曲率张量恒为零，而黎曼曲率则通过方程 (11.146) 由下式给出：

$$-\bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}=\bar{D}_{\mu}K_{\nu\lambda}{}^{\kappa}-\bar{D}_{\nu}K_{\mu\lambda}{}^{\kappa}+(K_{\mu\lambda}{}^{\rho}K_{\nu\rho}{}^{\kappa}-K_{\nu\lambda}{}^{\rho}K_{\mu\rho}{}^{\kappa})\,. \tag{17.20}$$

17.1.2　标架场

为了讨论可观测引力，我们还必须再向前进一步.

依照第 4.5 节中的标准程序，我们首先类似地作一个单值规范变换，在这里这就是一个由 x^α 到 x^μ 普通的坐标变换

$$\mathrm{d}x^\alpha=\mathrm{d}x^\mu h^\alpha{}_\mu(x). \tag{17.21}$$

该变换有一个逆变换

$$\mathrm{d}x^\mu=\mathrm{d}x^\alpha h_\alpha{}^\mu(x), \tag{17.22}$$

在每个点 x 上，矩阵元 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 和 $h^\alpha{}_\mu(x)$ 满足以下正交完备关系：

$$h_\alpha{}^\mu(x)h^\beta{}_\mu(x)=\delta_\alpha{}^\beta,\qquad h^\alpha{}_\mu(x)h_\alpha{}^\nu(x)=\delta_\mu{}^\nu. \tag{17.23}$$

该 4×4- 变换矩阵 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 和 $h^\alpha{}_\mu(x)$ 分别称为是**标架场**(vierbein) 及**倒易标架场**. 同多值基标架 $e^a{}_\mu(x)$、$e_a{}^\mu(x)$ 的情形一样，我们可以通过利用度规 $g_{\alpha\beta}$ 及其逆 $g^{\alpha\beta}$ 进行缩并来自由地升降指标 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$：

$$h^{\alpha\mu}(x)\equiv g^{\alpha\beta}h_\beta{}^\mu(x),\quad h_{\alpha\beta}(x)\equiv g_{\alpha\beta}h^\beta{}_\mu(x). \tag{17.24}$$

由于目前变换函数还是单值的，因此它们满足

$$\partial_\mu h^\alpha{}_\nu(x)-\partial_\nu h^\alpha{}_\mu(x)=0,\quad \partial_\mu h_\alpha{}^\nu(x)-\partial_\nu h_\alpha{}^\mu(x)=0. \tag{17.25}$$

对于依赖于最终物理坐标 x^μ 的旋量场，协变导数 (17.18) 变为

$$(D_\alpha)_B{}^C=\delta_B{}^C h_\alpha{}^\mu(x)\partial_\mu-\overset{\mathrm{D}}{\varGamma}_{\alpha B}{}^C(x). \tag{17.26}$$

现在，平直时空坐标 x^a 通过下述关系同物理 x^μ 坐标相联：

$$\mathrm{d}x^a=e^a{}_\mu\mathrm{d}x^\mu=\varLambda^a{}_\alpha(x)h^\alpha{}_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu=\varLambda^a{}_\alpha(x)\mathrm{d}x^\alpha, \tag{17.27}$$

其中，局域洛伦兹变换的矩阵元 $\varLambda^a{}_\alpha(x)$ 为多值的. 现在，作用量

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\mu}(x)D_{\mu} - m\right)\psi(x) \tag{17.28}$$

只包含有单值几何场量 $h_{\alpha}{}^{\mu}(x)$ 和 $A_{\alpha\delta\sigma}(x)$，后者包含在自旋联络内：

$$\overset{\mathrm{D}}{\varGamma}_{\alpha B}{}^{C}(x) = \mathrm{i}\omega_{\alpha;\delta\sigma}(x)\,\frac{1}{2}\left(\Sigma^{\delta\sigma}\right)_{B}{}^{C} = \mathrm{i}A_{\alpha\delta\sigma}(x)\,\frac{1}{2}\left(\Sigma^{\delta\sigma}\right)_{B}{}^{C}. \tag{17.29}$$

17.1.3　局域惯性系

现在，我们可通过令坐标 x^{α} 为物理坐标 x^{μ} 的多值函数来构造曲率张量. 此时，标架场不再满足式 (17.25) 中的关系式. 但标架场本身依然是单值函数，于是，式 (17.28) 中的作用量现在就非常合适用来描述有挠弯曲时空中的电子或其他狄拉克粒子.

由于微商 $\mathrm{d}x^{\alpha}$ 通过式 (17.27) 中的洛伦兹变换同 $\mathrm{d}x^{a}$ 相联，则基于式 (1.28)，非完整坐标 $\mathrm{d}x^{\alpha}$ 的长度平方

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{17.30}$$

在任何一点均可由闵可夫斯基度规

$$g_{\alpha\beta} = \varLambda^{a}_{\alpha}(x)\varLambda^{b}_{\beta}(x)g_{ab} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{17.31}$$

来量度. 将式 (17.30) 与式 (17.21) 联立，我们就得到如下关系：

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha}{}^{\mu}(x)h_{\beta}{}^{\nu}(x)g_{\mu\nu}(x), \tag{17.32}$$

它的逆关系为

$$g_{\mu\nu}(x) = h^{\alpha}{}_{\mu}(x)h^{\beta}{}_{\nu}(x)g_{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha}{}_{\mu}(x)h_{\beta\nu}(x). \tag{17.33}$$

在式 (11.38) 中我们有类似关系，其中我们将度规表示为多值基标架 $e^{a}{}_{\mu}(x)$ 的平方. 因此，$e^{\alpha}{}_{\mu}(x)$ 和 $h^{a}{}_{\mu}(x)$ 均为度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的“矩阵平方根”.

在时空坐标 x^{μ} 同无穷小坐标 $\mathrm{d}x^{\alpha}$ 间存在一个简单的物理关系，后者其实与每一点 x^{μ} 处的很小的自由下落洛伦兹标架相关. 这样的参考系就是惯性参考系. 我们可以将这些参考系想象成一些微小的电梯，它们的自由下落将会消除所有的引力效应. 而这种抵消只在电梯的质心才是严格的. 任何偏离该点的地方均会感受到潮汐力. 对于这一方面的情形，我们已经在第 12.6.1 节和第 12.6.2 节中构建测地坐标时加以了讨论.

现在，基于当前的情形，我们将再一次对潮汐力进行讨论. 在任意一点 X^{μ} 的很小的邻域内，我们可得微分方程 (17.22) 的解为下述函数：

$$x^\alpha(X;x)=a^\alpha+h^\alpha{}_\mu(X)(x^\mu-X^\mu)+\frac{1}{2}h^\alpha{}_\lambda(X)\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda(X)(x^\mu-X^\mu)(x^\nu-X^\nu)+\cdots. \tag{17.34}$$

它的导数

$$\frac{\partial x^\alpha(X;x)}{\partial x^\mu}=h^\alpha{}_\mu(X)+h^\alpha{}_\lambda(X)\varGamma_{\mu\nu}{}^\lambda(X)(x^\nu-X^\nu)\equiv h^\alpha{}_\mu(X;x) \tag{17.35}$$

在 $x=X$ 处满足方程 (17.22). 现在来考虑一个具有式 (14.7) 中运动方程的点粒子. 在坐标式 (17.34) 中，它的轨迹满足方程

$$\dot{x}^\alpha=h^\alpha{}_\mu(X)\dot{x}^\mu+h^\alpha{}_\lambda(X)\varGamma_{\mu\nu}{}^\lambda(X)\,\dot{x}^\mu(x^\nu-X^\nu)+\cdots, \tag{17.36}$$

以及

$$\ddot{x}^\alpha=h^\alpha{}_\mu(X)\ddot{x}^\mu+h^\alpha{}_\lambda(X)\varGamma_{\mu\nu}{}^\lambda(X)\,\ddot{x}^\mu(x^\nu-X^\nu)+h^\alpha{}_\lambda(X)\varGamma_{\mu\nu}{}^\lambda(X)\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu+\cdots. \tag{17.37}$$

在此将式 (14.7) 代入，我们发现第一项和第三项相消，于是在 X 点粒子不具有加速度. 而在其邻域上，则存在潮汐力. 因此增量 $\mathrm{d}x^\alpha$ 在 X 点的无穷小邻域上就构建了一个惯性系.

坐标系 $x^\alpha(X;x)$ 中的度规为

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta}(X;x)=&\frac{\partial x^\alpha(X;x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\beta(X;x)}{\partial x^\mu}g^{\mu\nu}(x)=h^\alpha{}_\mu(X)h^\beta{}_\nu(X)g^{\mu\nu}(x)\\&+\left[h^\alpha{}_\lambda(X)h^\beta{}_\nu(X)\varGamma_{\mu\kappa}{}^\lambda(X)(x^\kappa-X^\kappa)+(\alpha\leftrightarrow\beta)\right]g^{\mu\nu}(x).\end{aligned} \tag{17.38}$$

现在我们将度规 $g^{\mu\nu}(x)$ 在 X 点的邻域内展开

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}(x)=&g^{\mu\nu}(X)+\partial_\lambda g^{\mu\nu}(X)(x^\lambda-X^\lambda)+\cdots\\=&g^{\mu\nu}(X)-\left[g^{\mu\lambda}\varGamma_{\kappa\lambda}{}^\nu(X)+g^{\nu\lambda}\varGamma_{\kappa\lambda}{}^\mu(X)\right](x^\kappa-X^\kappa)+\cdots.\end{aligned} \tag{17.39}$$

将此代入式 (17.38) 并利用式 (17.32)，我们就得

$$g_{\alpha\beta}(X;x)=g_{\alpha\beta}+\mathcal{O}(x-X)^2. \tag{17.40}$$

此式保证了由 $g_{\alpha\beta}(X;x)$ 所构建的仿射联络在 $x=X$ 点必为零，因此粒子在该点将不受力. 然而，在 X 的邻域内的其他任何一点，都将存在潮汐力.

而在坐标系 $\mathrm{d}x^a$ 中是完全不存在潮汐力的. 这能够在任何一点都成立完全是由于缺陷使得 $\varLambda^a{}_\alpha(x)$ 变为多值的.

坐标 $x^\alpha(X;x)$ 为基于 X 的关于 x 的函数. 并不存在一个单值的函数 $x^\alpha(x)$，因此加在 $x^\alpha(x)$ 前面的微分算子相互不对易：

$$(\partial_\mu\partial_\nu-\partial_\nu\partial_\mu)\,x^\alpha(x)\neq 0, \tag{17.41}$$

这就导致

$$\partial_\mu h^\alpha{}_\nu(x) - \partial_\nu h^\alpha{}_\mu(x) \neq 0. \tag{17.42}$$

然而，描述自由下落舱体的 $h^\alpha{}_\mu(x)$ 和 $h^\mu_\alpha(x)$ 却是单值的，它们满足可积条件：

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, h^\alpha{}_\lambda(x) = 0, \qquad (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\, h_\alpha{}^\lambda(x) = 0. \tag{17.43}$$

这一条件直接导致如下这样一个结果：如果我们用式 (11.130) 中由 $e_a{}^\mu(x)$ 构造 $R_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa(x)$ 的同样的方法从 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 来构造张量 $\overset{h}{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa(x)$ 的话，我们就发现它恒为零

$$\overset{h}{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa = h_\alpha{}^\kappa(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)h^\alpha{}_\lambda \equiv 0. \tag{17.44}$$

17.1.4 标架和多值标架场的区别

注意，尽管多值基标架 $e^a{}_\mu(x)$ 与标架场 (tetrad fields) $h^\alpha{}_\mu(x)$ 都是度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的“平方根”，它们却是两个完全不同的数学概念. 它们之间的差别在于一个局域洛伦兹变换 $\Lambda^a{}_\mu(x)$. 从式 (17.27)，我们可以得到它们之间的关系为

$$e^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_\alpha(x) h^\alpha{}_\mu(x), \tag{17.45}$$

由此可导出

$$\Lambda^a{}_\alpha(x) \equiv e^a{}_\mu(x) h_\alpha{}^\mu(x), \tag{17.46}$$

而这正体现了矩阵平方根定义中的任意性.

最重要的是，$e^a{}_\mu(x)$ 和 $h^\alpha{}_\mu(x)$ 具有完全不同的可积性. $h^\alpha{}_\lambda(x)$ 满足式 (17.43) 中的施瓦茨可积条件，而多值基标架 $e^a{}_\lambda(x)$ 却不满足. 通过式 (11.130)，作用于 $e^a{}_\lambda(x)$ 前面的微分算子的对易子就确定出了相应的曲率张量. 因此，洛伦兹变换矩阵 $\Lambda^a{}_\mu(x)$ 是多值的. 它将缺陷引入了映射 $\mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}x^a \Lambda_a{}^\alpha(x)$ 中.

由于 $h^\alpha{}_\mu(x)$ 和 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 是单值函数，加在其上的导数算符对易，因此式 (11.130) 中的曲率张量 $R_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa(x)$ 将完全由局域洛伦兹变换 $\Lambda^a{}_\alpha(x)$ 的非对易导数来表示. 为看清这一点，我们将式 (17.45) 代入到式 (11.130) 中，并利用式 (17.43)，我们就给出了曲率张量的另一种表示形式

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\sigma = h_\gamma{}^\sigma \left[\Lambda_a{}^\gamma \left(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\right) \Lambda^a{}_\alpha\right] h^\alpha{}_\lambda \equiv h_\gamma{}^\sigma R_{\mu\nu\alpha}{}^\gamma\, h^\alpha{}_\lambda. \tag{17.47}$$

从缺陷的角度看，单值矩阵 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 构造了一个中间坐标系 $\mathrm{d}x^\alpha$，由式 (17.43) 中的可积条件可知，这个中间坐标系同坐标系 x^μ 具有相同的旋错结构，但完全不含位错. 这个新的坐标系 x^α 中的度规张量在时空每个点上都取闵可夫斯基形式. 然而，坐标 x^α 仍不能构成闵可夫斯基时空，因为这个坐标系同惯性坐标系 $\mathrm{d}x^a$ 相比是具有旋错结构的，即相对于理想参考晶体，它存在楔形残缺. 从 x^μ 中我们是无法整体地定义出坐标系 x^α 的. 只有微分 $\mathrm{d}x^\alpha$ 在时空各点可通过式 (17.21) 和式

(17.22) 由 dx^μ 唯一地确定. 由于坐标系 dx^α 中的旋错，局域洛伦兹变换 $\Lambda^a{}_\alpha(x)$ 前的导数算符是不对易的. 因此，该坐标系 dx^α 只可被用来确定关于 x^α 的**导数**，以及矢量 (或张量) 相对于此中间局域坐标轴的**方向**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\alpha(x) \equiv \boldsymbol{e}_\mu(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} &= \boldsymbol{e}_\mu(x) h_\alpha{}^\mu(x) \\ &\equiv \boldsymbol{e}_a e^a{}_\mu(x) h_\alpha{}^\mu(x) \equiv \boldsymbol{e}_a \Lambda^a{}_\alpha(x).\end{aligned} \tag{17.48}$$

利用倒易标架场，我们也可变回到局域基底上

$$\boldsymbol{e}_\mu(x) = \boldsymbol{e}_a(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} = \boldsymbol{e}_\alpha(x) h^\alpha{}_\mu(x). \tag{17.49}$$

17.1.5 中间坐标基底下的协变导数

现在我们来推导中间坐标基底 $\boldsymbol{e}_\alpha(x)$ 下任意一个矢量场分量 $v_\alpha(x)$ 的协变导数. 此矢量分量同分量 $v_a(x)$ 的关系为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(x) \equiv \boldsymbol{e}_a v^a(x) &= \boldsymbol{e}_a e^a{}_\mu(x) v^\mu(x) = \boldsymbol{e}_a \Lambda^a{}_\alpha(x) h^\alpha{}_\mu(x) v^\mu(x) \\ &= \boldsymbol{e}_a \Lambda^a{}_\alpha(x) h^{\alpha\mu}(x) v_\mu(x) = \boldsymbol{e}_a \Lambda^{a\alpha}(x) v_\alpha(x) = \boldsymbol{e}_a \Lambda^a{}_\alpha(x) v^\alpha(x),\end{aligned} \tag{17.50}$$

其中，我们已如下定义了相应的协变和逆变分量:

$$v_\alpha(x) \equiv v_\mu(x) h_\alpha{}^\mu(x), \quad v^\alpha(x) \equiv v^\mu(x) h^\alpha{}_\mu(x). \tag{17.51}$$

由式 (17.23) 中的正交关系，我们有

$$v_\mu(x) = v_\alpha(x) h^\alpha{}_\mu(x), \quad v^\mu(x) \equiv v_\mu(x) h_\alpha{}^\mu(x). \tag{17.52}$$

利用以上这些关系，我们就可以导出矢量场 $v_\beta(x)$ 及 $v^\beta(x)$ 的协变导数

$$D_\alpha v_\beta = \partial_\alpha v_\beta - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma v_\gamma, \quad D_\alpha v^\beta = \partial_\alpha v^\beta + \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^\beta v^\gamma, \tag{17.53}$$

其中，$\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 就是式 (17.15) 中的自旋联络. 在方程 (17.16) 中，它被用来构造狄拉克场的协变导数. 这里，它则出现在矢量场 $v_\beta(x)$ 和 $v^\beta(x)$ 的协变导数中. 回顾方程 (17.19)，我们同样可以令上式中的协变导数为

$$D_\alpha v_\beta = \partial_\alpha v_\beta - A_{\alpha\beta}{}^\gamma v_\gamma, \quad D_\alpha v^\beta = \partial_\alpha v^\beta + A_{\alpha\gamma}{}^\beta v^\gamma. \tag{17.54}$$

类似于式 (4.51) 电磁理论中单值规范函数的纯梯度，对于单值局域洛伦兹变换 $\Lambda(x)$，式 (17.15) 中的自旋联络就退化为一个平凡的规范场. 事实上，我们很容易验证，相应于该规范场的场强，即协变旋度

$$F_{\mu\nu\alpha}{}^\gamma \equiv \partial_\mu \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^\gamma - \partial_\nu \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^\gamma - [\overset{\Lambda}{\Gamma}_\mu, \overset{\Lambda}{\Gamma}_\nu]_\alpha{}^\gamma \tag{17.55}$$

对于单值 $\Lambda(x)$ 是为零的. 如在方程 (11.129) 和 (11.126) 中一样，式 (17.55) 中的对易子是将 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\gamma}$ 看作张量 $(\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu})_{\alpha}{}^{\gamma}$ 而定义的. 对于多值洛伦兹变换 $\Lambda(x)$，该协变旋度不为零，且 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\gamma}(x)=A_{\nu\alpha}{}^{\gamma}(x)$ 为非阿贝尔规范场，相应地，它的场强 (17.55) 也不为零，而且在单值局域洛伦兹变换下按张量进行变换.

从式 (17.15) 可得，$\Lambda^{a}{}_{\alpha}(x)$ 和 $\Lambda_{a}{}^{\alpha}(x)$ 满足类似于式 (11.92) 和式 (11.93) 中 $e^{a}{}_{\nu}(x)$ 和 $e_{a}{}^{\nu}(x)$ 所满足的关系式：

$$D_{\alpha}\Lambda^{a}{}_{\beta}=0,\quad D_{\alpha}\Lambda_{a}{}^{\beta}=0. \tag{17.56}$$

利用式 (17.21) 中局域洛伦兹变换的记法，我们可将自旋联络写为矩阵形式. 于是式 (17.50) 中的关系式可写为

$$v^{a}(x)=\Lambda^{a}{}_{\alpha}v^{\alpha}(x),\quad v_{a}(x)=\Lambda_{a}{}^{\alpha}v_{\alpha}(x)=(g\Lambda g)_{a}{}^{\alpha}v_{\alpha}(x)=\left(\Lambda^{\mathrm{T}-1}\right)_{a}{}^{\alpha}v_{\alpha}(x), \tag{17.57}$$

因此

$$\partial_{\alpha}v^{a}(x)=\Lambda^{a}{}_{\beta}D_{\alpha}v^{\beta}(x)=\Lambda^{a}{}_{\beta}\left[\partial_{\alpha}\delta^{\beta}{}_{\alpha}+(\Lambda^{-1}\partial_{\alpha}\Lambda)^{\beta}{}_{\gamma}\right]v^{\gamma}(x). \tag{17.58}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha}v_{a}(x)&=\Lambda_{a}{}^{\beta}D_{\alpha}v_{\beta}(x)=\Lambda_{a}{}^{\beta}\left[\partial_{\alpha}\delta_{\beta}{}^{\gamma}+(\Lambda^{\mathrm{T}}\partial_{\alpha}\Lambda^{\mathrm{T}-1})_{\beta}{}^{\gamma}\right]v_{\gamma}(x)\\&=\Lambda_{a}{}^{\beta}\left[\partial_{\alpha}\delta_{\beta}{}^{\gamma}-(\Lambda^{-1}\partial_{\alpha}\Lambda)^{\gamma}{}_{\beta}\right]v_{\gamma}(x).\end{aligned} \tag{17.59}$$

由此，我们就可确定出

$$(\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha})_{\beta}{}^{\gamma}=(\Lambda^{-1}\partial_{\alpha}\Lambda)^{\beta}{}_{\gamma}=-(\Lambda^{-1}\partial_{\alpha}\Lambda)^{\gamma}{}_{\beta}, \tag{17.60}$$

而这与式 (17.15) 的矩阵表示式完全一样.

如果一个场具有多个局域洛伦兹指标 α，β，$\gamma,\cdots$，每个指标会有一个正比于规范场 $A_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ 的贡献. 如果它还携带有爱因斯坦指标 μ，ν，$\lambda,\ldots$，的话，还应有额外的正比于仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的项. 作为一个例子，我们来看场 v_{β}^{μ} 和 v_{μ}^{β} 关于非完整坐标 $\mathrm{d}x^{\alpha}$ 的协变导数. 由式 (17.53) 以及式 (12.67) 和式 (12.68)，有

$$D_{\alpha}v_{\beta}^{\mu}=\partial_{\alpha}v_{\beta}^{\mu}-\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}v_{\gamma}+h_{\alpha}{}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\nu}{}^{\mu}v_{\beta}^{\nu}, \tag{17.61}$$

$$D_{\alpha}v_{\mu}^{\beta}=\partial_{\alpha}v^{\beta}+\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\beta}v^{\gamma}-h_{\alpha}{}^{\kappa}\Gamma_{\kappa\mu}{}^{\nu}v_{\nu}^{\beta}. \tag{17.62}$$

而关于物理坐标 x^{λ} 的协变导数则为

$$D_{\lambda}v_{\beta}^{\mu}=\partial_{\lambda}v_{\beta}^{\mu}-h^{\alpha}{}_{\lambda}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}v_{\gamma}+\Gamma_{\lambda\nu}{}^{\mu}v_{\beta}^{\nu}, \tag{17.63}$$

$$D_{\lambda}v_{\mu}^{\beta}=\partial_{\lambda}v_{\mu}^{\beta}+h^{\alpha}{}_{\lambda}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\beta}v_{\mu}^{\gamma}-\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu}v_{\nu}^{\beta}. \tag{17.64}$$

对于矢量场而言，我们可将式 (17.15) 中的自旋联络用 $e^{a}{}_{\mu}$ 和 $h_{a}{}^{\mu}$ 表示出来. 借助于式 (17.46)，我们计算得

$$\begin{aligned}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= e_a{}^{\lambda} h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} \partial_{\mu}(e^a{}_{\nu} h_{\beta}{}^{\nu}) \\ &= h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} + h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} \delta^{\lambda}{}_{\nu} \partial_{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} \\ &= h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} (\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} + h^{\delta}{}_{\nu} \partial_{\mu} h_{\delta}{}^{\lambda}).\end{aligned} \tag{17.65}$$

利用式 (17.61) 和式 (17.62) 中协变导数的表达式，该方程可重新改写为如下形式：

$$D_{\alpha} h_{\beta}{}^{\mu} = 0, \qquad D_{\alpha} h^{\beta}{}_{\mu} = 0, \tag{17.66}$$

因此 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 满足式 (11.93) 和式 (17.56) 中 $e_a{}^{\mu}$ 和 $\Lambda_a{}^{\alpha}$ 所满足的同样的关系式.

在此，为方便起见，我们引入如下符号：

$$\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv h_{\alpha}{}^{\lambda} \partial_{\mu} h^{\alpha}{}_{\nu} \equiv -h^{\alpha}{}_{\nu} \partial_{\mu} h_{\alpha}{}^{\lambda}. \tag{17.67}$$

它们用 $h^{\alpha}{}_{\mu}$ 定义的方式同式 (11.91) 中用 $e^a{}_{\mu}$ 来定义 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的方式一样. 于是，我们就可将式 (17.65) 中的自旋联络写为

$$\begin{aligned}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} \left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - h_{\delta}{}^{\lambda} \partial_{\mu} h^{\delta}{}_{\nu}\right) \\ &= h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} (\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}).\end{aligned} \tag{17.68}$$

现在，如果将式 (17.68) 右手边的两项用方程 (11.110)∼(11.112) 中同样的方法分解成克里斯托夫部分和扭曲张量部分的话，我们发现，由于

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_{\mu}(x) e^b{}_{\nu}(x) g_{ab} \equiv h^{\alpha}{}_{\mu}(x) h^{\beta}{}_{\nu}(x) g_{\alpha\beta}, \tag{17.69}$$

$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 和 $\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的克里斯托夫部分是完全一样的：

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \overset{h}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu}{}^{\lambda}. \tag{17.70}$$

一个直接的结果就是 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ 变为

$$\begin{aligned}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} &= h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} (\overset{\Lambda}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu}{}^{\lambda} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{\bar{\Gamma}}_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}) \\ &= h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} (K_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}),\end{aligned} \tag{17.71}$$

其中，$K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 为式 (11.114) 中的扭曲张量，而 $\overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 则代表将式 (11.112) 中的 $e^a{}_{\mu}$ 和 $e_a{}^{\mu}$ 分别替换为 $h^{\alpha}{}_{\mu}$ 和 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 后的表达式. 这些张量具体可写为

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda} = S_{\mu\nu}{}^{\lambda} - S_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} + S^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \tag{17.72}$$

$$\overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \overset{h}{S}_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{S}_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu} + \overset{h}{S}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \tag{17.73}$$

其中

$$\overset{h}{S}_{\mu\nu}{}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}\left(h_{\alpha}{}^{\lambda} \partial_{\mu} h^{\alpha}{}_{\nu} - h_{\alpha}{}^{\lambda} \partial_{\nu} h^{\alpha}{}_{\mu}\right). \tag{17.74}$$

这就是所说的**非完整量**(object of anholonomy)，通常记作 $\Omega_{\mu\nu}{}^{\lambda}$. 该张量对它的前两个指标是反对称的. 于是，当把式 (17.73) 中的组合的最后一个指标降下来后，它同扭曲张量 $K_{\mu\nu\lambda}$ 一样，对后两个指标 $\nu\lambda$ 是反对称的. 因此，式 (17.74) 和式 (17.73) 中的张量就分别具有同扭曲张量和挠率张量相同的对称特性. 这样，当用闵可夫斯基度规 $g_{\alpha\beta}$ [参看式 (17.32)] 对式 (17.71) 中的自旋联络的最后一个指标进行缩并降标后，所得张量对后两个指标是反对称的.

在不含挠率的引力的标准理论中，自旋联络只包含式 (17.71) 中的最后一项. 正是由于这个原因，$\overset{h}{K}_{\mu\nu\lambda}$ 本身经常被看作自旋联络. 而在有挠时空中，它应称为是**无挠自旋联络**.

注意，式 (17.71) 中自旋联络的反对称部分可写为

$$\overset{\Lambda}{S}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \equiv \frac{1}{2}\left(\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma}\right) = h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} (S_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{S}_{\mu\nu}{}^{\lambda}). \tag{17.75}$$

因此，我们发现可以用 $h^{\alpha}{}_{\mu}, h_{\alpha}{}^{\mu}$ 来自由地将指标 α 变到 μ，比如

$$K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \equiv h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} K_{\mu\nu}{}^{\lambda}, \tag{17.76}$$

$$\overset{h}{K}_{\alpha\beta}{}^{\lambda} = h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}. \tag{17.77}$$

17.2 黎曼–嘉当空间中的狄拉克作用量

将式 (17.71) 代入式 (17.26)，我们现在就得到了式 (17.1) 中平直时空作用量的单值的像：

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\bar{\psi}(x) \left[\mathrm{i}\gamma^{\alpha} h_{\alpha}{}^{\mu}(x) D_{\mu} - m\right] \psi(x), \tag{17.78}$$

其中，包含式 (17.26) 和式 (17.29) 所给出的协变导数：

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - \mathrm{i} A_{\mu\beta}{}^{\gamma} \frac{1}{2} \Sigma^{\beta}{}_{\gamma} \equiv \partial_{\mu} - \mathrm{i} h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\beta}{}^{\nu} (K_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}) \frac{1}{2} \Sigma^{\beta}{}_{\gamma}, \tag{17.79}$$

注意，借助于式 (17.15) 中的规范场，式 (17.47) 所定义的曲率张量 $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\gamma}$ 可重新写为

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\gamma} = \Lambda_{a}{}^{\gamma} \left(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\right) \Lambda^{a}{}_{\alpha} = \partial_{\mu}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\gamma} - \partial_{\nu}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^{\gamma} - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^{\delta}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\delta}{}^{\gamma} + \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\delta}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\delta}{}^{\gamma}. \tag{17.80}$$

利用洛伦兹矩阵 $\Lambda(x)$ 的赝正交性以及式 (17.15)，这一结果可以通过接连计算相应的导数而直接得到. 我们发现，式 (17.80) 右边正是由非阿贝尔规范场 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\gamma}$ 以式 (17.55) 中同样的方式所构造的标准的协变旋度. 因此，我们可将上式右边记作

$$F_{\mu\nu\alpha}{}^{\gamma} \equiv \partial_{\mu}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\gamma} - \partial_{\nu}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^{\gamma} - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha}{}^{\delta}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\delta}{}^{\gamma} + \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\alpha}{}^{\delta}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\delta}{}^{\gamma} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\gamma} = h_{\alpha}{}^{\lambda} R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa} h^{\gamma}{}_{\kappa}. \tag{17.81}$$

这一等价性还可用另一种方法加以证明. 利用式 (17.68)，就会得到下面这个比较复杂的表达式：

$$F_{\mu\nu\beta}{}^{\gamma}=\left\{\partial_\mu\left[(\Gamma-\overset{h}{\Gamma})_{\nu\lambda}{}^{\kappa}h_\beta{}^{\lambda}h^{\alpha}{}_{\kappa}\right]-(\mu\leftrightarrow\nu)\right\}$$
$$-\left\{(\Gamma-\overset{h}{\Gamma})_{\mu\lambda}{}^{\tau}(\Gamma-\overset{h}{\Gamma})_{\nu\tau}{}^{\kappa}h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}-(\mu\leftrightarrow\nu)\right\},\tag{17.82}$$

而这又可重新组合为

$$\left[\partial_\mu\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa}-(\Gamma_\mu\Gamma_\nu)_\lambda{}^{\kappa}-(\mu\leftrightarrow\nu)\right]h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}$$
$$+\left\{\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa}\partial_\mu\left(h_\beta{}^{\beta\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}\right)-\partial_\mu\left(\overset{h}{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\kappa}h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}\right)-(\mu\leftrightarrow\nu)\right\}$$
$$+\left\{\left(\Gamma_\mu\overset{h}{\Gamma}_\nu+\overset{h}{\Gamma}_\mu\Gamma_\nu-\overset{h}{\Gamma}_\mu\overset{h}{\Gamma}_\nu\right)_\lambda{}^{\kappa}h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}-(\mu\leftrightarrow\nu)\right\}.\tag{17.83}$$

回头参看式 (11.130)，我们发现，如果我们能够证明上式花括号中的项相互抵消，则我们就证明了式 (17.81) 中的等价关系. 上式花括号中的第一项为

$$\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa}\partial_\mu h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}+\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa}h_\beta{}^{\lambda}\partial_\mu h^{\gamma}{}_{\kappa}-(\mu\leftrightarrow\nu)=-\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\gamma}\overset{h}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\lambda}+\Gamma_{\nu\beta}{}^{\lambda}\Gamma_{\nu\beta}{}^{\kappa}\overset{h}{\Gamma}_{\mu\kappa}{}^{\gamma}+(\mu\leftrightarrow\nu),$$

对此，第二项的贡献为 [其中用到式 (17.67)]

$$-\partial_\mu\left(h_\beta{}^{\lambda}\partial_\nu h^{\gamma}{}_{\lambda}\right)-(\mu\leftrightarrow\nu)=\overset{h}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\lambda}\,\overset{h}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma}-(\mu\leftrightarrow\nu)-h_\beta{}^{\lambda}\left(\partial_\mu\partial_\nu-\partial_\nu\partial_\mu\right)h^{\gamma}{}_{\lambda}.$$

这样，利用式 (17.43) 和式 (17.44)，我们就确实发现

$$F_{\mu\nu\beta}{}^{\gamma}=\left(R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}-\overset{h}{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}\right)h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}=R_{\mu\nu\lambda}{}^{\gamma}h_\beta{}^{\lambda}h^{\gamma}{}_{\kappa}.\tag{17.84}$$

17.3 里奇恒等式

协变旋度 $F_{\mu\nu\alpha}{}^{\gamma}$ 和 $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 在后两个指标相差一个坐标变换下的等价性其实与协变导数的一个基本代数特性有关. 考虑一个矢量场 v_λ，并将一个协变导数算子的对易子作用于其上，我们就得

$$[D_\mu,\ D_\nu]\,v_\lambda=\partial_\mu\left(\partial_\nu v_\lambda-\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\kappa}v_\kappa\right)-\Gamma_\mu{}^{\tau}D_\tau v_\lambda-\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\tau}\left(\partial_\nu v_\tau-\Gamma_{\nu\tau}{}^{\kappa}v_\kappa\right)-(\mu\leftrightarrow\nu).\tag{17.85}$$

对于一个满足 $(\partial_\mu\partial_\nu-\partial_\nu\partial_\mu)\,v_\lambda=0$ 的单值矢量场，我们就得到了所说的**里奇恒等式**(Ricci identity)

$$[D_\mu,\ D_\nu]\,v_\lambda=-R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}v_\kappa-2S_{\mu\nu}{}^{\tau}D_\tau v_\lambda.\tag{17.86}$$

对于一个一般性的张量，$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$ 和 $S_{\mu\nu}{}^{\tau}$ 将分别作用于每一个指标. 现在，在非完整基底 $e_a{}^{\beta}$ 下，我们来计算该矢量分量的相应的关系式：

$$\begin{aligned}[D_\mu,\ D_\nu]\,v_\beta &= \partial_\mu\left(\partial_\nu v_\beta - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\beta}{}^{\gamma}v_\gamma\right) - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\tau}D_\tau v_\beta - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma}\left(\partial_\nu v_\gamma - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\nu\gamma}{}^{\delta}v_\delta\right) - (\mu\leftrightarrow\nu)\\ &= -F_{\mu\nu\beta}{}^{\gamma}v_\gamma - 2S_{\mu\nu}{}^{\tau}D_\tau v_\beta.\end{aligned} \tag{17.87}$$

而对于一个具有任意自旋的场，这可推广为

$$[D_\mu,\ D_\nu]\,\psi = \frac{\mathrm{i}}{2}F_{\mu\nu\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi - 2S_{\mu\nu}{}^{\tau}D_\tau\psi. \tag{17.88}$$

基于式 (17.85) 和式 (17.87) 的完全协变性，我们可以将式 (17.85) 乘以 $h_\beta{}^{\lambda}$ 并将此因子放入到协变导数算子内 (在此过程中，这会改变其联络，因为它们在放入前和放入后作用的对象不同). 于是，式 (17.86) 中的 R 项和式 (17.88) 中的 F 项将保持式 (17.80) 中的简单关系.

17.4 耦合的另一种形式

现在，我们来将上面所得到的标架场 $h_\alpha{}^{\mu}(x)$ 与自旋粒子的最小耦合同黎曼时空中的 Weyl[2]、Fock[3] 和 Iwanenko[4] 的理论进行比较. 他们提出用类似于式 (17.10) 中的随坐标 x 变化的狄拉克矩阵来描述弯曲时空中的狄拉克理论，不过，该狄拉克矩阵定义为

$$\gamma^{\mu}(x) = \gamma^{\alpha}h_\alpha{}^{\mu}(x). \tag{17.89}$$

它们满足局域狄拉克代数 [请同式 (17.11) 进行比较]：

$$\{\gamma^{\mu}(x),\gamma^{\nu}(x)\} = g^{\mu\nu}(x). \tag{17.90}$$

利用此 $\gamma^{\mu}(x)$，则狄拉克作用量可写为

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}} = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\bar{\psi}(x)\left\{\mathrm{i}\gamma^{\mu}(x)D_\mu - m\right\}\psi(x), \tag{17.91}$$

其中，D_μ 为协变导数 (已省略狄拉克自旋指标)

$$D_\mu = \partial_\mu\delta_\mu - \Gamma_\mu(x), \tag{17.92}$$

相应的自旋联络为 [请同式 (17.16) 比较]

$$\Gamma_\mu(x) \equiv -\frac{1}{4}\gamma_\lambda(x)D_\mu\gamma^{\lambda}(x) = -\frac{1}{4}\gamma_\lambda(x)\left[\partial_\mu\gamma^{\lambda}(x) + \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x)\gamma^{\nu}(x)\right]. \tag{17.93}$$

现在，我们来验证，在无挠情形下，作用量 (17.91) 同之前式 (17.78) 中的是等价的. 将式 (17.89) 代入式 (17.93)，我们发现

$$\Gamma_\mu = -\left(h_{\alpha\lambda}\partial_\mu h_\beta{}^\lambda + h_{\lambda\alpha}h_\beta{}^\nu\,\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda\right)\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta. \tag{17.94}$$

类似于式 (11.86)，对于 $h_\alpha{}^\nu(x)$ 我们有 [可由式 (17.23) 中的完备关系得到]

$$\partial_\mu h_\beta{}^\lambda = -h_\beta{}^\nu\left(h_\gamma{}^\lambda\partial_\mu h^\gamma{}_\nu\right). \tag{17.95}$$

于是我们就可将式 (17.94) 重新写为

$$\Gamma_\mu = \left(\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda\right)\frac{1}{4}\gamma^\lambda\gamma^\nu, \tag{17.96}$$

其中，我们用到了式 (17.67) 中的定义. 同式 (17.68) 进行比较，有

$$\Gamma_\mu = -\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta\alpha}\,\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta. \tag{17.97}$$

由于 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}$ 对于指标 $\alpha\beta$ 是反对称的，因此这就等同于 [参看式 (1.228)]

$$\Gamma_\mu = -\frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}. \tag{17.98}$$

如果加上狄拉克指标，这就跟式 (17.18) 是相一致的.

17.5 矢量场的不变作用量

任何在一般坐标变换下保持不变的理论都可进行如下重塑：即其中的导数是关于非完整坐标 $\mathrm{d}x^\alpha$ 的. 由于在该坐标中度规为 $g^{\alpha\beta}$，因此，作用量形式同其在平坦时空中的一样，只是需要将矢量及张量的导数换成协变的形式，如

$$\partial_\alpha v_\beta \to D_\alpha v_\beta = \partial_\alpha v_\beta - \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma v_\gamma. \tag{17.99}$$

举个例子，

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x^\alpha D^\alpha v_\beta(x) D_\alpha v^\beta(x) \tag{17.100}$$

就是广义不变作用量的非完整形式. 如第 17.1 节中所述，时空点的确定必须用 x^μ 坐标. 由于这个原因，作用量最好写为如下形式：

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x^\mu\sqrt{-g}D_\alpha v_\beta(x^\mu)D^\alpha v^\beta(x^\mu). \tag{17.101}$$

在爱因斯坦的一般坐标变换下，$\mathrm{d}x^\mu \to \mathrm{d}x'^{\mu'} = \mathrm{d}x^\mu\alpha_\mu{}^{\mu'}$，指标 α 是不变的. 例如，$h_\alpha{}^\mu$ 它本身的变换为

$$h_\alpha{}^\mu(x)\underset{\mathrm{E}}{\longrightarrow} h_\alpha{}^{\mu'}(x') = h_\alpha{}^\mu(x)\alpha_\mu{}^{\mu'}. \tag{17.102}$$

带有指标 $\alpha, \beta, \cdots$ 的矢量和张量所能感受到的只是自变量的变化 $x \to x-\xi$，因此，它们的无穷小实质变化为

$$\delta_{\mathrm{E}} v_\alpha(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda v_\alpha(x) \tag{17.103}$$

$$\delta_{\mathrm{E}} D_\alpha v_\beta(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda D_\alpha v_\beta(x). \tag{17.104}$$

式 (17.32) 里 $g_{\mu\nu}(x)$ 的“矩阵平方根”中基于局域洛伦兹变换的 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 的选取的任意性说明理论须在以下无穷小洛伦兹变换下不变：

$$\delta_{\mathrm{L}} \mathrm{d}x^\alpha = \omega^\alpha{}_\beta(x) \mathrm{d}x^\beta, \tag{17.105}$$

$$\delta_{\mathrm{L}} h_\alpha{}^\mu(x) = \omega_\alpha{}^\beta(x) h_\beta{}^\mu(x). \tag{17.106}$$

这里 $\omega_\alpha{}^{\alpha'}(x)$ 为式 (11.55) 和式 (11.56) 中的无穷小变换参数.

的确，如果作用量 (17.101) 中每个指标 α 都相应地作如下变换：

$$\delta_{\mathrm{L}} v_\alpha(x) = \omega_\alpha{}^{\alpha'} v_{\alpha'}(x), \quad \delta_{\mathrm{L}} v^\alpha = \omega^\alpha{}_{\alpha'}(x) v^{\alpha'}, \tag{17.107}$$

以及

$$\delta_{\mathrm{L}} D_\alpha v_\beta(x) = \omega_\alpha{}^{\alpha'}(x) D_{\alpha'} v_\beta(x) + \omega_\beta{}^{\beta'}(x) D_\alpha v_{\beta'}(x), \tag{17.108}$$

$$\delta_{\mathrm{L}} D_\alpha v^\beta(x) = \omega_\alpha{}^{\alpha'}(x) D_{\alpha'} v^\beta(x) + \omega^\beta{}_{\beta'}(x) D_\alpha v^{\beta'}(x), \tag{17.109}$$

则该作用量自动是不变的. 在此变换下，变量 x^μ 是不变的，因为式 (17.105) 中的局域洛伦兹变换只对由微分 $\mathrm{d}x^\alpha$ 所定义的中间局域坐标起作用. 这就使得物理坐标 x^μ 在该变换下不变.

现在我们来明确验证一下式 (17.108) 和式 (17.109) 中局域洛伦兹变换下协变导数的性质. 我们知道，普通导数 $\partial_\alpha v_\beta$ 的实质变分为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{L}} \partial_\alpha v_\beta &= (\delta_{\mathrm{L}} \partial_\alpha) v_\beta + \partial_\alpha (\delta_{\mathrm{L}} v_\beta) \\ &= \omega_\alpha{}^{\alpha'} \partial_{\alpha'} v_\beta + \partial_\alpha (\omega_\beta{}^{\beta'} v_{\beta'}) \\ &= \omega_\alpha{}^{\alpha'} \partial_{\alpha'} v_\beta + \omega_\beta{}^{\beta'} \partial_\alpha v_{\beta'} + (\partial_\alpha \omega_\beta{}^{\beta'}) v_{\beta'}.\end{aligned} \tag{17.110}$$

而式 (17.99) 中协变导数 $D_\alpha v_\beta$ 的自旋联络包含有两项 [参看式 (17.68)]，我们将分别加以讨论. 我们对这两项分别乘以 $h_\lambda{}^\gamma h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu$. 第一项，且记之为 $\overset{A}{\Gamma}{}^{(1)}{}_{\alpha\beta}{}^\gamma$，它包含有与 $h_\lambda{}^\gamma h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu$ 相乘的扭曲张量 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$，因此，它的变换行为就如同一个张量：

$$\delta_{\mathrm{L}} \overset{A}{\Gamma}{}^{(1)}{}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \omega_\alpha{}^{\alpha'} \overset{A}{\Gamma}{}^{(1)}{}_{\alpha'\beta} + \omega_\beta{}^{\beta'} \overset{A}{\Gamma}{}^{(1)}{}_{\alpha\beta'}{}^\gamma + \omega^\gamma{}_{\gamma'} \overset{A}{\Gamma}{}^{(1)}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma'}. \tag{17.111}$$

式 (17.68) 中的第二项则含有与 $h_\lambda{}^\gamma h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu$ 相乘的 $\overset{h}{\Gamma}{}_{\mu\nu}{}^\lambda$，因此它并不是一个张量. 它的实质变分将包含有一个非张量导数的贡献：

$$\begin{aligned}\delta_{\rm L}\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}=&(\delta_{\rm L}h_{\delta}{}^{\lambda})\partial_{\mu}h^{\delta}{}_{\nu}+h_{\delta}{}^{\lambda}\partial_{\mu}(\delta_{\rm L}h^{\delta}{}_{\nu})\\=&\omega_{\delta}{}^{\delta'}h_{\delta'}{}^{\lambda}\partial_{\mu}h^{\delta}{}_{\nu}+h_{\delta}{}^{\lambda}\partial_{\mu}(\omega^{\delta}{}_{\delta'}h^{\delta'}{}_{\nu})\\=&\omega_{\delta}{}^{\delta'}h_{\delta'}{}^{\lambda}\partial_{\mu}h^{\delta}{}_{\nu}+\omega^{\delta}{}_{\delta'}h_{\delta}{}^{\lambda}\partial_{\mu}h^{\delta'}{}_{\nu}+\partial_{\mu}\omega^{\delta}{}_{\delta'}h_{\delta}{}^{\lambda}h^{\delta'}{}_{\nu}\\=&\partial_{\mu}\omega^{\delta}{}_{\delta'}h_{\delta}{}^{\lambda}h^{\delta'}{}_{\nu}=-\partial_{\mu}\omega_{\delta'}{}^{\delta}h_{\delta}{}^{\lambda}h^{\delta'}{}_{\nu},\end{aligned}\tag{17.112}$$

第三行中前两项相互抵消是由于 $\omega_{\delta}{}^{\delta'}=-\omega^{\delta'}{}_{\delta}$ 的反对称性. 这样我们就有

$$\delta_{\rm L}\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\delta_{\rm L_0}\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}-\partial_{\mu}\omega_{\beta}{}^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\lambda}h^{\beta}{}_{\nu},\tag{17.113}$$

其中，$\delta_{L_0}\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 代表形如 (17.111) 的项.

将式 (17.113) 和式 (17.111) 一起代入式 (17.68)，我们就得

$$\delta_{\rm L}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=\delta_{\rm L_0}\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}+\partial_{\alpha}\omega_{\beta}{}^{\gamma}.\tag{17.114}$$

此式最后一项将与式 (17.110) 中最后的那个非张量部分相消，于是协变导数 $D_{\alpha}v_{\beta}$ 确实满足式 (17.108) 中的协变律. 而关系式 (17.109) 则可通过用闵可夫斯基逆度规 $g^{\alpha\beta}$ 将指标 β 升上去而加以证明. 对于自旋联络，它的变换律为

$$\delta_{\rm L}A_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=\omega_{\beta}{}^{\beta'}A_{\alpha\beta'}{}^{\gamma}+\omega_{\alpha}{}^{\alpha'}A_{\alpha'\beta'}{}^{\gamma}+\omega^{\gamma}{}_{\gamma'}A_{\alpha\beta}{}^{\gamma'}+\partial_{\alpha}\omega_{\beta}{}^{\gamma}.\tag{17.115}$$

为了日后方便，我们将下标 α 转换为时空指标 μ 并定义 $A_{\mu\beta}{}^{\gamma}\equiv h^{\alpha}{}_{\mu}A_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$. 在局域洛伦兹变换下，它的变换关系为

$$\delta_{\rm L}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}=\omega_{\beta}{}^{\beta'}A_{\mu\beta'}{}^{\gamma}+\omega^{\gamma}{}_{\gamma'}A_{\mu\beta}{}^{\gamma'}+\partial_{\mu}\omega_{\beta}{}^{\gamma}.\tag{17.116}$$

17.6　局域洛伦兹不变性的验证

现在我们来进一步详细地讨论局域洛伦兹变换下的不变性. 这可用来在任意一点 x^{μ} 从一个自由下落参考系变到另一个. 在此变换下，旋量场 $\psi(x)$ 的变换为

$$\delta_{\rm L}\psi(x)=-\frac{\rm i}{2}\omega^{\alpha\beta}(x)\Sigma_{\alpha\beta}\psi(x).\tag{17.117}$$

这里 $\Sigma_{\alpha\beta}$ 为局域洛伦兹群的自旋表示矩阵 (1.227). 它们对指标 α 和 β 是反对称的，且满足式 (1.226) 中对易关系：

$$[\Sigma_{\alpha\beta},\Sigma_{\alpha\gamma}]=-{\rm i}g_{\alpha\alpha}\Sigma_{\beta\gamma},\quad 对\alpha不求和.\tag{17.118}$$

而且，它们可以表示成狄拉克矩阵的对易子 [参看式 (1.227) 和式 (1.228)]：

$$\Sigma_{\alpha\beta}=\frac{\rm i}{4}\left[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\right].\tag{17.119}$$

ψ 的导数的无穷小洛伦兹变换为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{L}}\partial_\alpha\psi &= \omega_\alpha{}^{\alpha'}\partial_{\alpha'}\psi + \partial_\alpha\delta_{\mathrm{L}}\psi \\ &= \omega_\alpha{}^{\alpha'}\partial_{\alpha'}\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\alpha\left(\omega^{\beta\gamma}\Sigma_{\beta\gamma}\right)\psi \\ &= \omega_\alpha{}^{\alpha'}\partial_{\alpha'}\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\beta\gamma}\Sigma_{\beta\gamma}\partial_\alpha\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_\alpha\omega^{\beta\gamma}\right)\Sigma_{\beta\gamma}\psi. \end{aligned} \tag{17.120}$$

头两项反映出了 $\partial_\alpha\psi$ 在固定角度 $\omega^{\beta\gamma}$ 下的洛伦兹变换特性. 最后一项则是源于 $\omega^{\beta\gamma}(x)$ 对 x 的依赖性. 而这一项则可以通过以下采用由自旋联络 (17.16) 构成的协变导数 (17.18) 来加以消除：

$$D_\alpha\psi(x) \equiv \partial_\alpha\psi(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi(x). \tag{17.121}$$

事实上，如果我们计算 $D_\alpha\psi(x)$ 中第二项的变分

$$\delta_{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi(x), \tag{17.122}$$

我们会得到两项. 其中一项具有通常的洛伦兹变换特性

$$\delta_{\mathrm{L}_0}\frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\sigma\tau}\Sigma_{\sigma\tau}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi\right). \tag{17.123}$$

这可利用对易关系 (17.118) 从下式中得到：

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\delta_{\mathrm{L}}\overset{\Lambda}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi + \frac{\mathrm{i}}{2}\overset{\Lambda}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\delta_{\mathrm{L}}\psi. \tag{17.124}$$

第二项则是由 $\partial_\alpha\omega_\beta{}^\gamma$ 引起的，为

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\alpha\omega_\beta{}^{\gamma}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}\psi, \tag{17.125}$$

而这将与式 (17.120) 中最后一项相消. 于是，$D_\alpha\psi$ 具有如下变换行为：

$$\delta_{\mathrm{L}}D_\alpha\psi = \omega_\alpha{}^{\alpha'}(x)D_{\alpha'}\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\beta\gamma}(x)\Sigma_{\beta\gamma}D_\alpha\psi, \tag{17.126}$$

并因此而给出了一个恰当的协变导数，它将标准的洛伦兹变换行为推广到了局域变换 $\omega_\alpha{}^\beta(x)$ 的情形下.

对于任意的自旋，变换关系 (17.117) 都成立，只需将 $\Sigma_{\alpha\beta}$ 替换为洛伦兹群的相应的合适的表示即可. 作为一个例子，我们来看矢量场，其自旋表示矩阵由式 (1.51) 中定义的洛伦兹生成元给出：

$$\left(L_{\alpha\beta}\right)_{\alpha'\beta'} = \mathrm{i}\left[g_{\alpha\alpha'}g_{\beta\beta'} - (\alpha\leftrightarrow\beta)\right], \quad \left(L_{\alpha\beta}\right)_{\alpha'}{}^{\beta'} = \mathrm{i}\left[g_{\alpha\alpha'}\delta_\beta{}^{\beta'} - (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]. \tag{17.127}$$

如果将这些矩阵插入变换律 (17.117) 而替换掉 $\Sigma_{\alpha\beta}$，我们就得到了形如式 (17.107) 的关于矢量场的对称变换关系式：

$$\delta_{\mathrm{L}} v_\alpha = -\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\gamma\delta}\,\mathrm{i}\left(g_{\gamma\alpha}\delta_\delta{}^\beta - g_{\delta\alpha}\delta_\gamma{}^\beta\right) v_\beta = \omega_\alpha{}^\beta v_\beta\,. \tag{17.128}$$

17.7 包含自旋物质的场方程

考虑一个与引力场有相互作用的自旋 1/2 场的作用量：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[h,K,\psi] &= -\frac{1}{2K}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bar{\psi}\gamma^\alpha D_\alpha\psi(x) + \mathrm{h.c.}\\ &= \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}[h,K] + \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}[h,K,\psi],\end{aligned} \tag{17.129}$$

其中，协变导数如式 (17.79) 中那样由 $K_{\mu\nu}{}^\lambda - \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^\lambda$ 给出. 式 (17.129) 中的作用量可以说是一个标架场 $h_\alpha{}^\mu$ 、扭曲张量 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 以及狄拉克场 $\psi(x)$ 的泛函. 对 $\mathcal{A}$ 作关于 $\bar{\psi}$ 的变分，我们就得到了一般仿射时空中狄拉克粒子的运动方程

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta\bar{\psi}} = \sqrt{-g}(\gamma^\alpha D_\alpha - m)\psi(x) = 0. \tag{17.130}$$

为了得到引力场方程，类似于之前在式 (15.19) 中那样，我们将通过在固定 $h_\alpha{}^\mu$ 的情形下对 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 变分而再次定义自旋流密度，这样，如同式 (15.66)，对于引力场我们就有

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{f}}{\Sigma}{}^\nu{}_\lambda{}^{,\mu}. \tag{17.131}$$

由物质作用量式 (17.18)，我们得

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\overset{m}{\Sigma}{}^\nu{}_\lambda{}^{,\mu} \equiv 2\frac{\delta \overset{m}{\mathcal{A}}}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda} &= \sqrt{-g}\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\Sigma^\nu{}_\lambda(x)\psi(x) + \mathrm{h.c.}\right]\\ &= h_\gamma{}^\lambda h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu\sqrt{-g}\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}(x)\gamma^\alpha\Sigma^\beta{}_\gamma\psi(x) + \mathrm{h.c.}\right]\\ &= h_\gamma{}^\lambda h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu h_\beta{}^\nu\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^\beta{}_\gamma{}^{,\alpha}.\end{aligned} \tag{17.132}$$

括号中的表达式正是我们在式 (3.228) 中所推导的闵可夫斯基时空中狄拉克粒子的正则自旋流密度 $\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^\beta{}_\gamma{}^{,\alpha}$ 的一般协变形式. 于是，对于自旋 1/2 场，式 (15.18) 中的自旋流密度的定义同正则定义

$$\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^\nu{}_\lambda{}^{,\mu} \equiv -\mathrm{i}\sum_i \pi_i{}^\mu\Sigma^\nu{}_\lambda\varphi_i = -\mathrm{i}\sum_i\frac{\partial\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}}{\partial D_\mu\varphi_i}\Sigma^\nu{}_\lambda\varphi_i \tag{17.133}$$

是相一致的. 在上述正则定义式中，对 i 的求和遍历系统中所有的物质场. 这对于所有的物质场均成立，因为一般爱因斯坦不变的物质作用量都具有如下泛函形式 [请对照式 (17.18)]：

$$\overset{\text{m}}{\mathcal{A}}=\overset{\text{m}}{\mathcal{A}}[h,K,\varphi_i]=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\overset{\text{m}}{\mathcal{L}}\left(h_\alpha{}^\mu,\varphi_i,D_\mu\varphi_i\right). \tag{17.134}$$

这就意味着，对于固定的 $h_\alpha{}^\mu$，有

$$\begin{aligned}2\left.\frac{\delta\overset{m}{\mathcal{A}}}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda}\right|_{h_\alpha{}^\mu}&=2\sqrt{-g}\sum_i\frac{\partial\overset{\text{m}}{\mathcal{L}}}{\partial D_\mu\varphi_i}\frac{\mathrm{i}}{2}\Sigma^\nu{}_\lambda\varphi_i\\&\equiv\mathrm{i}\sqrt{-g}\sum_i\pi_i{}^\mu\Sigma^\nu{}_\lambda\varphi_i=-\overset{\text{m}}{\Sigma}{}^\nu{}_\lambda{}^{,\mu}.\end{aligned} \tag{17.135}$$

对场和物质的总的作用量作关于 $\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 的变分，我们就可得到相应的场方程

$$-\kappa\overset{\text{f}}{\Sigma}{}^\nu{}_\lambda{}^{,\mu}=\kappa\overset{\text{m}}{\Sigma}{}^\nu{}_\lambda{}^{,\mu}, \tag{17.136}$$

这样就将式 (15.61) 中的场方程推广到了含有自旋物质的系统. 本式连同式 (15.57) 一起就决定了 Palatini 张量 (15.48):

$$S_{\mu\nu,\lambda}=-\kappa\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\mu\nu,\lambda}, \tag{17.137}$$

并进而利用式 (15.49)，就可通过下述场方程而确定时空的挠率：

$$S_{\mu\nu\lambda}=\frac{\kappa}{2}\left(\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\mu\nu,\lambda}+\frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\mu\kappa}{}^{;\kappa}-\frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\mu\kappa}{}^{,\kappa}\right). \tag{17.138}$$

现在我们来看由对 $h_\alpha{}^\mu$ 取极值而得到的场方程. 我们定义总的能动张量为

$$\sqrt{-g}T_\mu{}^\alpha(x)\equiv\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta h_\alpha{}^\mu(x)}\right|_{S_{\mu\nu}{}^\lambda}, \tag{17.139}$$

其中的导数是在固定 $S_{\mu\nu}{}^\lambda$ 的情形下做的. 基于式 (17.95) 中的关系式，利用微分的链式法则，我们还可以将上式写为

$$\sqrt{-g}T_\alpha{}^\mu(x)=-\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta h^\alpha{}_\mu(x)}\right|_{S_{\mu\nu}{}^\lambda}. \tag{17.140}$$

对于纯引力作用量，它只决定于 $g^{\mu\nu}=h^{\alpha\mu}h_\alpha{}^\nu$ 和 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$，这个定义将给出同我们之前在式 (15.17) 中给出过的完全一样的对称能动张量，唯一的区别在于这里的一个指标涉及基底 $\boldsymbol{e}_\alpha(x)$. 利用式 (15.17)，这可直接由微分的链式法则得到

$$\sqrt{-g}\,\overset{\text{f}}{T}_\mu{}^\alpha\equiv\frac{\delta\overset{\text{f}}{\mathcal{A}}}{\delta h_\alpha{}^\mu}=\frac{\delta\overset{\text{f}}{\mathcal{A}}}{\delta g^{\lambda\kappa}}\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial h_\alpha{}^\mu}=\sqrt{-g}\,\overset{\text{f}}{T}_{\mu\kappa}\,h^{\alpha\kappa}. \tag{17.141}$$

当然，同式 (17.140) 中一样，这里也存在一个类似的包含 $h^{\alpha}{}_{\mu}$ 的导数的关系式：

$$\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{f}}{T}_{\alpha}{}^{\mu} \equiv -\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta h^{\alpha}{}_{\mu}} = -\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta g_{\lambda\kappa}}\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial h^{\alpha}{}_{\mu}} = \sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{f}}{T}{}^{\kappa\mu} h_{\alpha\kappa}. \tag{17.142}$$

对于物质场而言，对其对称称能动张量的确切计算分两步进行会比较合适. 作为一个例子，我们来看狄拉克场. 首先第一步，我们将 $\sqrt{-g}$ 和 $\gamma^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\mu}\partial_{\mu}$ 对 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 求导而暂时令 $D_{\mu} =$ 常数. 其结果就是所说的正则能动张量：

$$\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\mu}{}^{\alpha} \equiv \sqrt{-g}\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\mathrm{i}D_{\mu}\psi - h^{\alpha}{}_{\mu}\,\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}\right) + \mathrm{h.c.} \tag{17.143}$$

这是该形式的一个一般性特征：将式 (17.134) 对包含在协变导数 $D_{\mu}\varphi_i = h^{\alpha}_{\mu}D_{\alpha}\varphi_i$ 中的 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 场求导可得

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta h_{\alpha}{}^{\mu}} \longrightarrow \sqrt{-g}\sum_i \frac{\partial \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}}{\partial D_{\nu}\varphi_i} D_{\mu}\varphi_i\, h^{\alpha\nu}. \tag{17.144}$$

而将式 (17.134) 对包含在 $\sqrt{-g}$- 项中的 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 求导则会有如下贡献：

$$\frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta h_{\alpha}{}^{\mu}} \longrightarrow -\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\,\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}\,h^{\alpha\nu}. \tag{17.145}$$

这两部分的和就给出

$$\overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\mu}{}^{\alpha} = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial D_{\nu}\varphi_i} D_{\mu}\varphi_i - g_{\mu\nu}\,\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}\right) h^{\alpha\nu}, \tag{17.146}$$

而这正是任意一个包含有协变导数拉格朗日量所对应的正则能动张量.

将此公式用于具有爱因斯坦–嘉当作用量 (15.11) 的纯引力场情形，则第一步关于在固定 D_{μ} 下的微分就对应着 $\delta R_{\mu\nu} = 0$ 下的变分 (15.30)，因此我们有方程

$$\overset{\mathrm{f}}{\Theta}_{\mu}{}^{\alpha} = -\frac{1}{\kappa}G_{\mu\nu}h^{\alpha\nu}. \tag{17.147}$$

因此，该引力场的正则能动张量就等于负的 $1/\kappa$ 乘以式 (11.144) 中由黎曼–嘉当曲率张量组成的爱因斯坦张量. 它给出了式 (15.62) 中得到的引力作用量 (15.11) 的对称能动张量的第一项.

现在我们来看第二步，即关于 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 的泛函导数的计算. 这个计算有些繁琐. 我们将这个对 $\overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa}{}^{\delta}$ 的额外的贡献写为

$$\sqrt{-g}\,\delta\,\overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa}{}^{\delta} = \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta K_{\mu\beta}{}^{\gamma}} \frac{\delta \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma}}{\delta h_{\delta}{}^{\kappa}}\bigg|_{S_{\mu\nu}{}^{\lambda}} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{,\mu} \frac{\delta \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma}}{\delta h_{\delta}{}^{\kappa}}\bigg|_{S_{\mu\nu}{}^{\lambda}}, \tag{17.148}$$

并利用自旋联络的具体表示式

$$\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma} = h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\beta}{}^{\nu} (\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}) = -h_{\beta}{}^{\nu} \overset{\Gamma}{D}_{\mu} h^{\gamma}{}_{\nu} = h^{\gamma}{}_{\nu} \overset{\Gamma}{D}_{\mu} h_{\beta}{}^{\nu}, \tag{17.149}$$

其中，$\overset{\Gamma}{D}_{\mu}$ 表示协变导数中只包含普通联络 $\Gamma_{\mu\beta}{}^{\lambda}$ 的部分. 如果我们对 $\delta h_{\mu\beta}{}^{\gamma}$ 作变分而保持 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 固定，我们有

$$\delta \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma}\Big|_{\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}} = \delta h^{\gamma}{}_{\nu} \overset{\Gamma}{D}_{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} + h^{\gamma}{}_{\nu} \overset{\Gamma}{D} \delta h_{\beta}{}^{\nu}. \tag{17.150}$$

由于 $D_{\mu} h^{\gamma}{}_{\nu} = 0$ [参看式 (17.66)]，我们看到，$\overset{\Gamma}{D}_{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} = \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\lambda} h_{\lambda}{}^{\nu}$，于是我们有

$$\delta \overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma}\Big|_{\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}} = h^{\gamma}{}_{\nu} D_{\mu} \delta h_{\beta}{}^{\nu}. \tag{17.151}$$

将此代入式 (17.148)，利用分部积分就会得到第一部分贡献

$$\Delta_1 \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa}{}^{\delta} = -(1/2) D_{\mu} \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\kappa}{}^{\delta,\mu}. \tag{17.152}$$

现在我们将来自 $\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的贡献包含进来. 利用 $\delta S_{\mu\nu\lambda} = 0$ 即 $\delta K_{\mu\nu\lambda} = 0$ 下的分解式 (15.53)，我们发现

$$\Delta_2 \overset{\mathrm{m}}{\Theta}{}_{\kappa}{}^{\delta} = \frac{1}{4} \left[D_{\mu} \left(\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\nu\sigma,\mu} - \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\sigma\mu,\nu} + \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\mu\nu,\sigma} \right) \right] \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial h_{\delta}{}^{\kappa}}. \tag{17.153}$$

利用

$$\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial h_{\delta}{}^{\kappa}} = g_{\nu\kappa} h^{\delta}{}_{\sigma} + (\nu \leftrightarrow \sigma), \tag{17.154}$$

总合起来，这就给出

$$\Delta \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa}{}^{\delta}(x) = -\frac{1}{2} D^{*}_{\mu} \left(\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\kappa}{}^{\delta,\,\mu} - \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\delta\mu}{}_{,\,\kappa} + \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\mu}{}_{\kappa,\,\delta} \right). \tag{17.155}$$

这恰恰同式 (15.60) 中为了构造对称能动张量 $T_{\kappa\delta}$ 而加在引力场正则能动张量 $\Theta_{\kappa\delta}$ 上的 $\Delta\Theta_{\kappa}{}^{\delta} = \Delta\Theta_{\kappa}{}^{\nu} h^{\delta}{}_{\nu}$ 是同一类修正项. 这里，我们可得任意自旋物质场的相应的对称能动张量为

$$\overset{\mathrm{m}}{T}_{\kappa\nu} = \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa\nu} + \Delta \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa\nu} = \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\kappa\nu} - \frac{1}{2} D^{*}_{\mu} \left(\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\kappa\nu}{}^{,\mu} - \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\nu}{}^{\mu}{}_{,\kappa} + \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\mu}{}_{\kappa,\,\nu} \right). \tag{17.156}$$

对于自旋 1/2 来说，这正是式 (3.231) 中由 Belinfante 在 1939 年得到的表达式. 我们已经将上式两边的指标 ν 降了下来，由于该方程的协变形式，这样做总是可以的.

利用 $\overset{\mathrm{m}}{T}_{\mu\nu}$，由作用量对 $\delta h_{\alpha}{}^{\mu}$ 变分而得到的场方程又再次可写为式 (15.64) 中那样的简单形式：

$$G^{\mu\nu} = \kappa \overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}, \tag{17.157}$$

其中，所含为式 (17.156) 中自旋物质的能动张量.

文献与注记

[1] 本章内容主要沿袭如下教材内容：
H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b2`), 特别参看 pp. 1338–1377 (`kl/b1/gifs/v1-1338s.html`).

[2] H. Weyl, Z. Phys. **56**, 330 (1929).

[3] V. Fock, Z. Phys. **57**, 261 (1929).

[4] V. Fock and D. Iwanenko, Phys. Z. **30**, 648 (1929).

[5] 参看 S. Weinberg 发表在*Physics Today* 2006 年 4 月刊第 10 页上的文章，在这篇文章中他对回应他之前发表于 2005 年 11 月的一篇关于爱因斯坦错误的文章的通信做了评论. 在此四月刊的文章中，他强调他从来没理解挠率张量的物理重要性. 而这促使 F.W. Hehl 在 2007 年 3 月刊中进一步作出评论，他提醒 Weinberg 注意 Sciama 和 Kibble 用洛伦兹变换和平移的规范场来构造爱因斯坦–嘉当引力理论的方法，在此理论中曲率张量和挠率张量都是规范不变的场强. Hehl 的回答并没有使 Weinberg 满意，如果要说服他，就必须要有一个不变性原则，这个原则须要求仿射联络中的克里斯托夫符号必须伴有一个挠率张量. 其实，正如我们在第 20.2 节中所提到的，第 14 章中的多值映射原则正是这样一种不变原理.

第 18 章　协变守恒定律

Nothing endures but change.
HERACLITUS (540BC~480BC)

根据第 3 章所证明的 Noether 定理，作用量在一般坐标变换及局域洛伦兹变换下的不变性必定伴随有特定的守恒定律. 为了后续考虑，我们将把标架场 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 以及自旋联络 $\overset{A}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 看作独立变量. 在本章中，对自旋联络我们将始终采用式 (17.19) 中的记法 $A_{\alpha\beta}{}^\gamma$. 另外，我们将会把下标 α 转换为时空指标 μ 并在所有的方程中将之写为规范场 $A_{\mu\beta}{}^\gamma \equiv h^\alpha{}_\mu A_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 的形式.

从式 (17.141) 中推导正则能动张量的过程可知，对作用量在固定 $A_{\mu\beta}{}^\gamma(x)$ 的情形下作关于 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 的泛函导数就可给出正则能动张量：

$$\frac{\delta\mathcal{A}[h_\alpha{}^\mu, A_{\mu\beta}{}^\gamma]}{\delta h_\alpha{}^\mu} = \sqrt{-g}\ \Theta_\mu{}^\alpha. \tag{18.1}$$

而另一方面，固定 $h_\alpha{}^\mu$ 而作关于 $A_{\mu\beta}{}^\gamma = \overset{A}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^\gamma$ 的泛函导数则等价于关于 $K_{\mu\beta}{}^\gamma$ 的泛函导数，这点可从式 (17.71) 看出. 因此，根据式 (17.131)，这会给出自旋流密度[①]

$$\frac{\delta\mathcal{A}[h_\alpha{}^\mu, A_{\mu\beta}{}^\gamma]}{\delta A_{\mu\beta}{}^\gamma} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\alpha}\ h_\alpha{}^\mu \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}. \tag{18.2}$$

我们将证明上述这些物理量满足协变守恒定律.

注意，上述方程中的作用量 $\mathcal{A} = \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} + \overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}$ 为引力场和物质作用量的和.

18.1　自 旋 密 度

首先考虑局域洛伦兹变换. 在该变换下，标架场 $h_\alpha{}^\mu(x)$ $(\mu = 0, \cdots, 3)$ 的变换行为就如同一个携带指标 α 的矢量：

$$\delta_{\mathrm{L}} h_\alpha{}^\mu(x) = \omega_\alpha{}^{\alpha'}(x) h_{\alpha'}{}^\mu(x). \tag{18.3}$$

同样，场 $A_{\mu\beta}{}^\gamma$ $(\mu = 0, \cdots, 3)$ 的变换行为就如同一个携带有局域洛伦兹指标 β 和 γ 的张量. 而下标 μ 则不是一个张量指标，因为它会给出一个额外的典型的规范场

① 由式 (17.71) 而得的分解式 $A_{\mu\beta}{}^\gamma = h^\gamma{}_\lambda h_\beta{}^\nu (K_{\mu\nu}{}^\lambda - \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^\lambda)$ 使得 $A_{\mu\beta}{}^\gamma$ 对于指标 β 和 γ 是反对称的.

的导数项 [参看式 (17.116)]

$$\delta_{\rm L} A_{\mu\beta}{}^{\gamma} = \omega_{\beta}{}^{\beta'}(x) A_{\mu\beta'}{}^{\gamma} + \omega^{\gamma}{}_{\gamma'}(x) A_{\mu\beta}{}^{\gamma'} + \partial_\mu \omega_\beta{}^{\gamma}(x). \tag{18.4}$$

作为欧拉–拉格朗日方程的一个结果，作用量的对称变分 $\delta_{\rm L}\mathcal{A}$ 须为零. 将式 (18.3) 和式 (18.4) 代入任意一个不变作用量 $\mathcal{A}$ 中，我们得

$$\begin{aligned}\delta_{\rm L}\mathcal{A} =& \int {\rm d}^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta h_\alpha{}^\mu(x)} \omega_\alpha{}^{\alpha'}(x) h_{\alpha'}{}^\mu(x) \right. \\ &\left. + \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta A_{\mu\beta}{}^\gamma(x)} \left(\omega_\beta{}^{\beta'}(x) A_{\mu\beta'}{}^\gamma(x) + \omega^\gamma{}_{\gamma'}(x) A_{\mu\beta}{}^{\gamma'}(x) + \partial_\mu\omega_\beta{}^\gamma(x)\right)\right\} \\ =& \int {\rm d}^4x \sqrt{-g}\ \left\{ \varTheta_\mu{}^\alpha \omega_\alpha{}^{\alpha'} h_{\alpha'}{}^\mu - \frac{1}{2}\varSigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\left(\omega_\beta{}^{\beta'} A_{\mu\beta'}{}^\gamma + \omega^\gamma{}_{\gamma'} A_{\mu\beta}{}^{\gamma'} + \partial_\mu \omega_\beta{}^\gamma\right)\right\}.\end{aligned} \tag{18.5}$$

对最后一项进行分部积分给出

$$\begin{aligned}\int {\rm d}^4x &\left\{\sqrt{-g}\ \varTheta_\mu{}^\alpha \omega_\alpha{}^{\alpha'} h_{\alpha'}{}^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\varSigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\right)\omega_\beta{}^\gamma \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \varSigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\left(\omega_\beta{}^{\beta'} A_{\mu\beta'}{}^\gamma + \omega^\gamma{}_{\gamma'} A_{\mu\beta}{}^{\gamma'}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{18.6}$$

由于 $\omega_\beta{}^\gamma(x')$ 为一个任意的反对称的 x' 的函数，我们可令它在某点 x 外为零，于是我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \left(\varTheta_\mu{}^\beta h_\gamma{}^\mu - \varTheta_{\mu\gamma} h^{\beta\mu}\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu\sqrt{-g}\varSigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu} \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\varSigma^\beta{}_{\delta'}{}^{\mu} A_{\mu\gamma}{}^\delta + \varSigma^\delta{}_{\beta'}{}^{\mu} A_{\mu\delta}{}^\beta\right).\end{aligned} \tag{18.7}$$

令

$$\varTheta_\gamma{}^\beta \equiv \varTheta_\mu{}^\beta h_\gamma{}^\mu \tag{18.8}$$

并且用闵可夫斯基度规 $\eta^{\gamma\gamma'}$ 提升指标 γ，这就变为

$$\frac{1}{2}\left[\varTheta^{\gamma\beta} - \varTheta^{\beta\gamma}\right] + \frac{1}{2}\varGamma_{\mu\sigma}{}^\sigma \varSigma^{\beta\gamma,\mu} + \frac{1}{2}D^{\rm L}_\mu \varSigma^{\beta\gamma\mu} = 0, \tag{18.9}$$

其中，$\overset{\rm L}{D}_\mu$ 为局域洛伦兹指标 γ 的协变微商，即对于一个矢量

$$\overset{\rm L}{D}_\mu\ v_\alpha = \partial_\mu v_a - A_{\mu\alpha}{}^\beta v_\beta = h^\beta{}_\mu D_\beta v_\alpha, \tag{18.10}$$

$$\overset{\rm L}{D}_\mu\ v^\alpha = \partial_\mu v^\alpha - A_\mu{}^\alpha{}_\beta v^\beta = \partial_\mu v^\alpha + A_{\mu\beta}{}^\alpha v^\beta = h^\beta{}_\mu D_\beta v^\alpha. \tag{18.11}$$

通过下式操作：

$$D_\mu \varSigma^{\beta\gamma,\nu} \equiv \overset{\rm L}{D}_\mu\ \varSigma^{\beta\gamma,\nu} - \varGamma_{\mu\lambda}{}^\nu \varSigma^{\beta\gamma,\lambda}, \tag{18.12}$$

也可使得导数 $\overset{\mathrm{L}}{D}_\mu\, \sigma^{\beta\gamma,\nu}$ 对爱因斯坦指标 μ 是完全协变的. 如果我们将 μ 同 ν 缩并，并利用方程 (18.9)，则式 (18.12) 中的最后一项将与式 (18.9) 中的中间一项相消，利用式 (15.42) 中的 D_μ^* 我们就得

$$\frac{1}{2}D_\mu^*\Sigma^{\beta\gamma,\mu} = \frac{1}{2}\left[\Theta^{\beta\gamma} - \Theta^{\gamma\beta}\right]. \tag{18.13}$$

将此乘以 $h_\beta{}^\lambda h_\gamma{}^\kappa$，并将标架场移到协变导数的右边 (根据式 (17.66) 中的关系，我们总可以这样做)，我们就得到了自旋流密度的局域守恒定律：

$$\frac{1}{2}h_\beta{}^\lambda h_\gamma{}^\kappa D_\mu\Sigma^{\beta\gamma,\mu} - \Theta^{[\lambda,\kappa]} = \frac{1}{2}D_\mu^*\Sigma^{\lambda\kappa,\mu} - \Theta^{[\lambda,\kappa]} = 0. \tag{18.14}$$

18.2 能动张量密度

现在我们来推导局域爱因斯坦不变性所导致的结果. 在此情形下，时空坐标也须同时变换掉，因此作用量须满足如下不变性：

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g(x)}\mathcal{L}(h(x), A(x)) = \int \mathrm{d}^4x'\sqrt{-g'(x')}\mathcal{L}\left(h'(x'), A'(x')\right). \tag{18.15}$$

如果我们将第二个积分中的变量由 x' 换为 x ，我们发现其差别

$$\int \mathrm{d}^4x\left\{\sqrt{-g'(x)}\mathcal{L}\left(h'(x), A'(x)\right) - \sqrt{-g(x)}\mathcal{L}\left(h(x), A(x)\right)\right\} \tag{18.16}$$

必须集中在积分区域的表面附近. 这是因为积分 $\int \mathrm{d}^4x'$ 和 $\int \mathrm{d}^4x$ 所覆盖的是**同一个**区域. 因此，当把自变量变换后，即 $x' \to x$，第一个积分所覆盖的区域会稍有不同. 对无穷小变换情形，这就是说

$$\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x\, \delta_{\mathrm{E}}\left[\sqrt{-g(x)}\mathcal{L}\left(h(x), A(x)\right)\right] \tag{18.17}$$

是一个纯表面项. 这里符号 δ_{E} 表示在**固定**变量 x 的爱因斯坦变换下的实质变化 [参看式 (3.132) 及式 (11.78)]，即

$$\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}(x) = \bar{D}_\mu\xi_\nu(x) + \bar{D}_\nu\xi_\mu(x). \tag{18.18}$$

在此爱因斯坦变换下，度规的变换为

$$\delta_{\mathrm{E}}\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta_{\mathrm{E}}g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}, \tag{18.19}$$

将式 (18.18) 代入，这就给出

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\xi^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \left(\partial_\mu\xi^\lambda\right)g_{\lambda\nu} + \left(\partial_\nu\xi^\lambda\right)g_{\mu\lambda}\right]. \tag{18.20}$$

因此

$$\delta_{\mathrm{E}}\sqrt{-g}=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\sqrt{-g}+\sqrt{-g}+\partial_{\lambda}\xi^{\lambda}=\partial_{\lambda}\left(\xi^{\lambda}\sqrt{-g}\right) \tag{18.21}$$

且

$$\delta_{\mathrm{E}}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}D_{\lambda}\xi^{\lambda}=\int \mathrm{d}^4x\partial_{\lambda}\left(\xi^{\lambda}\sqrt{-g}\right). \tag{18.22}$$

这说明此平凡作用量 $\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}$ 确实有一个纯表面项的改变. 如要求 $\xi^{\lambda}(x)$ 在表面上为零，这就具有了一个完整的不变性.

如果 $\mathcal{L}$ 为满足 $\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x)$ 的标量拉格朗日密度，则上述结果对其相应的作用量是成立的. 对此拉格朗日密度，有

$$\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{L}(x)\equiv\mathcal{L}'(x)-\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}'(x')-\mathcal{L}(x')=\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(x')=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\mathcal{L}(x). \tag{18.23}$$

则 $\mathcal{A}$ 的变分为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}&=\delta_{\mathrm{E}}\int \mathrm{d}^4x\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}(x)\right)=\int \mathrm{d}^4x\left\{\left[\delta_{\mathrm{E}}\sqrt{-g}\right]\mathcal{L}(x)+\sqrt{-g}\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{L}(x)\right\}\\&=\int \mathrm{d}^4x\left\{\partial_{\lambda}\left[\xi^{\lambda}\sqrt{-g}\right]\mathcal{L}(x)+\sqrt{-g}\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\mathcal{L}(x)\right\}\\&=\int \mathrm{d}^4x\,\partial_{\lambda}\left(\xi^{\lambda}\sqrt{-g}\mathcal{L}(x)\right).\end{aligned} \tag{18.24}$$

现在，我们就可来推导与爱因斯坦不变性相关联的协变守恒律. 通过执行实质变分 $\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}$ 和 $\delta_{\mathrm{E}}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}$，我们再来计算 $\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}$：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}&=\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta\mathcal{A}}{\mathrm{d}h_{\alpha}{}^{\mu}}\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}+\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\delta A_{\mu\beta}{}^{\gamma}}\delta_{\mathrm{E}}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}\right)\\&=\int \mathrm{d}^4x\left(\sqrt{-g}\varTheta_{\mu}{}^{\alpha}\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\varSigma^{\beta}{}_{\gamma}{}^{,\mu}\delta_{\mathrm{E}}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}\right).\end{aligned} \tag{18.25}$$

标架场 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 和 $A_{\mu\beta}{}^{\gamma}$ 的实质变分为 [参看式 (11.73) 和式 (11.74)]

$$\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\alpha}{}^{\mu}-\partial_{\kappa}\xi^{\mu}h_{\alpha}{}^{\kappa},\quad \delta_{\mathrm{E}}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}A_{\lambda\beta}{}^{\gamma}. \tag{18.26}$$

将此代入式 (18.25)，我们得

$$\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\sqrt{-g}\varTheta_{\mu}{}^{\alpha}\left(\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\alpha}{}^{\mu}-\partial_{\kappa}\xi^{\mu}h_{\alpha}{}^{\kappa}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\varSigma_{\gamma}^{\beta,\mu}\left(\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}A_{\mu\beta}{}^{\gamma}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}A_{\lambda\beta}{}^{\gamma}\right)\right\}. \tag{18.27}$$

通过分部积分并令 ξ^{λ} 同一个 δ 函数一样除了某点 x 外在其他任何地方都为零，我们就得

$$\partial_\kappa\left(\sqrt{-g}\Theta_\lambda{}^\alpha h_\alpha{}^\kappa\right)+\sqrt{-g}\Theta_\mu{}^\alpha\partial_\lambda h_\alpha{}^\mu+\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}A_{\lambda\beta}{}^\gamma\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\partial_\lambda A_{\mu\beta}{}^\gamma=0. \tag{18.28}$$

式 (18.28) 第二行可重新写为

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\left(-\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\right)A_{\lambda\beta}{}^\gamma+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\left(\partial_\mu A_{\lambda\beta}{}^\gamma-\partial_\lambda A_{\mu\beta}{}^\gamma\right). \tag{18.29}$$

如果我们引入场 $A_{\lambda\beta}$ 的协变旋度

$$F_{\mu\lambda\beta}{}^\gamma\equiv\partial_\mu A_{\lambda\beta}{}^\gamma-\partial_\lambda A_{\mu\beta}{}^\gamma-\left[A_{\mu\beta}{}^\gamma A_{\lambda\delta}{}^\gamma-(\mu\leftrightarrow\lambda)\right], \tag{18.30}$$

我们就可将式 (18.29) 重新写为

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\right)A_{\lambda\beta}{}^\gamma+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}\left[A_{\mu\beta}{}^\delta A_{\lambda\delta}{}^\gamma-(\mu\leftrightarrow\lambda)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}F_{\mu\lambda\beta}{}^\gamma. \tag{18.31}$$

此式前三项可合并写为式 (15.42) 中所定义的协变导数 D^*_μ：

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}D^*_\mu\Sigma\ {}^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}A_{\lambda\beta}{}^\gamma, \tag{18.32}$$

其中，对 $A_{\alpha\beta}{}^\gamma=\overset{A}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 我们已经用到了式 (15.39) 和式 (17.75) 中的关系式. 利用式 (18.13) 中的守恒律，式 (18.31) 中的表达式 [这仍等于式 (18.28) 的第二行] 可约化为

$$-\sqrt{-g}\ \Theta_\gamma{}^\beta A_{\lambda\beta}{}^\gamma+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}F_{\mu\lambda\beta}{}^\gamma. \tag{18.33}$$

在式 (18.28) 的第一行中，我们可写为

$$\Theta_\mu{}^\alpha\partial_\lambda h_\alpha{}^\mu=\Theta_\mu{}^\alpha D^{\mathrm{L}}{}_\lambda h_\alpha{}^\mu+\Theta_\mu{}^\alpha A_{\lambda\alpha}{}^\beta h_\beta{}^\mu, \tag{18.34}$$

这样式 (18.28) 就变为

$$\partial_\kappa\left(\sqrt{-g}\Theta_\lambda{}^\kappa\right)+\sqrt{-g}\Theta_\mu{}^\alpha D^{\mathrm{L}}{}_\lambda h_\alpha{}^\mu-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}F_{\lambda\mu\beta}{}^\gamma=0. \tag{18.35}$$

该方程在局域洛伦兹变换下是协变的，但在爱因斯坦变换下的协变性目前还不明显. 为了证明后面这个协变性，我们观察到，根据等式 $D_\lambda h_\alpha{}^\mu=0$，$h$ 的导数 D^{L} 可重新写为

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{L}}{}_\lambda h_\alpha{}^\mu&=\partial_\lambda h_\alpha{}^\mu-A_{\lambda\alpha}{}^\beta h_\beta{}^\mu\\&=-\overset{h}{\Gamma}_{\lambda\kappa}{}^\mu h_\alpha{}^\kappa-\left(\Gamma_{\lambda\sigma}{}^\mu-\overset{h}{\Gamma}{}^\mu_{\lambda\sigma}\right)h_\alpha{}^\sigma=-\Gamma_{\lambda\sigma}{}^\mu h_\alpha{}^\sigma.\end{aligned} \tag{18.36}$$

因此，第二项为

$$-\sqrt{-g}\Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\mu}\Theta_{\mu}{}^{\sigma}. \tag{18.37}$$

我们现在可将第一项写为

$$\sqrt{-g}\left(D_{\kappa}^{*}\Theta_{\lambda}{}^{\kappa}+\Gamma_{\kappa\lambda}{}^{\tau}\Theta_{\tau}{}^{\kappa}\right), \tag{18.38}$$

于是就得到了能动张量的完全协变的守恒定律[1~3]

$$D_{\kappa}^{*}\Theta_{\lambda}{}^{\kappa}+2S_{\kappa\lambda}{}^{\tau}\Theta_{\tau}{}^{\kappa}-\frac{1}{2}\Sigma^{\beta}{}_{\gamma}{}^{,\mu}F_{\lambda\mu\beta}{}^{\gamma}=0. \tag{18.39}$$

18.3 守恒律的协变导数

其实，如果在一开始就花些功夫将式 (18.26)、式 (18.3) 和式 (18.4) 中关于 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 和 $A_{\mu\alpha}{}^{\beta}$ 的爱因斯坦变换和局域洛伦兹变换写成协变的形式的话，则对能量、动量及角动量的守恒定律的推导多少会更高效些. 来看 $\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}$. 它可重新写为

$$\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}h_{\alpha}{}^{\mu}+\Gamma_{\lambda\kappa}{}^{\mu}h_{\alpha}{}^{\lambda}\xi^{\kappa}-D_{\lambda}\xi^{\mu}h_{\alpha}{}^{\lambda}. \tag{18.40}$$

利用等式

$$\partial_{\lambda}h_{\alpha}{}^{\mu}=-\overset{h}{\Gamma}_{\lambda\nu}{}^{\mu}h_{\alpha}{}^{\nu}=A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\mu}-\Gamma_{\lambda\nu}{}^{\mu}h_{\alpha}{}^{\nu}, \tag{18.41}$$

我们可将式 (18.40) 重写为协变的形式

$$\delta_{\mathrm{E}}h_{\alpha}{}^{\mu}=-D_{\alpha}\xi^{\mu}+\left(A_{\lambda\alpha}{}^{\mu}+2S_{\lambda\alpha}{}^{\mu}\right)\xi^{\beta}. \tag{18.42}$$

相应的倒易标架场 $h^{\alpha}{}_{\mu}$ 的变换为

$$\delta_{\mathrm{E}}h^{\alpha}{}_{\mu}=D_{\mu}\xi^{\alpha}-\left(A_{\beta\mu}{}^{\alpha}-2S_{\beta\mu}{}^{\alpha}\right)\xi^{\beta}. \tag{18.43}$$

类似于此，我们发现

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}A_{\mu\alpha}{}^{\beta}&=\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}A_{\mu\alpha}{}^{\beta}+D_{\mu}\xi^{\lambda}A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}-\Gamma_{\mu\kappa}{}^{\lambda}A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}\xi^{\kappa}\\&=D_{\mu}\left(\xi^{\lambda}A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}\right)-\xi^{\lambda}\left(D_{\mu}A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}-\partial_{\lambda}A_{\mu\alpha}{}^{\beta}\right)-\Gamma_{\mu\kappa}{}^{\lambda}A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}\xi^{\kappa}\\&=D_{\mu}\left(\xi^{\lambda}A_{\lambda\alpha}{}^{\beta}\right)-\xi^{\lambda}F_{\mu\lambda\alpha}{}^{\beta}.\end{aligned} \tag{18.44}$$

在局域洛伦兹变换下，关于标架场的表达式已是可能的最简形式

$$\delta_{\mathrm{L}}h_{\alpha}{}^{\mu}=\omega_{\alpha}{}^{\beta}h_{\alpha}{}^{\mu}, \tag{18.45}$$

而对 $A_{\mu\alpha}{}^{\beta}$ 则还需要一个额外的标准的规范场的项

$$\delta_{\mathrm{L}}A_{\mu\alpha}{}^{\beta}=D_{\mu}\omega_{\alpha}{}^{\beta}. \tag{18.46}$$

利用这些协变的变换规则，作用量的变分 (18.6) 及式 (18.27) 就变为

$$\delta_{\mathrm{L}}\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{\Theta_\beta{}^\alpha\omega_\alpha{}^\beta h_\beta{}^\mu-\frac{1}{2}\Sigma^\alpha{}_\beta{}^{,\mu}D_\mu\omega_\alpha{}^\beta\right\}, \tag{18.47}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\{&\Theta_\mu{}^\alpha\left(-D_\lambda\xi^\mu h_\alpha{}^\lambda+(A_{\lambda\alpha}{}^\mu-2S_{\lambda\alpha}{}^\mu)\,\xi^\lambda\right)\\&-\frac{1}{2}\Sigma^\alpha{}_\beta{}^{,\mu}\left[D_\mu\left(\xi^\lambda A_{\lambda\alpha}{}^\beta\right)-\xi^\lambda F_{\mu\lambda\alpha}{}^\beta\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{18.48}$$

对式 (18.47) 作分部积分 [利用式 (15.37) 和式 (15.41)] 就直接给出了式 (18.13) 中自旋流的散度. 而对式 (18.48) 作分部积分则给出

$$D^*_\lambda\Theta_\mu{}^\lambda+\left(A_{\mu\alpha}{}^\beta-2S_{\mu\alpha}{}^\beta\right)\Theta_\beta{}^\alpha+\frac{1}{2}D^*_\nu\Sigma^\alpha{}_\beta+\frac{1}{2}\Sigma^\alpha{}_\beta{}^{,\nu}F_{\nu\mu\alpha}{}^\beta=0, \tag{18.49}$$

当插入式 (18.13) 后，此式就正确地给出了式 (18.39) 中正则能动张量的协变守恒定律.

18.4　具有整数自旋的物质

如果物质场只携带整数自旋的话，我们并不需要引入 $h^\alpha{}_\mu$ 和 $A_{\mu\alpha}{}^\beta$ 场. 这样，该理论就可以只用指标 μ 以爱因斯坦不变的方式来表达. 现在，我们就此情形来推导相应的角动量守恒律. 相应的作用量可看作 $g_{\mu\nu}$ 和 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 的泛函，这些变量是通过仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda=\bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda+K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 进入该作用量的. 爱因斯坦不变性表明，如果满足欧拉 - 拉格朗日方程的话，则以下对称变分须为零：

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}&=\int \mathrm{d}^4x\left(\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{S_{\mu\nu}{}^\lambda}\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}+\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta K_{\mu\nu}{}^\lambda}\right|_{g_{\mu\nu}}\delta_{\mathrm{E}}K_{\mu\nu}{}^\lambda\right)\\&=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\{T^{\mu\nu}\left(\xi^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\mu\xi^\lambda g_{\lambda\nu}+\partial_\nu\xi^\lambda g_{\mu\lambda}\right)\\&\quad+\Sigma^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}\left(\xi^\lambda\partial_\lambda K_{\mu\nu}{}^\kappa+\partial_\mu\xi^\lambda K_{\lambda\nu}{}^\kappa+\partial_\nu\xi^\lambda K_{\mu\lambda}{}^\kappa-\partial_\lambda\xi^\kappa K_{\mu\nu}{}^\lambda\right)\}.\end{aligned} \tag{18.50}$$

这里我们已经用到了式 (15.16) 和式 (15.18) 中能动张量和流密度的定义，且已将式 (11.76) 和式 (11.109) 中关于 $g_{\mu\nu}$ 和 $S_{\mu\nu}{}^\lambda$ 的无穷小变换律 (后者对 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$ 同样适用) 代入. 我们在这里已省略了上标 m，因为如果采用式 (15.17) 和式 (15.19) 中的定义的话，本节中的方程同样适用于引力场作用量 $\mathcal{A}$. 后续的计算可通过定义如下对称化的正则能动张量加以简化：

$$\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda=\mathrm{const.}}\equiv-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\Theta_{\mu\nu}+\Theta_{\nu\mu}\right). \tag{18.51}$$

很容易可以看出，如果没有自旋 $-\frac{1}{2}$ 的场，此定义与式 (17.143) 中的是一样的. 这可通过固定 $A_{\mu\alpha}{}^{\beta}$ 并将 $\mathcal{A}$ 对 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 求导同时将指标 α 转换为 ν 来加以证明. 这也可通过以下操作加以证明：

$$\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\right|_{S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\text{const.}}=\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\right|_{\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\text{const.}}+\int\mathrm{d}y\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Gamma_{\sigma\tau}{}^{\lambda}(x)}\right|_{g_{\mu\nu}=\text{const.}}\left.\frac{\delta\Gamma_{\sigma\tau}{}^{\lambda}(y)}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\right|_{S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\text{const.}}, \tag{18.52}$$

这样我们就得到了式 (17.156) 中 $T_{\mu\nu}$ 和 $\Theta_{\mu\nu}$ 之间的标准的 Belinfante 关系式，而现在则是通过对有挠弯曲时空的几何考量而推导出的：

$$T^{\mu\nu}=\Theta^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial_{\lambda}(\Sigma^{\mu\nu,\lambda}-\Sigma^{\nu\lambda,\mu}+\Sigma^{\lambda\mu,\nu}). \tag{18.53}$$

对于纯引力，式 (18.51) 同式 (17.147) 是一致的，这表明 $\Theta_{\mu\nu}$ 就是爱因斯坦张量 [参看式 (17.147)]，最多差一个因子 ($-\kappa$)：

$$-\kappa\Theta_{\mu\nu}=G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

这点可从式 (15.30) 中看出. 式 (17.156) 中的 Belinfante 关系式则再次同式 (15.60) 相一致.

这样，我们就可以通过利用 Θ 和 Σ 并考虑如下变分而不是式 (18.50) 来评判爱因斯坦不变性的结果：

$$\begin{aligned}0=\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}&=\int\mathrm{d}^4x\left\{\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}}\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}+\left.\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}}\right|_{g_{\mu\nu}}\delta_{\mathrm{E}}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}\right\}\\&=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{\Theta^{\mu\nu}\left(\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}g_{\lambda\nu}+\partial_{\nu}\xi^{\lambda}g_{\mu\lambda}\right)\right.\\&\quad\left.-\Sigma^{\nu}{}_{\kappa}{}^{,\mu}\left(\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa}+\partial_{\mu}\xi^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}{}^{\kappa}+\partial_{\nu}\xi^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\kappa}-\partial_{\lambda}\xi^{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}+\partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\kappa}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{18.54}$$

当然，将变分 $\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}$ 和 $\delta_{\mathrm{E}}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 写为协变的形式会比较有帮助. 我们将度规的爱因斯坦变分重写为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}&=\bar{D}_{\mu}\xi_{\nu}+\bar{D}_{\nu}\xi_{\mu}=D_{\mu}\xi_{\nu}+D_{\nu}\xi_{\mu}+\left[K_{\mu\nu}{}^{\lambda}+(\mu\leftrightarrow\nu)\right]\xi_{\lambda}\\&=D_{\mu}\xi_{\nu}+D_{\nu}\xi_{\mu}+2\left[S_{\lambda\mu\nu}+(\mu\leftrightarrow\nu)\right]\xi^{\lambda},\end{aligned} \tag{18.55}$$

而将联络的变分写为

$$\delta_{\mathrm{E}}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\kappa}=D_{\mu}D_{\nu}\xi^{\kappa}-2D_{\mu}\left(S_{\nu\lambda}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}\right)+R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}. \tag{18.56}$$

将此代入式 (18.52) 就给出

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}=&\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{(\Theta^{\nu\mu}+\Theta^{\mu\nu})\left(D_\nu\xi_\mu+2S_{\lambda\mu\nu}\right)\xi^\lambda\right.\\&\left.+\Sigma^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}\left[D_\mu D_\nu\xi^\kappa-2D_\mu\left(S_{\nu\lambda}{}^\kappa\xi^\lambda\right)+R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa\xi^\lambda\right]\right\}.\end{aligned}\tag{18.57}$$

通过对 Σ 项进行分部积分，并利用式 (18.13) 中的自旋散度关系，我们立刻就可得到

$$\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}=2\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{-D_\mu\Theta_\lambda{}^\mu-2S_{\mu\lambda}{}^\nu\Theta_\nu{}^\mu+\frac{1}{2}\Sigma^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa\right\}\xi^\lambda,\tag{18.58}$$

而这将直接导致如下协变的守恒定律：

$$D_\mu^*\Theta_\lambda{}^\mu+2S_{\mu\lambda}{}^\nu\Theta_\nu{}^\mu-\frac{1}{2}\Sigma^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=0.\tag{18.59}$$

基于式 (17.81)，最后一项 $\Sigma^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa$ 可重新写为 $\Sigma^\beta{}_\gamma{}^{,\mu}F_{\lambda\mu\beta}$，于是我们就看到式 (18.59) 同式 (18.39) 是相一致的.

式 (18.13) 和式 (18.59) 中的协变守恒律对总正则能动张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 及总自旋流密度 $\Sigma^{\mu\nu,\lambda}$ 成立. 值得注意的是，对于引力场本身的自旋流密度和能动张量，同样可以得到上述方程. 为了证明这一点，我们必须将上述推导过程单独加于引力场作用量 $\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}$ 之上. 而其结果可通过将式 (18.13) 和式 (18.59) 中的能动张量及自旋流密度分别替换为爱因斯坦张量 $G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-g^{\mu\nu}R$ 和 Palatini 张量 $(1/2)S^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}=S^\nu{}_\kappa{}^\mu+g^{\nu\mu}S_\kappa-\delta_\kappa{}^\mu S^\nu$ 来直接写出. 相应的方程为 (15.57) 和 (17.147). 这就将式 (18.13) 和式 (18.59) 中的协变守恒律变为

$$\frac{1}{2}D_\mu^*S^{\lambda\kappa,\mu}=G^{[\lambda,\kappa]},\tag{18.60}$$

$$D_\mu^*G_\lambda{}^\mu+2S_{\nu\lambda}{}^\kappa G_\kappa{}^\nu-\frac{1}{2}S^\nu{}_\kappa{}^{,\mu}R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=0\,.\tag{18.61}$$

18.5 守恒律与比安基恒等式的关系

事实上，引力场本身的这两个协变守恒定律 (18.60) 和 (18.61) 不论是否存在物质都是自动成立的. 它们其实分别是基本恒等式 (12.103) 和比安基恒等 (12.115) 的结果. 为了看清这点，我们将式 (15.42) 中的协变导数作用于 Palatini 张量 (15.48) 上，于是得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}D_\lambda^*S_{\nu\mu}{}^{,\lambda}&=D_\lambda^*(S_{\nu\mu}{}^\lambda+S_\nu{}^\lambda S_\mu-S_\mu{}^\lambda S_\nu)\\&=D_\lambda S_{\nu\mu}{}^\lambda+D_\nu S_\mu-D_\mu S_\nu\\&=D_\lambda S_{\nu\mu}{}^\lambda+D_\nu S_\mu-D_\mu S_\nu+2S_\lambda S_{\nu\mu}{}^\lambda.\end{aligned}\tag{18.62}$$

现在，取式 (12.103)，并将下标 ν 同上标 κ 缩并就得

$$\begin{aligned}R_{\mu\lambda}-R_{\lambda\mu}&=2\left(D_\kappa S_{\mu\lambda}{}^\kappa+D_\mu S_{\lambda\kappa}{}^\kappa+D_\lambda S_{\kappa\mu}{}^\kappa\right)-4\left(S_{\kappa\mu}{}^\rho S_{\lambda\rho}{}^\kappa+S_{\mu\lambda}{}^\rho S_{\kappa\rho}{}^\kappa+S_{\lambda\kappa}{}^\rho S^\kappa_{\mu\rho}\right)\\&=2\left(D_\kappa S_{\mu\lambda}{}^\kappa+D_\mu S_\lambda-D_\lambda S_\mu\right)+4S_\rho S_{\mu\lambda}{}^\rho=D^*_\lambda S_{\nu\mu}{}^{,\lambda}.\end{aligned}\tag{18.63}$$

由于 $R_{\mu\lambda}$ 同 $G_{\mu\lambda}$ 只相差一个对称张量 $g_{\mu\lambda}/2$，因此该方程对 $G_{\mu\lambda}-G_{\lambda\mu}$ 同样成立，于是我们就得到了守恒律 (18.60) 的引力场形式：

$$D^*_\lambda S_{\nu\mu}{}^{,\lambda}=G_{\nu\mu}-G_{\mu\nu},\tag{18.64}$$

这与式 (18.60) 是相吻合的.

类似地，利用式 (12.115) 并进行指标轮换，我们就得

$$D_\tau R_{\sigma\nu\mu}{}^\tau+D_\sigma R_{\nu\tau\mu}{}^\tau+D_\nu R_{\tau\sigma\mu}{}^\tau=2S_{\tau\sigma}{}^\lambda R_{\nu\lambda\mu}{}^\tau+2S_{\sigma\nu}{}^\lambda R_{\tau\lambda\mu}{}^\tau+2S_{\nu\tau}{}^\lambda R_{\sigma\lambda\mu}{}^\tau.\tag{18.65}$$

将 ν 同 μ 缩并，这就变成

$$\begin{aligned}2D_\tau R_\sigma{}^\tau-D_\sigma R=2D_\tau\,G_\sigma{}^\tau&=-2S_{\tau\sigma}{}^\lambda+2S_\sigma{}^{\mu\lambda}R_{\lambda\mu}+2S^\mu{}_\tau{}^\lambda R_{\sigma\lambda\mu}{}^\tau\\&=-4S_{\tau\sigma}{}^\lambda R_\lambda{}^\tau+2S^\mu{}_\tau{}^\lambda R_{\sigma\lambda\mu}{}^\tau\end{aligned}\tag{18.66}$$

或

$$D^*_\mu\,G_\sigma{}^\mu-2S_\mu\left(R_\lambda{}^\mu-\frac{1}{2}\delta_\lambda{}^\mu R\right)+S_{\tau\sigma}{}^\lambda\left(G_\lambda{}^\tau+\frac{1}{2}\delta_\lambda{}^\tau R\right)-S^\mu{}_\tau{}^\lambda R_{\sigma\lambda\mu}{}^\tau=0,\tag{18.67}$$

这同式 (18.61) 是一致的.

在曲率和挠率的缺陷描述中，我们之前看到，基本的恒等关系是缺陷密度守恒律的非线性推广. 从那里我们知道，同样的方程可作为能动张量守恒律及角动量守恒律从爱因斯坦作用量中得到.

这两个定律分别得自于爱因斯坦作用量在一般坐标变换 (此为局域变换) 及局域洛伦兹变换下的不变性.

这些变换对应于宇宙晶体的弹性形变 (平动或转动)，而作用量的不变性则反映了弹性形变不会改变缺陷结果这一事实.

值得注意的是，由于守恒律和引力场基本恒等式之间的密切关系，它们对于存在任意物质分布的情形亦然成立. 因此，利用场方程 (17.136) 和 (17.157)，物质场的自旋密度及能动张量本身也必须满足同样的散度关系. 其实，很容易看出，这是任意但固定的仿射空间 (即该空间的几何由外部条件确定而不是由内部的物质场通过场方程来决定) 中物质作用量的爱因斯坦不变性的一个直接结果.

18.6　由能动守恒而得粒子轨迹

点粒子的经典运动方程的一个结果就是式 (15.25) 中的能动张量 $\overset{\mathrm{m}}{T}_{\lambda}{}^{\mu}=0$ 必须独自满足式 (18.39) 中的协变守恒律，否则爱因斯坦方程 (18.51) 将不成立. 由于引力场和物质场的对称能动张量 $\overset{\mathrm{f}}{T}_{\lambda}{}^{\mu}=0$ 和 $\overset{\mathrm{m}}{T}_{\lambda}{}^{\mu}=0$ 相互成正比关系，因此它们必须分别都满足协变守恒律.

首先来考虑无挠空间中的一个不带自旋的粒子. 我们的出发点是式 (18.39) 中的协变守恒定律，现在它写为

$$\bar{D}_{\kappa}\overset{\mathrm{m}}{T}_{\lambda}{}^{\kappa}(x)=0. \tag{18.68}$$

将协变导数用黎曼联络表示后，再进一步利用下列关系式：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\sqrt{-g}=\frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\partial_{\nu}g_{\lambda\kappa}=\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\lambda}, \tag{18.69}$$

方程 (18.68) 就可写为

$$\partial_{\nu}[\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}(x)]+\sqrt{-g}\,\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\mu}(x)\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\lambda\nu}(x)=0, \tag{18.70}$$

它对于具有轨迹 (15.25) 的点粒子的能动张量必定成立. 将那里的相应的张量代入式 (18.70) 就给出

$$m\int\mathrm{d}\tau\,[\dot{x}^{\mu}(\tau)\dot{x}^{\nu}(\tau)\partial_{\nu}\delta^{(4)}(x-x(\tau))+\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\mu}(x)\dot{x}^{\nu}(\tau)\dot{x}^{\lambda}(\tau)\,\delta^{(4)}(x-x(\tau))]=0. \tag{18.71}$$

被积函数中的第一项也可写为 $-\dot{x}^{\mu}(\tau)\partial_{\tau}\delta^{(4)}(x-x(\tau))$，因此，对此作分部积分将给出

$$m\int\mathrm{d}\tau\,[\ddot{x}^{\mu}(\tau)+\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\mu}(x)\dot{x}^{\nu}(\tau)\dot{x}^{\lambda}(\tau)]\,\delta^{(4)}(x-x(\tau))=0. \tag{18.72}$$

将此在包围路径 $x^{\mu}(\tau)$ 的一个细管上进行积分，我们就得到了式 (11.24) 中关于测地路径的方程[4].

我们也可通过以下考虑来得到同样的结果. 根据式 (18.58)，黎曼空间中爱因斯坦坐标变换 $\delta_{\mathrm{E}}x^{\mu}=-\xi^{\mu}$ 下的作用量的变分为

$$\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}=-2\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bar{D}_{\mu}T_{\lambda}{}^{\mu}\,\xi^{\lambda}. \tag{18.73}$$

基于爱因斯坦方程 (15.64)，这分别对于场和物质的部分都成立. 如果物质部分只包含有点粒子，我们就得

$$\delta_{\mathrm{E}}\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}=-\int\mathrm{d}\tau\frac{\delta\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta x^{\mu}(\tau)}\xi^{\mu}(x(\tau)). \tag{18.74}$$

这个量沿着测地路径是为零的，表明此能动张量是协变守恒的.

现在，我们在弯曲时空中加入挠率，这样，式 (18.68) 中的协变守恒律就变为式 (18.59)

$$D_\mu^* \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_\lambda{}^\mu + 2S_{\mu\lambda}{}^\nu \overset{\mathrm{m}}{\Theta}_\nu{}^\mu - \frac{1}{2} \overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^\nu{}_\kappa{}^{,\mu} R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa = 0. \tag{18.75}$$

利用式 (18.53) 中的 Belinfante 关系式以及式 (15.42) 中所定义的 D_μ^*，对于 $\Sigma^\nu{}_\kappa{}^{,\mu} = 0$ 的标量粒子，我们就得

$$\bar{D}_\mu \overset{\mathrm{m}}{T}_\lambda{}^\mu = 0\,. \tag{18.76}$$

这同黎曼空间中的守恒定律 (18.68) 是一致的，这再次给出了测地轨迹 (11.24).

我们如何才能消除同式 (14.7) 中通过多值映射手续所得到的自平行轨迹间的差异？对此问题的回答，我们其实在之前第 16.1 节末尾提到过，并且将在第 20.3.1 节中详加讨论.

文献与注记

[1] R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[2] T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).

[3] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989, pp. 744-1443 (`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b2`).

[4] F.W. Hehl, Phys. Lett. A **36**, 225 (1971).

第 19 章　自旋物质引力的规范理论

Gravitation cannot be held responsible
for people falling in love.
ALBERT EINSTEIN (1879~1955)

读者很可能已经注意到，对于自旋物质，当用式 (17.78) 和式 (18.30) 中引入的 $h_\alpha{}^\mu$ 和 $A_{\mu\alpha}{}^\mu$ 来描述的话，其引力理论就是一个局域洛伦兹变换的规范理论. 其规范特性在之前其实就已经很明显了，在式 (11.104) 我们就看到联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ 在一般坐标变换下的变换行为就同一个非阿贝尔规范场是一样的. 但在当时我们无法真正地去讨论规范理论，因为联络 $\mathit{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda$ 并不是系统的独立场量. 当引入自旋粒子后，标架场 $h_\alpha{}^\mu(x)$ 取代了度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 而作为基本场，而前者在平移变换下的变换行为就如同一个规范场. 而另外，由于弯曲时空的狄拉克理论中的协变导数含有式 (17.79) 中的自旋联络 $A_{\alpha\beta}{}^\gamma$，因此它的的确确是一个局域爱因斯坦和洛伦兹变换的规范理论. 如我们在第 20.2 节中所讨论过的，这甚至在不含挠率的情形下，即在式 (17.71) 中的表达式中不含扭曲张量 $K_{\mu\nu}{}^\lambda$，也即它只包含式 (17.73) 中的非完整量的情形下，也是成立的. 后者足以补偿由局域洛伦兹变换而导致的非张量梯度项. 挠率存在所带来的唯一的一个特性就是使得自旋联络 $A_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 变成 $h_\alpha{}^\mu$ 之外的另一个**独立的**规范场. 现在，我们就来仔细研究这一规范理论.

19.1　局域洛伦兹变换

我们知道，在无穷小洛伦兹变换下，矢量场的变换为 [参看式 (17.107)]

$$\delta_{\mathrm{L}} v_\alpha(x) = \omega_\alpha{}^\beta v_\beta(x), \quad \delta_{\mathrm{L}} v^\alpha(x) = \omega^\alpha{}_\beta v^\beta(x), \tag{19.1}$$

其中，物理坐标 x^μ 保持不变，因为只是对局域方向作了变换. 由于矩阵 $\omega_{\alpha\beta}$ 是反对称的，我们还可以写为

$$\delta_{\mathrm{L}} v_\alpha(x) = -v_\beta(x)\omega^\beta{}_\alpha, \quad \delta_{\mathrm{L}} v^\alpha(x) = -v^\beta(x)\omega_\beta{}^\alpha. \tag{19.2}$$

对于自旋联络，它的变换规则由式 (17.114) 给出. 利用式 (17.19) 中的记法，可写为

$$\delta_{\mathrm{L}} A_{\alpha\beta}{}^\gamma = \omega_\beta{}^{\beta'} A_{\alpha\beta'}{}^\gamma + \omega_\alpha{}^{\alpha'} A_{\alpha'\beta'}{}^\gamma + \omega^\gamma{}_{\gamma'} A_{\alpha\beta}{}^{\gamma'} + \partial_\alpha \omega_\beta{}^\gamma, \tag{19.3}$$

$$\delta_{\mathrm{L}} A_{\mu\beta}{}^{\gamma} = \omega_{\beta}{}^{\beta'} A_{\mu\beta'}{}^{\gamma} + \omega^{\gamma}{}_{\gamma'} A_{\mu\beta}{}^{\gamma'} + \partial_{\mu}\omega_{\beta}{}^{\gamma}. \tag{19.4}$$

由于时空变量 x^{μ} 是不变的，因此该洛伦兹群的行为就像是一个内部对称群. 不过，这同第一部分的第 3.5 节中所讨论的外部规范对称性一定是相类似的. 这是因为 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 将洛伦兹指标和爱因斯坦指标耦合了起来，就同式 (3.135) 中一样，这导致了更多的不变性. 例如，我们不再必须用 $(F_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta})^2$ 来构造不变的作用量，事实上还存在一个场强的不变的线性表示式

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-g}\, h^{\alpha\mu} h_{\beta}{}^{\nu} F_{\nu\mu\alpha}{}^{\beta}. \tag{19.5}$$

其实，从式 (17.80) 我们看到这正是式 (15.8) 中的爱因斯坦–嘉当作用量.

为完整起见，我们来再一次说明，对独立的场 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 和 $A_{\mu\alpha}{}^{\beta}$，而不是对第 17.7 节中的 $h_{\alpha}{}^{\mu}$ 和 $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$，我们将如何从该作用量中得到相应的能动张量和自旋流.

首先，我们计算场的自旋流，这个是由对规范场 $A_{\mu}{}^{\alpha\beta}(x)$ 作泛函导数而定义的 [同式 (17.131) 和式 (17.137) 进行对照]：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \overset{\mathrm{f}}{\Sigma}_{\alpha\beta}{}^{,\mu}(x) &= -\frac{\delta\, \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta A_{\mu}{}^{\alpha\beta}(x)} \\
&= \frac{1}{2\kappa}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}{}^{\alpha\beta}(x)}\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-g}\, h^{\alpha'\mu'} h_{\beta'}{}^{\nu'} \\
&\quad \left(\partial_{\nu'} A_{\mu'\alpha'}{}^{\beta'} - \partial_{\mu'} A_{\nu'\alpha'}{}^{\beta'} - A_{\nu'\alpha'}{}^{\gamma} A_{\mu'\gamma}{}^{\beta'} + A_{\mu'\alpha'}{}^{\gamma} A_{\nu'\gamma}{}^{\beta'}\right) \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\Big\{\partial_{\nu}\sqrt{-g}[h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} - (\alpha\leftrightarrow\beta)] + \sqrt{-g} \\
&\quad \left[(A_{\nu\alpha'\alpha} h^{\alpha'\mu} h_{\beta}{}^{\nu} + A_{\nu\beta'\beta} h_{\alpha}{}^{\mu} h^{\beta'\nu}) - (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]\Big\}.
\end{aligned} \tag{19.6}$$

我们可将此用式 (18.10) 和式 (18.11) 中的部分协变导数写为

$$-\kappa\ \overset{\mathrm{f}}{\Sigma}_{\alpha\beta}{}^{,\mu} = \overset{L}{D}_{\nu}\left[h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} - (\alpha\leftrightarrow\beta)\right] + \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\sigma}\left[h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} - (\alpha\leftrightarrow\beta)\right]. \tag{19.7}$$

利用微分的链式法则，上式变为

$$-\kappa\ \overset{\mathrm{f}}{\Sigma}_{\alpha\beta}{}^{,\mu} = \left(\overset{L}{D}_{\beta}\, h_{\alpha}{}^{\mu} - h_{\alpha}{}^{\mu}\ \overset{L}{D}_{\nu}\, h_{\beta}{}^{\nu} + h_{\alpha}{}^{\mu}\Gamma_{\beta\sigma}{}^{\sigma}\right) - (\alpha\leftrightarrow\beta). \tag{19.8}$$

我们现在看到，由于恒等式 $D_{\mu} h_{\alpha}{}^{\nu} \equiv 0$，联络可写为

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = h^{\alpha\lambda}\ \overset{L}{D}_{\mu}\, h_{\alpha\nu} = -h^{\alpha}{}_{\nu}\ \overset{L}{D}_{\mu}\, h_{\alpha}{}^{\lambda}. \tag{19.9}$$

此关系式同式 (17.149) 中的关系 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\mu\beta}{}^{\gamma} = h^{\gamma}{}_{\nu}\ \overset{\Gamma}{D}_{\mu}\, h_{\beta}{}^{\nu}$ 形成互补. 利用式 (19.9)，场的自旋流变为

$$-\kappa\ \overset{\mathrm{f}}{\Sigma}_{\alpha\beta}{}^{,\mu} = 2\left(S_{\alpha\beta}{}^{\mu} + h_{\alpha}{}^{\mu} S_{\beta} - h_{\beta}{}^{\mu} S_{\alpha}\right) = S_{\alpha\beta}{}^{\mu}, \tag{19.10}$$

这同式 (15.48) 和式 (15.57) 是一致的.

现在，我们来计算作用量对 $h_\alpha{}^\mu$ 的变分 [请同式 (17.141) 和式 (17.147) 进行比较]. 结果直接显示，引力场的正则能动张量与爱因斯坦张量是一致的：

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,\Theta_\mu{}^\alpha &= \frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta h_\alpha{}^\mu} = \sqrt{-g}\left(h^{\delta\nu}F_{\mu\nu\delta}{}^\alpha - h^\beta{}_\mu F_{\beta\delta}{}^{\delta\alpha}\right) = h^{\alpha\nu}\sqrt{-g}\,(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R)\\ &= \sqrt{-g}\,G_\mu{}^\alpha.\end{aligned} \tag{19.11}$$

标架场 $h_\alpha{}^\mu$ 的运用使得不通过将对称部分投影掉就可以得到爱因斯坦张量，这同之前的式 (15.30) 和式 (18.51) 的情形一样.

19.2 局域平移变换

现在我们来说明标架场所扮演的角色就是**局域平移变换的规范场**. 在式 (11.60) 中，我们已将爱因斯坦变换 $x \to x'(x)$ 写为局域平移变换的形式

$$x' = x - \xi(x). \tag{19.12}$$

标架场就保证了理论在此变换下是不变的. 事实上，协变导数

$$D_\alpha \equiv h_\alpha{}^\mu \partial_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2} A_{\alpha\beta}{}^\gamma \Sigma^\beta{}_\gamma \tag{19.13}$$

可看作 $h_\alpha{}^\mu$ 同平移“泛函矩阵” ∂_μ 的乘积和 $\mathrm{i}A_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 同洛伦兹矩阵 $(1/2)\Sigma^\beta{}_\gamma$ 乘积的组合. 这一观点其实在式 (17.88) 中的表达式，即下面这个位错坐标系下两个协变导数的对易式中看的最清楚：

$$[D_\alpha, D_\beta]\,\psi \;=\; \mathrm{i}F_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta\,\tfrac{1}{2}\Sigma^\gamma{}_\delta\psi + \mathrm{i}2S_{\alpha\beta}{}^\gamma\,\mathrm{i}D_\gamma\psi. \tag{19.14}$$

由于因子 $F_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ 为由 $\frac{1}{2}\Sigma^\gamma{}_\delta$ 生成的洛伦兹变换的规范场的旋度，以此类推，平移变换生成元 $\mathrm{i}D_\gamma\psi$ 前的因子 $2S_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 也可看作相应的平移变换规范场的旋度. 确实，如果我们将 $2S_{\alpha\beta}{}^\gamma$ 写为如下形式：

$$\begin{aligned}2S_{\alpha\beta}{}^\gamma &= -h^\gamma{}_\nu\left[h_\alpha{}^\mu \overset{L}{D}_\mu\, h_\beta{}^\nu - (\alpha \leftrightarrow \beta)\right]\\ &= h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu\left[\overset{L}{D}_\mu\, h^\gamma{}_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)\right],\end{aligned} \tag{19.15}$$

我们就得到一个标准的旋度形式，并且此时自旋物质的引力理论的确是局域洛伦兹变换和局域平移变换的规范理论.

如果空间无挠，则 $A_{\mu\alpha}{}^\beta$ 完全由标架场的导数组合而成 [参看式 (17.68)]

$$A_{\alpha\beta}{}^\gamma = -h^\gamma{}_\lambda h_\alpha{}^\mu h_\beta{}^\nu\ \overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda. \tag{19.16}$$

将此代入式 (19.15) 我们就可证明这就等同于挠率为零.

近些年，随着侧重点由几何转向规范场，引力理论在此方面的研究受到了越来越多的关注.

文献与注记

关于引力的规范特性可参看下列文献：

D.W. Sciama, *The Physical Structure of General Relativity*, in Recent Developments in General Relativity, Festschrift for Infeld, Pergamon Press, Oxford, 1962, p. 463; Rev. Mod. Phys. **36**, 463, 1103 (1964);

T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961);

R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956);

F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick, and J.M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976);

H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore, 1989 (http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b1/contents2.html).

第 20 章　引力中挠率的隐失特性

To be, or not to be: that is the question

William Shakespeare (1564~1616)

挠率究竟给我们带来了什么新的物理呢？如果场的作用量是式 (19.5) 中的爱因斯坦–嘉当类型的话，则它所产生的结果实际上是不可见的. 这种状况无法通过在拉格朗日密度中加入曲率的高幂次项来加以改善，就像作用量 (15.12) 中的项一样，不过是把黎曼的 $\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 换成黎曼–嘉当的 $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$. 即便增加额外的挠率张量 $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的幂次项也于事无补，而包含协变微商 $D_\kappa S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的不同的平方项或是挠率张量和曲率张量的混合项也不行. 起主导作用的始终是式 (15.11) 中的爱因斯坦–嘉当作用量，这就给出了式 (17.138) 中的场方程，而且可通过下式确定挠率张量：

$$S_{\mu\nu\lambda} = \frac{\kappa}{2}\left(\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\mu\nu,\lambda} + \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\mu\kappa}{}^{,\kappa} - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\mu\kappa}{}^{,\kappa}\right). \tag{20.1}$$

这是一个局域方程. 挠率只局限与粒子的自旋上，并且在真空中的扩展不会超过普朗克长度 (参看式 (12.42)) 的范围. 如果将粒子量子化，则它们的自旋将会在与它们质量相应的康普顿波长 $\lambda_{\mathrm{C}} = \hbar/mc$ 的范围内延展开，这样就扩展了挠率非零的区域，不过它仍然是同物质捆绑在一起的.

而对于无质量的场如光子场，原则上来讲情况会有所不同，因为我们观测到磁场可以在时空中延伸很远. 但正如我们在第 16.2 节末尾所讨论过的，光子必须认为同引力是最小耦合的，也即它与挠率是不耦合的，这样就保证了电磁规范不变性.

接下来我们来讨论一些更物理的结果.

20.1　源于挠率的局域 4 费米子相互作用

对狄拉克场，挠率有一个非平凡的效应. 在该场中，从式 (17.133) 和式 (1.227)，我们知道物质的自旋密度为

$$\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma} = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\bar{\psi}[\gamma_\gamma, \Sigma_{\alpha\beta}]_+\psi, \tag{20.2}$$

其中，$\Sigma_{\alpha\beta} = (\mathrm{i}/4)[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$. 此自旋密度可以更具体地写为

$$\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma}= \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_{[\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\gamma]}\psi = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}\bar{\psi}\gamma^{\lambda}\gamma_5\psi, \tag{20.3}$$

其中，$\gamma_5 \equiv (1/4!)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\gamma}\gamma^{\delta}$，式中下指标中的括号表示对它们作全反对称化. 由于此全反对称性，Palatini 张量除以 2、挠率张量以及扭曲张量都等于 $(\kappa/2)\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma}$：

$$\frac{1}{2}S_{\alpha\beta,\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma} = K_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\kappa}{2}\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma}\ . \tag{20.4}$$

在方程 (11.146) 中，我们已将曲率张量用黎曼曲率张量和扭曲张量表示了出来. 经过两次缩并，这就可给出标曲率的相应的分解式

$$R = \bar{R} + \bar{D}_{\mu}K_{\nu}{}^{\nu\mu} - \bar{D}_{\nu}K_{\mu}{}^{\nu\mu} + (K_{\mu}{}^{\mu\rho}K_{\nu\rho}{}^{\nu} - K_{\nu}{}^{\mu\rho}K_{\mu\rho}{}^{\nu})\,. \tag{20.5}$$

在引力爱因斯坦–嘉当作用量 (15.11) 中，我们在整个宇宙的不变空间上对 R 进行积分. 在此过程中，$\bar{D}_{\mu}K_{\nu}{}^{\nu\mu}$ 和 $\bar{D}_{\nu}K_{\mu}{}^{\nu\mu}$ 项将只给出无关紧要的表面项，而这是可以略掉的. 于是，作用量就可分解为一个希尔伯特–爱因斯坦作用量

$$\overset{\text{f}}{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bar{R}, \tag{20.6}$$

加一个挠率场作用量

$$\overset{\text{f}}{\mathcal{A}}{}^{S} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\overset{\text{f}}{\mathcal{L}}{}^{S}, \tag{20.7}$$

其中的拉格朗日密度为

$$\overset{\text{f}}{\mathcal{L}}{}^{S} = -\frac{1}{2\kappa}\left(K_{\mu}{}^{\mu\rho}K_{\rho}{}^{\nu} - K_{\nu}{}^{\mu\rho}K_{\mu\rho}{}^{\nu}\right). \tag{20.8}$$

该拉格朗日密度可重新写为

$$\overset{\text{f}}{\mathcal{L}}{}^{S} = \frac{1}{2\kappa}S_{\mu\nu,\lambda}K^{\lambda\nu\mu}, \tag{20.9}$$

其中，$S_{\mu\nu,\lambda}$ 为式 (15.49) 中的 Palatini 张量. 为了进行交叉验证，依照式 (15.19) 和式 (15.57)，我们将它对 $K^{\lambda\nu\mu}$ 作微分，得

$$\frac{\partial\,\overset{\text{f}}{\mathcal{L}}{}^{S}}{\partial K^{\lambda\nu\mu}} = \frac{1}{2\kappa}S_{\mu\nu,\lambda}. \tag{20.10}$$

从狄拉克作用量 (17.18) 我们可导出物质和挠率之间的相互作用密度

$$\overset{\text{m}}{\mathcal{L}}{}^{S} = \frac{1}{2}\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\mu\nu,\lambda}K^{\lambda\nu}. \tag{20.11}$$

将此加到式 (20.9) 中并对该合并后的拉格朗日密度 $\mathcal{L}=\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}{}^{S}+\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{L}}{}^{S}$ 取极值，我们就再次得到了式 (20.4). 再将所得代回到总的拉格朗日密度中，就给出了极值处的有效挠率拉格朗日：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{eff}}=\frac{\kappa}{4}\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\mu\nu\lambda}K^{\lambda\nu\mu}=\frac{\kappa}{8}\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}_{\mu\nu\lambda}\overset{\mathrm{m}}{\Sigma}{}^{\mu\nu\lambda}. \tag{20.12}$$

将式 (20.3) 代入，此式就变为[1]

$$\mathcal{L}^{\mathrm{eff}}=\frac{3\kappa}{16}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5\psi\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi. \tag{20.13}$$

但很不幸，此相互作用太弱，目前的实验是无法探测到的，也许在许多代以后有可能. 式 (20.13) 中的相互作用会隐藏在大得多的弱相互作用下. 对于电子及其中微子 ν_{e}，它们相应的拉格朗日为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{weak}}=-\frac{G}{\sqrt{2}}\Big\{&\Big[\bar{e}\gamma_{\mu}(1-\gamma_5)\nu_{\mathrm{e}}\Big]\Big[\bar{\nu_{\mathrm{e}}}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\nu\Big]\\&+2\Big[\bar{e}\gamma^{\mu}e+\bar{\nu}_{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}\nu_{\mathrm{e}}\Big]\Big[2\sin^2\theta_W\bar{e}_{\mathrm{R}}\gamma_{\lambda}e_{\mathrm{R}}-\cos2\theta_{\mathrm{W}}\bar{e}_{\mathrm{R}}\gamma_{\mu}e_{\mathrm{R}}-\bar{e}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}e_{\mathrm{L}}\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{20.14}$$

其中，$e_{\mathrm{L}}\equiv(1-\gamma_5)e/2$ 和 $\nu_{\mathrm{eL}}\equiv(1-\gamma_5)\nu_{\mathrm{e}}/2$ 分别为电子及其中微子的左手狄拉克旋量，θ_{W} 为温伯格角，满足

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}\approx0.23120(15), \tag{20.15}$$

G 为耦合常数

$$G=(1.14730\pm0.000641)\times10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}. \tag{20.16}$$

这可用电子电荷表示为

$$G\approx\frac{e^2}{m_{\mathrm{W}}^2}\frac{4\pi\alpha}{m_{\mathrm{W}}^2}, \tag{20.17}$$

其中

$$m_{\mathrm{W}}=80.403\pm0.029\,\mathrm{GeV} \tag{20.18}$$

为带电矢量中间玻色子 $W^{\pm}$ 的质量. 它和重矢量玻色子质量

$$m_{\mathrm{Z}}=91.1876\pm0.0021\,\mathrm{GeV} \tag{20.19}$$

之间的比值就确定了温伯格角：

$$\cos\theta_{\mathrm{W}}=m_{\mathrm{W}}/m_{\mathrm{Z}}, \tag{20.20}$$

将式 (20.14) 和源于挠率的 4 费米子相互作用式 (20.13) 进行比较就会显示出

后者远小于弱作用，它们之间的比值相当的小，为

$$\frac{m_{\rm W}^2}{m_{\rm P}^2} \approx 4.34 \times 10^{-35}, \tag{20.21}$$

其中，$m_{\rm P}$ 为式 (12.43) 中的普朗克质量. 因此任何对此进行探测的期望在可见的将来都是徒劳的. 也正因此，在相当长的一段时间内，我们也无法对式 (20.22) 中组合粒子如质子和中子的自旋联络中与挠率耦合的常数 γ 的进行测量.

另一个额外的问题是形如式 (20.13) 中那样的 4 费米子相互作用是不可重整的，因此它不可能是基本相互作用. 它至多是某种更基本的理论的唯象近似，而这种理论在高能区域定会显现出同式 (20.13) 中 4 费米子表达式的严重背离.

20.2　引力不需要挠率

从上面我们看到这里有一个重要的问题：如果类似于式 (17.71) 那样用扭曲张量 $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 和场 $\overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 之间的差来描述的话，协变导数 (17.18) 并不真的需要扭曲张量场 $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 在局域洛伦兹变换下协变. 因此，场 $\overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 已完全足够. 通过式 (17.113) 中的变换特性，它就可以提供非张量修正项，使得加于狄拉克场前的导数成为一个矢量. 因此，在无挠弯曲时空中同样也存在局域洛伦兹变换下不变的自洽的理论. 如果只考虑协变性的话，在理论中挠率完全是多余的.

这对于挠率和自旋的耦合有着重要的意义. 尽管无挠自旋联络 $\overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的耦合可由场的局域洛伦兹变换特性唯一地确定，自旋联络 (17.71) 中的扭曲张量场 $K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 则可乘以一个**任意的**耦合常数 γ：

$$\overset{A}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = h^{\gamma}{}_{\lambda} h_{\alpha}{}^{\mu} h_{\beta}{}^{\nu} (\gamma\, K_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda})\,. \tag{20.22}$$

如果 $\gamma = 1$，这个表达式就保证了常规无挠引力可以**普适地** 同自旋和轨道角动量相耦合. 的确，这看来应该是引力的一个自然的属性[2]. 考虑一个远离带角动量 $\boldsymbol{J}$ 的旋转天体的探测粒子，它携带有角动量 $\boldsymbol{j}$，由于Lense-Thirring**效应**(更物理的名称是**转动参考系拖拽效应**)[3]，它会有一个进动. 这个进动的速度不应依赖于角动量 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的起因. 不论 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 是由该体系组成部分的定向自旋给出的还是由它们的轨道转动引起的，相应的引力现象应该是一样的. 这一普适性是由对称 Belinfante 能动张量 (3.231) 中的自旋部分以及该自旋部分从式 (17.141) 中能动张量通过变分导数而得的方式来加以保证的. 我们知道，对物质作用量就 $h_{\alpha}{}^{\mu}(x)$ 作变分导数后会有两项，一部分是轨道部分，即正则能动张量 $\overset{\rm m}{\Theta}_{\mu}{}^{\alpha}(x)$ [参看式 (17.143) 和式 (17.146)]，另一部分则是式 (17.7) 中给出的自旋部分，它来自于作用量中自旋联络部分对 $h_{\alpha}{}^{\mu}(x)$ 的导数. 式 (20.22) 中 $\overset{h}{K}_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的强度为 1 对于得到 Belinfante 张量

的对称性以及式 (18.14) 中的自旋流密度协变守恒定律 $\frac{1}{2}D^*_\mu \Sigma^{\lambda\kappa,\mu} = \Theta^{[\lambda,\kappa]}$ 至关重要.

挠率场却破坏了这种普适原则. 挠率可以直接探测物体内基本粒子的自旋. 这是挠率一个非同寻常的一个特性，而这对于理论物理学家来说也同时是一个十分棘手的问题：在确切知道哪些粒子是真正的基本粒子之前，这对于构建挠率的自洽的场论是一个大的障碍. 对于一个自旋 $-1/2$ 粒子，现在看起来是基本粒子，因此才将它包含在式 (20.22) 中 $\gamma = 1$ 的作用量中，也许最后发现它是个复合粒子. 那样的话，它的自旋有部分是来源于组成成分的轨道运动，于是 γ 就应该不等于 1.

对于此非普适的 γ，它的值应该是每个粒子的一个额外的可测量的物理量，就像质量、自旋、电荷之类，除非有某种更高的对称性原则将它固定下来. 这样的原则在第 16.2 节末为了对光子以及 W 和 Z 玻色子确定 $\gamma = 0$ 而要求过. 这对于确保规范不变性是十分必要的，而没有这个规范不变性的话理论是无法重整化的. 以此类推，我们可以设想所有基本粒子都有 $\gamma = 0$，这样一来宇宙就完完全全是无挠的了，这就同爱因斯坦为了简便起见而设想的一样.

在式 (20.22) 中设 $\gamma = 0$ 的可能性使得温伯格完全拒绝接受挠率是一个特殊的几何场[4]. 在他看来，挠率不过就是一个对前两个指标反对称的普通的三秩张量场而已. 这样的场在自然界中或者存在或者不存在. 只有当存在一种更高的对称性原则要求在式 (11.102) 中的组合中挠率始终伴随克里斯托夫符号存在，即在式 (20.22) 中有 $\gamma = 1$，他才会确信挠率的特殊作用.

这样的高级的对称性原则也只有第 14 章中的多值映射原则能提供. 此类映射下欧几里得空间中的经典方程及场论的像就是黎曼–嘉当空间中相应的理论. 这些理论中包含有式 (11.115) 中的一般度规–仿射联络，该联络自动包含 $\gamma = 1$ 的挠率张量.

然而，这却有赖于所研究粒子的一个基本的自然特性，即上述映射规则是否可以应用于该粒子. 这同电动力学中最小耦合原则的情形是一样的. 这一原则对于裸的电子、缪子以及夸克来说是完全适用的，因为它们都是基本粒子. 但它对于组合粒子如质子、中子及其他重子来说并不成立.

20.3 标 量 场

由于挠率场只在普朗克尺度传播，因此讨论它同其他粒子的耦合也仅仅具有学术层面上的意义. 当然，我们总希望理论是内在自洽的. 在式 (15.63) 中我们已经注意到，在最小耦合中，标量场 $\phi(x)$ 同挠率是无相互作用的. 对于标量场而言，普通的标量场的微分 $\partial_\mu \phi(x)$ 就已经自动是协变导数了. 因此最小耦合拉格朗日密

度只包含度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 而不含仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}(x)$. 此标量场如同作用量 (16.21) 中的光子场一样自动真正地以最小的方式进行耦合.

这同我们在第 14.1.2 节中所得到完全相悖，在那里我们看到，经典粒子轨迹是同挠率耦合在一起的，这使得它们是自平行的而不是测地的. 而在第 16.1 节末尾，我们提到了如何解决这一矛盾. 这里，我们就要对此详加讨论.

只含自旋 −1/2 源的情形

解决这一矛盾的关键是式 (20.3). 自旋 −1/2 粒子的自旋流密度 $\overset{\text{m}}{\Sigma}_{\alpha\beta,\gamma}$ 是全反对称的. 因此，如果自然界的所有粒子最终都是由自旋 −1/2 的粒子组成的话，则挠率张量场 $S_{\mu\nu\lambda}$ 也是全反对称的[6]. 这样的一个结果就是它将从式 (14.8) 中点粒子经典运动方程中退出. 于是自平行轨迹就变成是测地轨迹，这样矛盾就消失了.

这一图景物理上是非常有可能的. 在电弱相互作用标准模型中，光子与矢量玻色子 W 和 Z 均为无质量自旋为一的规范场，它们与挠率不相耦合，这就保证了理论的规范不变性 [参看第 16.2 节]. 矢量玻色子的质量是迈斯纳–希格斯效应而获得的，在此机制中它们会同希格斯场的戈德斯通模混合起来. 希格斯场最初是通过类比于超导的金兹堡–朗道场而引入的. 这个场描述电子的库珀对. 因此很自然可以推测，希格斯场同样也最终是由一对自旋 −1/2 的某种基本粒子组成. 其实，很多年来已经有很多文献在讨论这样的模型，在这种模型中包含有一种叫做**人工色 (technicolor) 夸克**的基本粒子[7]. 类似于常规超导体中的库珀对，在 s 波束缚态中人工色夸克的自旋是反平行的. 对于为什么希格斯粒子不同挠率进行耦合，这应该是个很好的原因.

对于希格斯粒子不可能是基本粒子，还有另外一个证据. 它们的相互作用场论是可重整的，但希格斯场的传播子却在大动量区域内包含非物理的朗道极点. 这说明这样的理论是不完整的. 这样的结论同样也适用于其他的标量场.

在此背景下，值得注意的是，有学者提出一些理论模型[8] 试图将光子和引力子也解释为更基本的自旋 −1/2 粒子的复合体. 但这一图景与有挠引力不相容. 光子中的自旋 −1/2 的费米子将处在一个自旋平行的 s 波束缚态. 这就会同挠率有一个不为零的耦合，而这样就会破坏掉系统的规范不变性.

第 16.2 节中所得的结论，即光子以及基本矢量玻色子 W 和 Z 不与挠率耦合以保证规范不变性，在挠率张量全反对称的假设下依然是成立的. 这可由方程 (16.18) 得出，该方程对非对称的 $S_{\mu\nu\lambda}(x)$ 同样也赋予了不为零的质量. 而这将破坏所必需的电磁规范不变性. 类似于电磁理论，如果 $S_{\mu\nu\lambda}(x)$ 是全反对称的话，标准模型中传递弱相互作用的矢量玻色子场 W 和 Z 同样也必须与挠率保持脱耦.

注意，此性质使得规范玻色子同诸如 ρ 和 ω 之类由夸克–反夸克对构成的带质量的矢量介子相当的不同. 在这类粒子的波函数中，夸克和反夸克处于 s 波自旋

三重态这一量子态的振幅较大. 这个态会通过其夸克组分同挠率相耦合，因此这类粒子事实上可以用一个自旋 -1 的场来描述，其相应的自旋联络 (20.22) 中的 γ 是不为零的. 不过，γ 的值肯定要小于 1. 原因是它的波函数只有部分包含处于 s 波的夸克–反夸克对. 而相当的一部分则包含处于 p 波的 π 介子对. π 介子是赝标量粒子，组成它的夸克–反夸克对构成一个 s 波自旋单态. 此部分将不同挠率发生耦合，因此就将 γ 的值降低到 $\gamma<1$. ρ 和 ω 的波函数的另一小部分则由夸克–反夸克对海构成[9]，而这又进一步减小了 γ 的值. 同理可以说明，所有强作用粒子都有 $\gamma<1$，即它们不是最小耦合的.

这一情势可相比于量子电动力学中的磁矩. 裸的电子、μ 子以及夸克都最小耦合于 矢量流 $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. 从这些耦合我们就可以很轻易地推导出质子和中子的磁矩比为 $-3/2$，尽管我们只知道这些粒子是三夸克组成结构. 但这两个磁矩的大小则依赖于这些粒子中夸克的波函数. 而这并**不是**普适的. 同样，质子和中子在式 (20.22) 中的自旋联络中不可能有 $\gamma=1$，其他的任何复合粒子，例如 $\varDelta$ 或 $\varOmega^-$ 也一样不能.

当然，以上所有的考虑都基于以下假定，即如轻子及夸克这样的基本的自旋 $-1/2$ 的粒子确实遵循多值映射原则且以 $\gamma=1$ 这样一个普适的值同挠率相耦合. 然而，这个假定很有可能是不正确的，也许自然界已选择将所有粒子如光子与 W 和 Z 介子一样对待，赋予它们完完全全的最小耦合值 $\gamma=0$，这样就使得引力如爱因斯坦假定的那样是完全无挠的.

20.4 修正的能动守恒律

为了满足学术上的好奇心，我们当然可以去追究与挠率相耦合的标量粒子的场论. 而这，只有当对导致爱因斯坦方程 (15.64) 的变分手续在有挠情形下进行修正后才有可能. 由于有挠时空具有闭合破损特性，因此对它的一个修正应该是相当合理的. 假如我们回顾一下由协变守恒律 (18.68) 而得到测地运动方程 (18.72) 的推导过程，我们就意识到，如果将式 (18.68) 中自由的零自旋粒子的能动张量的协变守恒律 $\bar{D}_\kappa \overset{\mathrm{m}}{T}_\lambda{}^\kappa(x)=0$ 修正为

$$D^*_\nu \overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}(x)=0 \tag{20.23}$$

而不是式 (18.76) 的话，则相应的自平行轨迹就会出现.

为了看清是如何得到这一守恒律的，我们再来做一遍关于它的推导. 在式 (18.54) 中我们计算了爱因斯坦变换 (11.78) 下总的作用量的变化. 对于一个点粒子，此变化可以明确地写为

$$\delta_{\mathrm{E}}\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta g_{\mu\nu}}\bigg|_{\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}}\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}+\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}}\bigg|_{g_{\mu\nu}}\delta_{\mathrm{E}}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}\right\}+\int \mathrm{d}\tau\frac{\delta\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}}{\delta x^{\mu}(\tau)}\delta_{\mathrm{E}}x^{\mu}(\tau). \quad (20.24)$$

最初，上式最后一项在自平行轨道上并不为零. 然而，如果我们通过将 $\delta x(\tau)$ 换为式 (14.14) 中定义的且具有式 (14.30) 中所说特性的非完整 $\bar{\delta}x(\tau)$ 来对时空的闭合破损加以考虑的话，则它就变为零了.

式 (20.24) 中第一项对式 (18.18) 中任意无穷小 $\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}(x)$ 为零就导致了协变守恒律 (18.59)，于是给出了测地轨道.

那么，现在很有意思的一点是：如果我们将式 (20.24) 中爱因斯坦变换 (18.18) 用如下定义的变换替换掉：

$$\bar{\delta}_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}(x)=D_{\mu}\xi_{\nu}(x)+D_{\nu}\xi_{\mu}(x)=\bar{D}_{\mu}\xi_{\nu}(x)+\bar{D}_{\nu}\xi_{\mu}(x)-4S^{\lambda}{}_{\mu\nu}\xi_{\lambda}(x), \quad (20.25)$$

这一变换看起来像式 (18.18)，但却将其中的黎曼协变导数替换为了完整协变导数 D_{μ}，则变分式将会包含一个额外的项

$$\bar{\delta}_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}(x)=\delta_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}(x)-4S^{\lambda}{}_{\mu\nu}\xi_{\lambda}(x). \quad (20.26)$$

于是，作用量的物质部分的变化将为

$$\delta_{\mathrm{E}}\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}(x)\bar{\delta}_{\mathrm{E}}g_{\mu\nu}(x)=-\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}(x)\,D_{\nu}\xi_{\mu}(x). \quad (20.27)$$

对于包含协变导数 D_{μ} 的不变表达式的积分可根据式 (15.41) 中的规则进行分部积分计算. 如果略去表面项，我们就得

$$\delta_{\mathrm{E}}\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,D_{\nu}^{*}\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}(x)\xi_{\mu}(x), \quad (20.28)$$

其中，$D_{\nu}^{*}=D_{\nu}+2S_{\nu\lambda}{}^{\lambda}$. 由它对所有的 $\xi_{\mu}(x)$ 都为零，我们的确就得到了相应于自平行轨道的时空中无自旋点粒子的协变守恒律 (20.23).

那么，这里就有个问题，这个式 (20.23) 中的修正的守恒律是否允许对原先的爱因斯坦场方程构造一个合适的修正

$$\bar{G}^{\mu\nu}=\kappa\,\overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}, \quad (20.29)$$

而这个修正在有挠时空中应保持有效. 那如果能动张量所满足的守恒律是式 (20.23) 而不是式 (18.76) 的话，场方程 (20.29) 的左边又应该是哪个张量？

20.4.1 梯度挠率情形下的解

目前，对上述问题，我们只能对纯梯度挠率的情形给以回答[10]，式 (14.41) 给

出了纯梯度挠率的一般形式：

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu}{}^{\lambda}\partial_{\nu}\theta - \delta_{\nu}{}^{\lambda}\partial_{\mu}\theta). \tag{20.30}$$

于是，我们就可将式 (20.29) 简单地替换为

$$\mathrm{e}^{\theta} G^{\mu\nu} = \kappa \overset{\mathrm{m}}{T}{}^{\mu\nu}, \tag{20.31}$$

其中，$G^{\mu\nu}$ 为爱因斯坦–嘉当空间中由式 (11.129) 中曲率张量构成的完整的爱因斯坦张量 $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$. 对于梯度挠率情形，这是对称的，于是就同右手边对称性相吻合. 利用式 (18.60) 中的基本恒等式

$$D^{*}{}_{\lambda} S_{\mu\nu}{}^{;\lambda} = G_{\mu\nu} - G_{\nu\mu}, \tag{20.32}$$

这一点很好证明. 将式 (20.30) 代入式 (15.49)，我们就得到了 Palatini 张量

$$S_{\lambda\mu}{}^{;\kappa} \equiv -2[\delta_{\lambda}{}^{\kappa}\partial_{\mu}\theta - (\lambda \leftrightarrow \mu)]. \tag{20.33}$$

它的协变导数为零：

$$D^{*}{}_{\lambda} S_{\mu\nu}{}^{;\lambda} = -2[D^{*}{}_{\mu}\partial_{\nu}\theta - D^{*}{}_{\nu}\partial_{\mu}\theta] = 2[S_{\mu\nu}{}^{\lambda}\partial_{\lambda}\theta - 2S_{\mu\lambda}{}^{\lambda}\partial_{\nu}\theta + 2S_{\nu\lambda}{}^{\lambda}\partial_{\mu}\theta] = 0. \tag{20.34}$$

利用式 (20.30) 以及 $S_{\mu\lambda}{}^{\lambda} \equiv S_{\mu} = -3\partial_{\mu}\theta/2$，很容易验证上式右边相互抵消掉了.

现在，我们将式 (20.30) 代入到式 (18.61) 中的比安基恒等式中，就得到

$$\bar{D}^{*}_{\nu} G_{\lambda}{}^{\nu} + \partial_{\lambda}\theta G_{\kappa}{}^{\kappa} - \partial_{\nu}\theta G_{\lambda}{}^{\nu} + 2\partial_{\nu}\theta R_{\lambda}{}^{\nu} = 0. \tag{20.35}$$

此处令 $R_{\lambda\kappa} = G_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}g_{\lambda\kappa}G_{\nu}{}^{\nu}$，于是就变为

$$D^{*}_{\nu} G_{\lambda}{}^{\nu} + \partial_{\nu}\theta G_{\lambda}{}^{\nu} = 0. \tag{20.36}$$

这样，我们就得到了如下比安基恒等式：

$$D^{*}_{\nu}(\mathrm{e}^{\theta} G_{\lambda}{}^{\nu}) = 0. \tag{20.37}$$

这就使得新的场方程 (20.31) 的左边同右边是相容的，而这就保证了粒子轨迹的自平行性.

如果时空的挠率不是梯度型的话，则关于该问题唯一的答案就是第 20.3.1 节中所指出的，即挠率的源是自旋 $-1/2$ 的基本粒子，包括夸克和轻子等. 而这只能给出全反对称的挠率场，这使得自平行轨道同测地轨道是相同的.

20.4.2　与标量场相耦合的梯度挠率

如果挠率是式 (20.30) 中的梯度型的，则它有可能包含在如下标量希格斯场作用量中：

$$\mathcal{A}[\phi] = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} |\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi| - \frac{m^2}{2} |\phi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi^2|^2 \right). \tag{20.38}$$

为了避免不必要的麻烦，这里设希格斯场为一个复标量场且相应的作用量取金兹堡–朗道形式. 照例，$g = \det g_{\mu\nu}$ 为度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的行列式. 符号 ∇_μ 表示协变的电磁导数 $\nabla_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eV_\mu$. 对于一个标量场，并不需要克里斯托夫符号来满足协变性要求.

其质量的平方为负，于是希格斯场具有一个非零的期待值 $|\phi|^2 = -m^2/\lambda$. 导数项则给此矢量场提供了一个质量项 $e^2|\phi|^2 V^\mu V_\mu/2$，从而给出了该矢量玻色子作用量的自由部分

$$\mathcal{A}[V] = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} - \frac{e^2 m^2}{2\lambda} V_\nu V^\mu \right), \tag{20.39}$$

其中，$\bar{F}_{\mu\nu}$ 为黎曼协变的旋度，由定义 (16.14) 可知它就等于通常的旋度 $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$. 当然，电磁和弱作用的非阿贝尔矢量玻色子的协变旋度也包含自身相互作用，但在目前的讨论中将此略去了，因为当前我们只关心自由粒子的传播问题.

迈斯纳效应通过将非耦合的裸矢量玻色子同标量希格斯场混合起来而为矢量玻色子提供了质量. 因此，很显然，只有标量希格斯场同挠率耦合的话，这些带质量矢量玻色子才会同挠率相耦合.

这里，我们的目标是引入一个梯度挠率的耦合，使得标量粒子如同我们所讨论的闭合破损的时空对粒子轨道所要求[11, 12] 的那样沿着自平行轨迹运动. 而这可通过引入一个新的依赖于 $\theta(x)$ 的标量积来实现.

20.4.3 一种新的标量积

文献 [11] 中的专著指出，对于一个有挠空间中的粒子，如果挠率是全反对称的 (第 20.3.1 节中所讨论的就是这种情况) 或者如果挠率具有式 (20.30) 中那样的梯度形式，则相应的自洽的薛定谔描述是存在的. 该薛定谔方程含有拉普拉斯算子 $g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu$，其中 D_μ 为协变导数，它包含完整仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$，其中包括挠率. 它同无挠空间中的 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta \equiv \sqrt{|g|}^{-1} \partial_\mu \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu$ 的区别就是相差一项 $-2S^{\nu\lambda}{}_\lambda \partial_\nu = -3(\partial^\nu \theta)\partial_\nu$. 这里一个重要的问题是这个算符只在包含因子 $\mathrm{e}^{-3\theta}$ 的标量积下才是厄米的[16, 17].

式 (20.30) 中的梯度挠率的一个优势就是，它可以同标量粒子以这样一种方式耦合，使得[13, 14] 中所发现的对变分手续的修正变得完全没有必要，而同时又可产生自平行轨迹. 对于一个带质量粒子，耦合起来的作用量为[18]

$$\overset{\mathrm{m}}{\mathcal{A}}[x] = -mc \int \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{e}^{\theta(x(\sigma))} \sqrt{g_{\mu\nu}(x)) \dot{x}^\mu(\sigma) \dot{x}^\nu(\sigma)} = -mc \int \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\theta(x(s))}, \tag{20.40}$$

其中，σ 为一个任意的参数，而 $s = c\tau$ 为轨道的不变长度. 在第 14.1.4 节中我们已经说明，对作用量 (20.40) 求极值就可得到存在梯度挠率 (14.41) 的情况下的自平行运动方程 (14.43)：

$$\ddot{x}^\lambda + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\dot{\theta}(x)\dot{x}^\lambda + g^{\lambda\kappa}(x)\partial_k\theta(x). \tag{20.41}$$

沿着这一轨迹，作用量积分下的拉格朗日是一个运动常量，此外它的值可通过质壳约束

$$\overset{\mathrm{m}}{L} = \mathrm{e}^{\theta(x)}\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \equiv 1, \qquad \tau = s \tag{20.42}$$

而加以确定.

同样的经典运动方程也可由标量场论的程函近似得到，该理论以一种特别的方式包含此标量场 $\theta(x)$：

$$\mathcal{A}[\phi] = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\mathrm{e}^{-3\theta}\,\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}|\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi| - \frac{m^2}{2}|\phi|^2\mathrm{e}^{-2\theta}\right). \tag{20.43}$$

标量积中 $\mathrm{e}^{-3\theta(x)}$ 因子的必要性是由文献 [11] 发现的，并成为了广义相对论中一系列研究的基础[19]. 对作用量 (20.43) 取极值就得到了欧拉–拉格朗日方程

$$D_\mu D^\mu\phi + m^2\mathrm{e}^{-2\theta(x)}\phi = 0. \tag{20.44}$$

我们接下来想要找到由标量场 $\phi(x)$ 所描述的经典粒子的运动方程. 为此我们猜想 $\phi(x) \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x)}$，于是就得到了相位 $S(x)$ 的程函方程[20]：

$$\mathrm{e}^{2\theta(x)}g^{\mu\nu}(x)[\partial_\mu S(x)][\partial_\nu S(x)] = m^2. \tag{20.45}$$

由于 $\partial_\mu S$ 位粒子的动量，$\partial_\mu S \to m\dot{x}_\mu$ 显示出光程函数方程 (20.45) 就保证了拉格朗日 (20.42) 为一个常数，而这是自平行经典轨迹的一个特性.

20.4.4 自相互作用希格斯场

除了因子 $\mathrm{e}^{-3\theta(x)}$ 总伴随体积分外，θ 场同标量场的耦合还类似于伸缩子 (dilaton)，即 $\mathrm{e}^{-\theta}$ 的幂次决定于相联项的量纲. 如果我们在自由场作用量 (20.43) 中加一个四次方的自相互作用项，并取负 m^2 以便具有迈斯纳效应的话，自相互作用项并不会携带额外的因子 $\mathrm{e}^{-\theta}$，于是，在存在梯度挠率情形下，恰当的希格斯作用量为

$$\mathcal{A}[\phi] = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\mathrm{e}^{-3\theta}\,\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}|\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi| - \frac{m^2}{2}|\phi|^2\mathrm{e}^{-2\theta} - \frac{\lambda}{4}|\phi^2|^2\right). \tag{20.46}$$

如果 m^2 是负的，且挠率只微弱地依赖于时空的话，则希格斯场具有一个光滑的真空期待值

$$|\phi|^2 = -\frac{m^2}{\lambda}\mathrm{e}^{-2\theta}. \tag{20.47}$$

在希格斯李粒子的康普顿波长的尺度上，即在量级为 $1/20\text{GeV} \approx 10^{-15}$ cm 的长度尺度上，挠率要求是光滑的. 对于源于引力的挠率，这种光滑性当然是可以得到保证的. 从式 (20.43) 中的梯度项，我们就可得出，在 $\phi =$ 实数的规范下，矢量玻色子的质量项为

$$\int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \mathrm{e}^{-3\theta} \frac{1}{2} m_{\mathrm{V}}^2 \mathrm{e}^{-2\theta(x)} V^\mu V_\mu, \tag{20.48}$$

其中

$$m_{\mathrm{V}}^2 = -\frac{\mathrm{e}^2}{\lambda} m^2, \quad m^2 < 0. \tag{20.49}$$

将有挠情形下的物理标量积考虑在内，我们就得到了带质量矢量玻色子的自由场作用量

$$\mathcal{A}[V] = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \mathrm{e}^{-3\theta} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m_{\mathrm{V}}^2 \mathrm{e}^{-2\theta(x)} V_\nu V^\mu \right). \tag{20.50}$$

质量项中因子 $\mathrm{e}^{-2\theta}$ 的出现再次保证了程函近似下的自平行轨迹，该轨迹同作用量 (20.43) 中无自旋粒子的是一样的.

注意，标量积因子 $\mathrm{e}^{-3\theta(x)}$ 意味着起初无质量的矢量玻色子 W 和 Z 也耦合于挠率，而这一耦合并不破坏规范不变性. 基于 W 玻色子和 Z 玻色子裸场同光子场的相似性，在电磁作用量中也必须存在 $\mathrm{e}^{-3\theta(x)}$ 这样一个因子.

20.5 小　　结

对于挠率，通过本章我们知道了什么？它是否对引力有影响？最终，也只有实验才能判断此问题. 而由于挠率同构成天体的基本组成成分中的内禀自旋的耦合非常的微弱，这项工作显然是非常困难的.

为了更加定量地说明这有多困难，作为一个例子，我们来看一下Gravity Probe B卫星实验，该卫星于 2004 年 4 月 20 日被送入轨道. 人们试图用它来探测 Lense 和 Thirring 在 1918 年预言的微小的标架拖拽效应[9]. 这颗卫星搭载四个直径为 3.8 cm 的球形的水晶陀螺仪，卫星绕地轨道距极地 740 km. 根据爱因斯坦的理论，由于测地进动 [参见第 14.1.3 节]，转轴会以每年 6.6″ 的速度进动. 另外，还存在一个额外的进动，此进动是由地球转动引起的，它会拖拽着自由下落标架同它一起转，就会引起一个 0.042″ 的额外进动. 这就是著名的Lense-Thirring**效应**. 陀螺仪的质量大约是 $63\,\mathrm{g} \approx 1$ mol, 转动惯量为 $I \approx 90\,\mathrm{g\ cm}^2$. 其转动频率为 $\omega = 2\pi \times 10\,000\,\mathrm{min}^{-1}$，则它的角动量为 $L \approx 10^6\,\mathrm{g{\cdot}cm^2/s}$. 陀螺仪中分子的数目接近于阿伏伽德罗常量 6×10^{23}. 由此我们可以估算出每个分子的角动量差不多为 $l \approx 40\,000\,\hbar$.

现在假定我们希望通过此实验来探测挠率的影响. 唯一可行的就是将陀螺仪的材料替换为完全极化的磁性材料. 在同样的转速下，每个原子的自旋 s 也就是几个

$\hbar$ 的量级. 因此，即便沿着轨道挠率同爱因斯坦场有着相似的强度 (而这是不可能的，因为挠率是不传播的)，挠率造成的效应也仅仅是上述效应的 10^{-4}. 这就使得这一效应在现今的技术水平下完全是不可测的.

因此，所有包含挠率的理论在今后相当长的一段时间内都纯粹是一种理论推测. 而它存在的可能性也只能从理论的美学诉求的角度上加以推测. 而这又往往受最小原理支配. 只有当某种对称原则需要某种数学结构时，自然才会对此数学结构加以采纳应用. 而对于挠率来讲，唯一的理由就是当平直空间下的理论在多值坐标变换下变到有挠弯曲空间中时挠率会自然引入. 同样的变换也会将理想晶体变为具有位错和旋错的晶体. 由于自然总是在不同的现象中采用同样的数学结构，这里也差不多.

而另外，如果最小原则被看作是最主要的判据的话，则挠率将根本不会发生耦合，因为对保证引力的局域对称性而言它不是必须的.

文献与注记

[1] F.W. Hehl and B.K. Datta, J. Math. Phys. **12**, 1334 (1971);
R.F. O'Connell, Phys. Rev. Lett. **37**, 1653 (1976).

[2] H. Kleinert, *Universality Principle for Orbital Angular Momentum and Spin in Gravity with Torsion*, Gen. Rel. Grav. **32**, 1271 (2000) (`kl/271j.pdf`)，其中`kl` 是网址`http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert` 的缩写.

[3] J. Lense and H. Thirring, Phys. Z. **19**, 156 (1918) [engl. transl. B. Mashhoon et al., Gen. Relativ. Gravit. **16**, 711 (1984)].
关于这方面的综述性文章，请参阅：
B. Mashhoon (arXiv:gr-qc/0311030).

[4] 参看 S. Weinberg 发表于 Physics Today 2006 年 6 月刊第 10 页的文章，在这篇文章中，他对多篇回应他 2005 年 11 月发表的一篇关于爱因斯坦错误的文章的快报做出评论. 在这篇 4 月刊的文章中他强调他从来没有理解挠率张量的物理重要性. 这促使 F.W. Hehl 在 2007 年 3 月刊上进一步对此进行评论，他提醒 Weinberg 注意 Sciama 和 Kibble 用洛伦兹变换和平移的规范场来构造爱因斯坦–嘉当引力理论的方法，在此理论中曲率张量和挠率张量都是规范不变的场强. Hehl 的回答并没有使 Weinberg 满意，如果要说服他，就必须要有一个不变性原则，这个原则须要求仿射联络中的克里斯托夫符号必须伴有一个挠率张量. 其实，正如我们在第 20.2 节中所提到的，第 14 章中的多值映射原则正是这样一种不变原理.

[5] F.W. Hehl, Phys. Lett. A **36**, 225 (1971).

[6] 参看文献 [11] 中的第 11.4 节.

[7] 关于这方面的综述，请参阅：
S. Eidelmann et al., Phys. Lett. B **592**, 1 (2004) (`http://pdg.lbl.gov`),

以及网页en.wikipedia.org/wiki/Technicolor_(physics) 和 pdg.lbl.gov/2004/listings/s057.pdf;
C.T. Hill and E.H. Simmons, Phys. Rep. **381**, 235 (2003);
D.K. Hong, S.D.H. Hsu, F. Sannino, *Opening the Window for Technicolor*, (hep-ph/0410310).

[8] J.D. Bjorken, Ann. Phys. (N.Y.) **24**, 174 (1963); (hep-th/0111196).
相关综述请看:
W.A. Perkins, *Interpreted History Of Neutrino Theory Of Light And Its Future*, in *Lorentz Group, CPT and Neutrinos*, eds. A.E. Chubykalo, V.V. Dvoeglazov, D.J. Ernst, V.G.Kadyshevsky, and Y.S. Kim, World Scientific, Singapore, 2000, p.115 (hep-ph/0107122).
也请参阅如下更新的文章:
P. Kraus and E.T. Tomboulis, *Photons and Gravitons as Goldstone Bosons and the Cosmological Constant*, Phys. Rev. D **66**, 045015 (2002),
and references therein.

[9] H. Kleinert, *Quark Pairs inside Hadrons,* Phys. Letters B **59**, 163 (1975) (kl/50).

[10] H. Kleinert and A. Pelster, Acta Phys. Polon. B **29** , 1015 (1998).

[11] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, 4th ed., World Scientific, Singapore 2006 (kl/b5).

[12] H. Kleinert, *Nonholonomic Mapping Principle for Classical and Quantum Mechanics in Spaces with Curvature and Torsion,* Gen. Rel. Grav. **32**, 769 (2000) (kl/258).
Short version presented as a lecture at the Workshop on *Gauge Theories of Gravitation*, Jadwisin, Poland, 4-10 September 1997, Acta Phys. Pol. B **29**, 1033 (1998) (gr-qc/9801003).

[13] P. Fiziev and H. Kleinert, *New Action Principle for Classical Particle Trajectories in Spaces with Torsion*, Europhys. Lett. **35**, 241 (1996) (hep-th/9503074).

[14] H. Kleinert and A. Pelster, *Autoparallels From a New Action Principle*, Gen. Rel. Grav. **31**, 1439 (1999) (gr-qc/9605028).

[15] 这里关于场论和几何量的标记方式与下面的专著中所采用的是一样的:
H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. II, *Stresses and Defects*, World Scientific, Singapore 1989, pp. 744-1443 (kl/b1/contents1.html).

[16] 参看文献 [11] 中的第 11.4 节. 注意 $\theta(x)$ 场的正规化同这里的相差一个因子 2/3. 在那篇文献中我们是通过关系式 $S_{\mu\nu}{}^{\nu} = \partial_\mu\theta$ 引入 θ (所采用的是 σ，不过这个符号在这里有别的用途) 的，而在这里则是通过 $S_{\mu\nu}{}^{\nu} = (3/2)\partial_\mu\theta$ 引入的.

[17] 对于第 20.3 节中所讨论的全反对称挠率的情形，改变标量积其实是多余的，因为此时 $g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu$ 和 Δ 这两个拉普拉斯算子是一样的，初始的标量积就可以保证时间演化的厄米性及其幺正性.

[18] H. Kleinert and A. Pelster, *Novel Geometric Gauge-Invariance of Autoparallels*, Lec-

tures presented at Workshop *Gauge Theories of Gravitation*, Jadwisin, Poland, 4-10 September 1997, Acta Phys. Pol. B **29**, 1015 (1998) (gr-qc/9801003).

[19] A. Saa, Mod. Phys. Lett. A **8**, 2565 (1993); ibid. 971 (1994); Class. Quant. Grav. **12**, L85 (1995); J. Geom. and Phys. **15**, 102 (1995); Gen. Rel. and Grav. **29**, 205 (1997).

[20] P. Fiziev, *Spinless Matter in Transposed-Equi-Affine Theory of Gravity*, Gen. Rel. Grav. **30**, 1341 (1998) (gr-qc/9712004). See also *Gravitation Theory with Propagating Torsion* (gr-qc/9808006).

第 21 章　引力的绝对平行理论

The absence of alternatives clears the mind marvelously.

Henry Kissinger (*1923)

到此，我们有必要提醒读者注意爱因斯坦在 20 世纪 30 年代所提出的关于引力的另一种理论，即所谓的**绝对平行理论**(theory of teleparallelism). 正如在前言中所指出的，这个理论的提出是受到了嘉当 1922 年的工作以及随后爱因斯坦和嘉当之间通信[1] 的激发. 在该理论中，时空可通过假定式 (17.45) 中的基标架 $e^a{}_\mu(x)$ 中不存在多值局域洛伦兹变换 $\Lambda^a{}_\alpha(x)$ 而从平直空间中产生出来. 因此 $e^a{}_\mu(x)$ 是单值的，且同标架场 $h^{\alpha=a}{}_\mu(x)$ 是一致的. 由方程 (11.130)，我们可知黎曼–嘉当曲率张量恒为零：

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa \equiv 0 \quad (\text{在绝对平行时空中}). \tag{21.1}$$

这个性质有一个令人高兴的结果，即它允许在**任何**时空中定义平行矢量场，这也正是绝对平行这个名字的由来. 由于黎曼–嘉当曲率张量为零是由式 (11.130) 中导数的对易性导致的，因此 $R_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa$ 为零可看成是绝对平行时空中的**比安基恒等式**. $\Lambda_\alpha{}^\beta(x)$ 的单值性使得我们可以在每一点上都可选取一个洛伦兹标架，在此标架中 $\Lambda_\alpha{}^\beta(x) = 1$，于是由式 (17.15) 有 $\overset{\Lambda}{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$. 因此，我们就可从式 (17.68) 中推断出，在此规范下仿射联络 $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ 同式 (17.67) 中的 $\overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda$ 是相一致的：

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \overset{h}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv h_\alpha{}^\lambda \partial_\mu h^\alpha{}_\nu \equiv -h^\alpha{}_\nu \partial_\mu h_\alpha{}^\lambda, \tag{21.2}$$

且挠率张量退化为式 (17.74) 中的非完整量 (object of anholonomy)：

$$S_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}\left(h_\alpha{}^\lambda \partial_\mu h^\alpha{}_\nu - h_\alpha{}^\lambda \partial_\nu h^\alpha{}_\mu\right) \equiv -\frac{1}{2}\left(h^\alpha{}_\nu \partial_\mu h_\alpha{}^\lambda - h^\alpha{}_\mu \partial_\nu h_\alpha{}^\lambda\right). \tag{21.3}$$

21.1　爱因斯坦作用量的挠率形式

由式 (11.146) 中黎曼–嘉当曲率张量的分解式我们知道，$R_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa$ 为零进一步意味着黎曼曲率张量可用扭曲张量表示为

$$-\bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\kappa = \bar{D}_\mu K_{\nu\lambda}{}^\kappa - \bar{D}_\nu K_{\mu\lambda}{}^\kappa - \left(K_{\mu\lambda}{}^\rho K_{\nu\rho}{}^\kappa - K_{\nu\lambda}{}^\rho K_{\mu\rho}{}^\kappa\right). \tag{21.4}$$

相应的标曲率为

$$\bar{R} = \bar{R}_{\mu\nu\lambda}{}^{\mu} g^{\nu\lambda} = -\bar{D}_{\mu} K_{\nu}{}^{\nu\mu} + \bar{D}_{\nu} K_{\mu}{}^{\nu\mu} + \left(K_{\mu}{}^{\nu\rho} K_{\nu\rho}{}^{\mu} + K_{\nu}{}^{\nu\rho} K_{\mu}{}^{\mu}{}_{\rho}\right), \tag{21.5}$$

或者，利用式 (11.114) 以及 $K_{\mu}{}^{\mu\nu} = 2S^{\nu}$ [参看式 (15.43)]，也可将它全部用挠率张量表示出来：

$$\bar{R} = -4\bar{D}_{\mu} S^{\mu} + \left(S_{\mu\nu\lambda} S^{\mu\nu\lambda} + 2S_{\mu\nu\lambda} S^{\mu\lambda\nu} - 4S^{\rho} S_{\rho}\right). \tag{21.6}$$

于是，在绝对平行时空中，爱因斯坦作用量 (15.8) 可重写为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E,S}} = -\frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left[-4\bar{D}_{\mu} S^{\mu} + \left(S_{\mu\nu\lambda} S^{\mu\nu\lambda} + 2S_{\mu\nu\lambda} S^{\mu\lambda\nu} - 4S^{\rho} S_{\rho}\right)\right]. \tag{21.7}$$

对此进行分部积分就给出

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E,S}} = -\frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} \left(S_{\mu\nu\lambda} S^{\mu\nu\lambda} + 2S_{\mu\nu\lambda} S^{\mu\lambda\nu} - 4S^{\rho} S_{\rho}\right), \tag{21.8}$$

这里我们已甩掉了如下的表面项：

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E,S,surface}} = \frac{1}{2\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \, 4\partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} S^{\mu}\right), \tag{21.9}$$

因为它对场方程并无贡献.

我们可以将拉格朗日密度按挠率 $S_{\mu\nu\lambda}$ 的不可约部分分解开来[2]. 挠率 $S_{\mu\nu\lambda}$ 的一个明显的不可约部分是它的非零的迹，即式 (15.43) 中的矢量 $S_{\mu} = S_{\mu\nu}{}^{\nu}$. 第二个不可约部分为无迹张量

$$t_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(S_{\mu\nu\lambda} + S_{\mu\lambda\nu}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{\mu\lambda} S_{\nu} + g_{\mu\nu} S_{\lambda} - 2g_{\nu\lambda} S_{\mu}\right). \tag{21.10}$$

其混合杨盘为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \mu & \nu \\ \hline \lambda & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \ . \tag{21.11}$$

第三个不可约部分则是由完全反对称的组合而给出的轴矢量

$$\begin{array}{|c|}\hline \mu \\ \hline \nu \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array} \quad : \quad a^{\mu} = \frac{1}{6} \mathrm{e}^{\mu\nu\lambda\kappa} S_{\nu\lambda\kappa}, \tag{21.12}$$

其中，$e^{\mu\nu\lambda\kappa}$ 为式 (11A.1) 中协变得列维–西维塔张量. 挠率张量则可从上述张量和矢量还原而得：

$$S_{\mu\nu\lambda} = \frac{2}{3}\left(t_{\mu\nu\lambda} - t_{\nu\mu\lambda}\right) - \frac{1}{3}\left(g_{\mu\lambda} S_{\nu} - g_{\nu\lambda} S_{\mu}\right) - e_{\mu\nu\lambda\kappa} a^{\kappa}. \tag{21.13}$$

作用量 (21.8) 中的三个不变量可用此三个不可约不变量 $t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda}$、$S_\mu S^\mu$ 和 $a_\mu a^\mu$ 表示为

$$S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\nu\lambda}=\frac{4}{3}t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda}+\frac{2}{3}S_\mu S^\mu-6a_\mu a^\mu,\quad S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\lambda\nu}=\frac{2}{3}t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{3}S_\mu S^\mu+6a_\mu a^\mu. \tag{21.14}$$

反过来我们有

$$t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda}=\frac{1}{2}S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{2}S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\lambda\nu}-\frac{1}{2}S_\mu S^\mu,\ a_\mu a^\mu=-\frac{1}{18}(S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\nu\lambda}-2S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\lambda\nu}). \tag{21.15}$$

于是，我们就可将式 (21.8) 中的作用量重新写为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E,S}}=-\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{8}{3}t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda}-\frac{8}{3}S_\mu S^\mu+6a_\mu a^\mu\right). \tag{21.16}$$

爱因斯坦理论的所有结果都可以从这个 $R_{\mu\nu\lambda\kappa}\equiv 0$ 爱因斯坦–嘉当时空中的作用量得到，在此时空中标架场 $h^\alpha{}_\mu$ 正是四个绝对平行矢量场.

然而，只有当将来的实验能发现与爱因斯坦理论的偏差，上述这一爱因斯坦理论的重塑才会令人感兴趣. 由于 $S_{\mu\nu\lambda}$ 是一个张量场，式 (21.16) 中的作用量并不需要一定要包含式 (21.6) 中所给出的那三个特定的不变量组合. 还有其他的不变组合[2]:

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E,S}}=\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}=-\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left(\gamma_1\,t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda}+\gamma_2\,S_\mu S^\mu+\gamma_3\,a_\mu a^\mu\right). \tag{21.17}$$

当然，这三个参数 γ_i 并不完全自由. 牛顿定律会给出它们之间的一个限制条件，因此这个扩展理论包含有两个自由参量. 这两个参量是可以确定下来的，比如通过对质点附近引力场作后牛顿展开.

利用式 (21.15)，式 (21.17) 中扩展的作用量可写为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}}=\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}=-\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\sigma_1S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\nu\lambda}+\sigma_2S_{\mu\nu\lambda}S^{\mu\lambda\nu}+\sigma_3S_\mu S^\mu\right), \tag{21.18}$$

其中

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\gamma_1-\frac{1}{18}\gamma_3,\quad \sigma_2=\frac{1}{2}\gamma_1+\frac{1}{9}\gamma_3,\quad \sigma_3=\gamma_2-\frac{1}{2}\gamma_1. \tag{21.19}$$

为了推导运动方程，我们可将作用量 (21.18) 改写为几种合适的形式，为了加以区别我们给它们分别加上不同的上标. 第一个为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}{}^{(1)}_{\mathrm{S}}=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}{}^{(1)}=-\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,S_{\mu\nu\lambda}\,P^{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'}\,S_{\mu'\nu'\lambda'}, \tag{21.20}$$

其中，张量 $P^{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'}$ 为逆变度规张量的组合：

$$P^{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'} = \sigma_1 g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\lambda\lambda'} + \sigma_2 g^{\mu\mu'} g^{\nu\lambda'} g^{\lambda\nu'} + \sigma_3 g^{\mu\mu'} g^{\nu\lambda} g^{\nu'\lambda'}. \tag{21.21}$$

第二种形式为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}{}_{\mathrm{S}}^{(2)} = -\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\, S_{\mu\nu\lambda}F^{\mu\nu\lambda}, \tag{21.22}$$

其中

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu\lambda} &\equiv \frac{\kappa}{2}\frac{\partial \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}}{\partial S_{\mu\nu\lambda}} = P^{[\mu\nu]\lambda,\mu'\nu'\lambda'} S_{\mu'\nu'\lambda'} \\ &= \sigma_1 S^{\mu\nu\lambda} + \frac{\sigma_2}{2}\left(S^{\mu\lambda\nu} - S^{\nu\lambda\mu}\right) + \frac{\sigma_3}{2}\left(g^{\nu\lambda}S^{\mu} - g^{\mu\lambda}S^{\nu}\right) = -F^{\nu\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{21.23}$$

跟通常一样，我们将括号内的指标进行了反对称化. 这个张量也可利用式 (21.13) 改写为

$$F^{\mu\nu\lambda} = \gamma_1\left(t^{\mu\nu\lambda} - t^{\nu\mu\lambda}\right) - \gamma_2\left(g^{\mu\lambda}S^{\nu} - g^{\nu\lambda}S^{\mu}\right) - \frac{\gamma_3}{3}e^{\mu\nu\lambda\kappa}a_{\kappa} = -F^{\nu\mu\lambda}. \tag{21.24}$$

利用 $F^{\mu\nu\lambda}$ 的非对称性，我们可将式 (21.22) 中的挠率张量利用式 (21.3) 替换为 $h_{\alpha\lambda}\partial_\mu h^{\alpha}{}_{\nu}$，并将作用量 (21.22) 也改写为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}{}_{\mathrm{S}}^{(3)} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}{}_{\mathrm{S}}^{(3)} = -\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\, h_{\alpha\lambda}\partial_\mu h^{\alpha}{}_{\nu}F^{\mu\nu\lambda}, \tag{21.25}$$

或者是

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}{}_{\mathrm{S}}^{(4)} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}{}_{\mathrm{S}}^{(4)} = -\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ h_{\alpha\lambda}\partial_\mu h^{\alpha}{}_{\nu}\, P^{[\mu\nu]\lambda,[\mu'\nu']\lambda'}\, h_{\alpha'\lambda'}\partial_{\mu'}h^{\alpha'}{}_{\nu'}, \tag{21.26}$$

其中，$P^{[\mu\nu]\lambda,[\mu'\nu']\lambda'}$ 为式 (21.21) 中的张量，只不过将 $\mu\nu$ 和 $\mu'\nu'$ 反对称化了.

为了能同爱因斯坦理论进行很好的对比，我们须在上述作用量上加上乘以因子 γ_0 的爱因斯坦作用量，然后考察以下引力场的拉格朗日密度：

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}} &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}} \ \equiv\ \gamma_0\,\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E}} + \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{S}} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\gamma_0\,\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}} + \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}\right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{\gamma_0}{2\kappa}\bar{R} - \frac{1}{2\kappa}\left(\gamma_1\, t_{\mu\nu\lambda}t^{\mu\nu\lambda} + \gamma_2\, S_\mu S^\mu + \gamma_3\, a_\mu a^\mu\right)\right], \end{aligned} \tag{21.27}$$

其中的下标 E 和 S 分别表示爱因斯坦项及其可能的挠率修正. 由于 $\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}$ 和 $\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}$ 在 $\gamma_1 = -8/3$，$\gamma_2 = 8/3$ 以及 $\gamma_3 = -6$ 时是一样的，上述参数化方案其实包含有冗余参数.

根据方程 (17.142)，引力场的能动张量可通过对场作用量作关于 $h_\alpha{}^\nu$ 的变分并对结果乘以 $h^{\alpha\mu}$ 而得到

$$\overset{\mathrm{f}}{\Theta}{}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\, h^{\alpha\mu}\frac{\delta \overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}}{\delta h^{\alpha}{}_{\nu}}. \tag{21.28}$$

由于在绝对平行表述中并不存在非完整量，于是在能动张量中也不会有类似于式 (17.155) 中自旋贡献的项，因此上述结果是正则能动张量，而不是对称的. 将式 (21.28) 用于作用量 (21.27) 中的爱因斯坦项上，该项只依赖于度规张量 $g_{\mu\nu}$，我们可将式 (21.28) 中的泛函导数 $h^{\alpha\mu}\delta\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}/\delta h^{\alpha}{}_{\nu}$ 确定为 $(1/2)\delta\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}_{\mathrm{E}}/\delta g_{\mu\nu}$，于是利用式 (17.147)，我们就得到它的结果为 $-(\gamma_0/\kappa)$ 乘以爱因斯坦张量 $\bar{G}^{\mu\nu}$.

现在，将式 (21.28) 的整个右手边定义为爱因斯坦–嘉当空间中的广义爱因斯坦张量 $\tilde{G}^{\mu\nu}$ 会比较方便，即我们令

$$\overset{\mathrm{f}}{\Theta}{}^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\kappa}\tilde{G}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa}\left(\gamma_0\bar{G}^{\mu\nu} + \tilde{\delta}_{\mathrm{S}}G_{\mathrm{S}}^{\mu\nu}\right), \tag{21.29}$$

其中

$$\frac{1}{\kappa}\Delta_{\mathrm{S}}G^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,h^{\alpha\mu}\left[\frac{\partial\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}}{\partial h^{\alpha}{}_{\nu}} - \partial_\sigma\frac{\partial\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}}{\partial\partial_\sigma h^{\alpha}{}_{\nu}}\right]. \tag{21.30}$$

对此项的一个贡献可以十分容易地由式 (21.25) 中作用量的表达式得到. 将此对 $h^{\alpha}{}_{\nu}$ 求导，我们就得

$$\frac{1}{\kappa}\Delta_{\mathrm{S}}^{(3)}G^{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa}\left(\Gamma_{\sigma\lambda\mu}F^{\sigma\lambda\nu} - h^{\alpha\mu}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\sqrt{-g}h_{\alpha\lambda}F^{\sigma\nu\lambda}\right). \tag{21.31}$$

正如式 (21.26) 中同一个作用量的表达式所显示的，$S_{\mu\nu\lambda}$ 又一次以对称的形式包含在 $F^{\mu\nu\lambda}$ 中. 这一事实就可将式 (21.25) 中的系数 1/2 消去. 将式 (12.161) 中的导数规则

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\sqrt{-g} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\mu} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\mu} - K_{\mu\nu}{}^{\mu} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\mu} + 2S_\nu \tag{21.32}$$

用于式 (21.31) 中的第二项，并进一步利用 $F^{\sigma\lambda\nu}$ 的反对称性，我们也可将它写为

$$\frac{1}{\kappa}\Delta_{\mathrm{S}}^{(3)}G^{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa}\left(S_{\sigma\lambda}{}^{\mu}F^{\sigma\lambda\nu} + S_{\sigma\lambda}{}^{\nu}F^{\sigma\lambda\mu} - D_\sigma F^{\sigma\nu\mu} - 2S_\sigma F^{\sigma\nu\mu}\right). \tag{21.33}$$

对 $\kappa^{-1}\Delta_{\mathrm{S}}G^{\mu\nu}$ 的另一项贡献则源于作用量 (21.20) 张量 $P^{\mu\nu\lambda,\mu'\nu'\lambda'}$ 对逆变度规 $g^{\mu\nu} = h^{\alpha\mu}h_{\alpha}{}^{\nu}$ 的依赖关系. 由式 (21.30) 我们得

$$\frac{1}{\kappa}\Delta_{\mathrm{S}}^{(1)}G^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}{}_{\mathrm{S}}^{(1)}}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{21.34}$$

它包含以下三项：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa}\Delta_{\mathrm{S}}^{(1)}G^{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa}[&\sigma_1\left(2S^{\mu}{}_{\lambda\kappa}S^{\nu\lambda\kappa} + S_{\lambda\kappa}{}^{\mu}S^{\lambda\kappa\nu}\right)\\ &+\sigma_2\left(S^{\mu}{}_{\lambda\kappa}S^{\nu\kappa\lambda} - S^{\mu\lambda\kappa}S_{\lambda\kappa}{}^{\nu} - S^{\nu\lambda\kappa}S_{\lambda\kappa}{}^{\mu}\right)\\ &+\sigma_3\left(S^{\mu}S^{\nu} + S^{\lambda\mu\nu}S_\lambda + S^{\lambda\nu\mu}S_\lambda\right)].\end{aligned} \tag{21.35}$$

最后一个贡献则是基于作用量 (21.18) 中 $\sqrt{-g}$ 的变分 [比较式 (17.145)]，这会给能动张量 (21.28) 增加额外的一项 $-g^{\mu\nu}\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{L}}_{\mathrm{S}}$，于是就会给爱因斯坦张量增加以下这项：

$$\frac{1}{\kappa}\varDelta^{(4)}G^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{S}}. \tag{21.36}$$

为了将所有这些项加起来，我们定义如下几个张量：

$$\begin{aligned}
H_1^{\mu\nu}&\equiv S^{\mu\lambda\kappa}S^{\nu}{}_{\lambda\kappa}=H_1^{\mathrm{T}\,\mu\nu},\\
H_2^{\mu\nu}&\equiv S^{\mu\lambda\kappa}S^{\nu}{}_{\kappa\lambda}=H_2^{\mathrm{T}\,\mu\nu},\\
H_3^{\mu\nu}&\equiv S^{\lambda\kappa\mu}S_{\kappa\lambda\nu}=H_3^{\mathrm{T}\,\mu\nu},\\
H_4^{\mu\nu}&\equiv S^{\mu\lambda\kappa}S_{\kappa\lambda}{}^{\nu}\neq H_4^{\mathrm{T}\,\mu\nu},\\
H_5^{\mu\nu}&\equiv S^{\mu}S^{\nu}=H_5^{\mathrm{T}\,\mu\nu},\\
H_6^{\mu\nu}&\equiv S^{\lambda\mu\nu}S_{\lambda}\neq H_6^{\mathrm{T}\,\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{21.37}$$

利用这些以及式 (21.23) 中的分解式，我们就可将式 (21.33) 括号中的前两项重新写为

$$S_{\sigma\lambda\mu}F^{\sigma\lambda\nu}+(\mu\leftrightarrow\nu)=2\sigma_1H_3^{\mu\nu}-\sigma_2(H_4^{\mu\nu}+H_4^{\mathrm{T}\,\mu\nu})+\frac{\sigma_3}{2}(H_6^{\mu\nu}+H_6^{\mathrm{T}\,\mu\nu}). \tag{21.38}$$

而式 (21.35) 右边括号中的项变为

$$\left[\sigma_1(2H_1^{\mu\nu}+H_3^{\mu\nu})+\sigma_2\left(H_2^{\mu\nu}-H_4^{\mu\nu}-H_4^{\mathrm{T}\,\mu\nu}\right)+\sigma_3\left(H_5^{\mu\nu}+H_6^{\mu\nu}+H_6^{\mathrm{T}\,\mu\nu})\right)\right]. \tag{21.39}$$

将以上所有的贡献以及物质的能动张量加在一起，我们最终得到了场方程

$$\frac{1}{\kappa}\tilde{G}_{\mu\nu}\equiv\frac{\gamma_0}{\kappa}\bar{G}_{\mu\nu}+\frac{1}{\kappa}\left[D_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu\mu}+2S_\lambda F^{\lambda}{}_{\nu\mu}+H_{\mu\nu}\right]+g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{S}}=\overset{\mathrm{m}}{\varTheta}_{\mu\nu}, \tag{21.40}$$

其中

$$H_{\mu\nu}=H_{\nu\mu}=2S_{\mu\sigma}{}^{\rho}F_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}-S_{\sigma\rho\nu}F^{\sigma\rho}{}_{\mu}. \tag{21.41}$$

这一结果可以通过以下方式加以验证. 我们注意到式 (21.41) 中张量的这两项具有如下分解式：

$$S_{\mu\sigma}{}^{\rho}F_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}=\sigma_1H_1^{\mu\nu}+\frac{\sigma_2}{2}(H_2^{\mu\nu}-H_4^{\mu\nu})+\frac{\sigma_3}{2}(H_5^{\mu\nu}+H_6^{\mu\nu}), \tag{21.42}$$

$$S_{\sigma\rho\nu}F^{\sigma\rho}{}_{\mu}=\sigma_1H_3^{\mu\nu}-\sigma_2H_4^{\mu\nu}+\sigma_3H_6^{\mu\nu}, \tag{21.43}$$

因此，它们的组合就为

$$H^{\mu\nu}=\sigma_1(2H_1^{\mu\nu}-H_3^{\mu\nu})+\sigma_2H_2^{\mu\nu}+\sigma_3H_5^{\mu\nu}, \tag{21.44}$$

这同式 (21.38) 和式 (21.39) 的差是一样的. 注意 $H^{\mu\nu}$ 是一个对称张量.

对于一个位于原点处的质量为 M 的点粒子，它的能动张量 $\overset{\mathrm{m}}{\Theta}_{\mu\nu}$ 是对称的且同对称能动张量 $\overset{\mathrm{m}}{T}_{\mu\nu}$ 是一致的. 利用式 (1.243) 中的表达式，该能动张量可明确写为

$$\overset{\mathrm{m}}{\Theta}{}_{\mu\nu} = Mc\,\delta_\mu{}^\nu \delta_\mu{}^0 \delta^{(3)}(x). \tag{21.45}$$

21.2 施瓦氏 (Schwarzschild) 解

令方程 (21.40) 的右边在除原点外空间中的任意一点均为零，并将下面这个空间各向同性的标架场代入：

$$h^\alpha{}_\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{H(r'')}c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{J(r'')} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{J(r'')} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{J(r'')} \end{pmatrix}, \tag{21.46}$$

就可得到一个在原点处有一个点源而在其他地方为真空的系统的球对称的解. 标架场 $h_\alpha{}^\mu$ 可通过对上述矩阵求逆而得到. 相应的度规 $g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu$ 则给出不变长度的表达式为

$$\mathrm{d}s^2 = H(r'')c^2(\mathrm{d}t)^2 - J(r'')[(\mathrm{d}r'')^2 + r''^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r''^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\phi)^2]. \tag{21.47}$$

此时，式 (21.2) 中的仿射联络只有很少几个矩阵元不为零. 不难知道，$\Gamma_{t\mu}{}^\nu$ 和 $\Gamma_{3\mu}{}^\nu$ 为零，$\Gamma_{\theta\mu}{}^\nu$ 只有一个非零元素为 $\cot\theta$，而 $\Gamma_{r\mu}{}^\nu$ 也只有对角元：

$$\Gamma_{r\mu}{}^\nu = \begin{pmatrix} \dot{h}(r'')/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{j}(r'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r'' \end{pmatrix}, \tag{21.48}$$

其中，$h \equiv \log H$, $j \equiv \log J$，式中的原点代表对 r'' 求导. 将场方程 (21.40) 乘以 κ，我们就得到不为零的对角元为

$$\bar{G}_t{}^t = -\frac{C}{J}\left\{\epsilon\ddot{h} + (1-2\epsilon)\ddot{j} + \frac{2}{r''}\left[\epsilon\dot{h} + (1-2\epsilon)\dot{j}\right] + \frac{\epsilon}{4}\dot{h}^2 + \frac{\epsilon}{2}\dot{h}\dot{j} + \frac{1-4\epsilon}{4}\dot{j}^2\right\}, \tag{21.49}$$

$$\bar{G}_r{}^r = -\frac{C}{2J}\left\{\frac{2}{r''}\left[(1-2\epsilon)\dot{h} + \dot{j}\right] + (1-2\epsilon)\dot{h}\dot{j} + \frac{\epsilon}{2}\dot{h}^2 + \frac{1}{2}\dot{j}^2\right\}, \tag{21.50}$$

$$\bar{G}_\theta{}^\theta = \bar{G}_\phi{}^\phi = \frac{1}{2}G_r{}^r + \frac{C}{2J}\left[(1-2\epsilon)\ddot{h} + \ddot{j} + \frac{1-7\epsilon/2}{2}\dot{h}^2 - \frac{1-4\epsilon}{2}\dot{h}\dot{j} - \frac{1}{4}\dot{j}^2\right], \tag{21.51}$$

其中

$$C \equiv \gamma_0 - \gamma_2 - \gamma_1/4, \quad \epsilon \equiv -(\gamma_1 + \gamma_2)/4C. \tag{21.52}$$

$\bar{G}_r{}^r + \bar{G}_\theta{}^\theta$ 为零 (质点所处的原点除外) 就给出了以下微分方程：

$$(1-2\epsilon)\ddot{h} + \ddot{j} + \frac{3}{r''}\left[(1-2\epsilon)\dot{h} + \dot{j}\right] + \frac{1}{2}\left(\dot{h} + \dot{j}\right)\left[(1-2\epsilon)\dot{h} + \dot{j}\right] = 0, \tag{21.53}$$

这可重写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r''}\left\{r''^3[(1-2\epsilon)\dot{h} + \dot{j}]\right\} + \frac{r''^3}{2}(\dot{h} + \dot{j})[(1-2\epsilon)\dot{h} + \dot{j}] = 0, \tag{21.54}$$

该方程的解为

$$(1-2\epsilon)\dot{h} + \dot{j} = \frac{1}{\sqrt{HJ}}\frac{c_1^2}{r''^3}, \tag{21.55}$$

其中，c_1^2 为一个积分常数. 而由 $G_t{}^t + 2G_\theta{}^\theta - 3G_r{}^r$ 等于零 (同样不包含质点所处的原点) 我们得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r''}\left\{r''^2[(1-3\epsilon)\dot{h} + 2\epsilon\dot{j}]\right\} + \frac{1}{2r''^2}(\dot{h} + \dot{j})[(1-3\epsilon)\dot{h} + 2\epsilon\dot{j}] = 0, \tag{21.56}$$

该方程的解为

$$(1-3\epsilon)\dot{h} + 2\epsilon\dot{j} = \frac{1}{\sqrt{HJ}}\frac{c_2}{r''^2}, \tag{21.57}$$

其中，c_2 为第二个积分常数.

组合 $(1-5\epsilon)\times$ 式 (21.55)+$2\epsilon\times$ 式 (21.57) 给出

$$(1-\epsilon)(1-4\epsilon)(\dot{h} + \dot{j}) = \frac{1}{\sqrt{HJ}}\left[(1-5\epsilon)\frac{c_1^2}{r''^3} + 2\epsilon\frac{c_2}{r''^2}\right], \tag{21.58}$$

或

$$\dot{\sqrt{HJ}} = \frac{1}{2(1-\epsilon)(1-4\epsilon)}\left[(1-5\epsilon)\frac{c_1^2}{r''^3} + 2\epsilon\frac{c_2}{r''^2}\right], \tag{21.59}$$

由此我们得

$$\sqrt{HJ} = \left[1 - \frac{1}{4}\frac{(1-5\epsilon)\bar{c}_1^2}{r''^2} - \epsilon\frac{\bar{c}_2}{r''}\right] = \left(1 + \frac{a_+}{2r''}\right)\left(1 - \frac{a_-}{2r''}\right), \tag{21.60}$$

其中，$\bar{c}_1^2 \equiv c_1^2/(1-\epsilon)(1-4\epsilon)$, $\bar{c}_2 \equiv c_2/(1-\epsilon)(1-4\epsilon)$，且

$$a_\pm = \sqrt{(1-5\epsilon)\bar{c}_1^2 + \epsilon^2\bar{c}_2^2} \mp \epsilon\bar{c}_2. \tag{21.61}$$

考虑到之前的关系式 $c_2 = 2c_1$ 的一个推广为 $\bar{c}_2 = 2\bar{c}_1$，我们有

$$a_\pm = \left[\sqrt{(1-\epsilon)(1-4\epsilon)} \mp 2\epsilon\right] \bar{c}_1. \tag{21.62}$$

将此代入式 (21.57) 就给出如下微分方程：

$$(1-3\epsilon)\dot{h} + 2\epsilon\dot{j} = \frac{2}{a_+ + a_-}\left(\frac{1}{1 - a_-/2r''} - \frac{1}{1 + a_+/2r''}\right)\frac{c_2}{r''^2}. \tag{21.63}$$

对此积分可得

$$H^{1-3\epsilon}J^{2\epsilon} = \left[\frac{1 - a_-/2r''}{1 + a_+/2r''}\right]^\nu, \quad \nu \equiv \frac{2c_2}{a_+ + a_-} = 2\sqrt{(1-\epsilon)(1-4\epsilon)}. \tag{21.64}$$

这第三个积分常数设为一是为了确保度规张量在无穷远处为闵可夫斯基型的.

结合式 (21.60)，我们得

$$H = \frac{(1 - a_-/2r'')^{(\nu-4\epsilon)/(1-5\epsilon)}}{(1 + a_+/2r'')^{(\nu+4\epsilon)/(1-5\epsilon)}}, \quad J = \frac{(1 + a_+/2r'')^{(2+\nu-6\epsilon)/(1-5\epsilon)}}{(1 - a_-/2r'')^{(-2+\nu+6\epsilon)/(1-5\epsilon)}}, \tag{21.65}$$

于是

$$HJ = (1 + a_+/2r'')^2(1 - a_-/2r'')^2. \tag{21.66}$$

令

$$p_\pm = \frac{\sqrt{(1-\epsilon)(1-4\epsilon)} \pm 2\epsilon}{1-5\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{(1-\epsilon)(1-4\epsilon)} \mp 2\epsilon} = \frac{\bar{c}_1}{a_\pm}, \tag{21.67}$$

我们就可将式 (21.67) 写为

$$H = \frac{(1 - a_-/2r'')^{2p_-}}{(1 + a_+/2r'')^{2p_+}}, \quad J = \frac{(1 - a_-/2r'')^{2(1-p_-)}}{(1 + a_+/2r'')^{-2(1+p_+)}}. \tag{21.68}$$

现在我们加上一个条件，即如下渐进行为：

$$H = 1 - \frac{p_+a_+ + p_-a_-}{r''} + \cdots \tag{21.69}$$

给出牛顿定律. 这样就确定出

$$p_+a_+ + p_-a_- = 2\bar{c}_1 = \frac{2MG}{c^2}. \tag{21.70}$$

这个推广的理论中的参数 ϵ 改变了爱因斯坦理论中度规的后牛顿近似. 一般来讲，可用三个常数 α、β 和 γ 来将度规的渐进部分参数化地表示为

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - 2\alpha\frac{MG}{r''c^2} + 2\beta\frac{M^2G^2}{r''^2c^4} + \cdots\right)c^2\mathrm{d}t^2 \\ &- \left(1 + 2\gamma\frac{MG}{r''c^2} + 2\delta\frac{M^2G^2}{r''^2c^4} + \cdots\right)(\mathrm{d}r''^2 + r''^2\mathrm{d}\theta^2 + r''^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \end{aligned} \tag{21.71}$$

将 H 和 J 展开到 $1/r''$ 的高阶项，就得到

$$\begin{aligned}H &= 1-\frac{2GM}{c^2r''}+\frac{1}{4}\left(a_+^2p_+-a_-^2p_-+2a_-^2p_-^2+4a_+a_-p_+p_-+2a_+^2p_+^2\right)\left(\frac{GM}{c^2r''}\right)^2+\cdots\\ &= 1-\frac{2GM}{c^2r''}+2\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{GM}{c^2r''}\right)^2+\cdots,\end{aligned}\tag{21.72}$$

以及

$$\begin{aligned}J &= 1+(a_+-a_-+a_+p_++a_-p_-)\frac{GM}{c^2r''}+\frac{1}{4}\left[a_-^2+a_+^2-4a_-a_+(1+p_+-p_--p_+p_-)\right.\\ &\quad\left.-3(a_-^2p_--a_+^2p_+)+2(a_-^2p_-^2+2a_+^2p_+^2)\right]\left(\frac{GM}{c^2r''}\right)^2+\cdots\\ &= 1+(1-2\epsilon)\frac{2GM}{c^2r''}+2\left[\frac{3}{4}(1-3\epsilon+8\epsilon^2/3)\right]\left(\frac{GM}{c^2r''}\right)^2+\cdots.\end{aligned}\tag{21.73}$$

通过同式 (21.71) 进行比较，我们就确定出了相应的后牛顿近似参数为

$$\beta=1-\frac{1}{2}\epsilon,\quad \gamma=1-2\epsilon,\quad \delta=\frac{3}{4}\left(1-3\epsilon+8\epsilon^2/3\right).\tag{21.74}$$

现在，我们来验证，这两个积分常数 $\bar{c}_1$ 和 $\bar{c}_2$ 就像我们在方程 (21.62) 中所预计的那样满足关系 $\bar{c}_2=2\bar{c}_1$. 将式 (21.55) 和式 (21.57) 结合，我们发现

$$\dot{h}=\frac{1}{\sqrt{HJ}}\left(\frac{\bar{c}_2}{r''^2}-2\epsilon\frac{\bar{c}_1^2}{r''^3}\right),\quad \dot{j}=\frac{1}{\sqrt{HJ}}\left[(1-3\epsilon)\frac{\bar{c}_1^2}{r''^3}-(1-2\epsilon)\frac{\bar{c}_2}{r''^2}\right].\tag{21.75}$$

将此关系代入 $\bar{G}_r{}^r=0$ 的方程 (21.50)，我们得

$$\bar{G}_r{}^r=-\frac{C}{2J}\frac{1}{HJ}(1-\epsilon)(1-4\epsilon)\left(2\bar{c}_1^2-\frac{1}{2}\bar{c}_2^2\right),\tag{21.76}$$

这就给出 $\bar{c}_2=2\bar{c}_1$.

现在还需确定方程 (21.49)~(21.51) 中的参数 C. 为此，我们取大 r''，根据式 (21.72) 和式 (21.73)，有

$$H=-\frac{2GM}{c^2r''}+\cdots,\qquad J=1+(1-2\epsilon)\frac{2GM}{c^2r''}+\cdots,\tag{21.77}$$

并考虑 $\mu=\nu=t$ 时的场方程 (21.40)

$$\frac{1}{\kappa}\tilde{G}_t{}^t=Mc\,\delta(x'').\tag{21.78}$$

这个点源将原来为零的表达式 (21.56) 变为

$$\frac{C}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r''}(r''^2\dot{h})+\frac{1}{2r''^2}\dot{h}(\dot{h}+\dot{j})=\kappa Mc\frac{\delta(r'')}{4\pi},\tag{21.79}$$

其中，我们将 $\delta^{(3)}(x'')$ 替换为 $\delta(r'')/4\pi r''^2$. 我们知道，库仑式的拉普拉斯方程为

$$-\Delta\frac{1}{r} = 4\pi\delta^{(3)}(x). \tag{21.80}$$

在球坐标下，这变为

$$-\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\delta(r), \tag{21.81}$$

通过对此方程作从 0 到一个小的非零的 r_0 的积分并在左边进行分部积分操作，我们就可以很容易对此加以验证. 因此，这样一来，它的一个结果就是，$r'' \neq 0$ 处齐次方程 (21.56) 的解 (21.57) 在 $r'' = 0$ 处会多一个非其次部分

$$\frac{C}{J}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r''}(r''^2\dot{h}) + \frac{1}{2r''^2}\dot{h}(\dot{h}+\dot{j}) = \frac{1}{\sqrt{HJ}}\frac{Cc_2}{J}\delta(r''). \tag{21.82}$$

由于 H 和 J 在原点处的取值为一，同式 (21.79) 进行比较就可确定出 $Cc_2 = \kappa Mc/4\pi = 2G_\mathrm{N}M/c^2$ [参看式 (15.9)]，或

$$Cc_2 = C\bar{c}_2(1-\epsilon)(1-4\epsilon) = C\,2\bar{c}_1(1-\epsilon)(1-4\epsilon) = 2\frac{G_\mathrm{N}M}{c^2}. \tag{21.83}$$

将式 (21.70) 中的 $\bar{c}_1 = GM/c^2$ 代入，我们知常数 C 必满足如下关系：

$$C(1-\epsilon)(1-4\epsilon) = (c_0 - c_2 - c_1/4)(1-\epsilon)(1-4\epsilon) = 1. \tag{21.84}$$

关于最近绝对平行几何方面的工作请参看文献 [3].

文献与注记

[1] A. Einstein, *Auf die Riemann-Metrik und den Fernparallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie*, Math. Ann. **102**, 685 (1930).
可从以下网址下载相应的翻译文本：
http://www.lrz-muenchen.de/~aunzicker/ae1930.html.

[2] K. Hayashi and T. Shirafuji, Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979).

[3] A.A. Sousa, J.S. Moura, and R.B. Pereira, *Energy and Angular Momentum in an Expanding Universe in the Teleparallel Geometry*, (arXiv:gr-qc/0702109);
Yu-Xiao Liu, Zhen-Hua Zhao, Jie Yang, Yi-Shi Duan,*The total energy-momentum of the universe in teleparallel gravity*, (arXiv:0706.3245);
R. Ferraro and F. Fiorini, *Modified teleparallel gravity: inflation without inflaton*, Phys. Rev. D **75**, 084031 (2007) (arXiv:gr-qc/0610067);
E.E. Flanagan and E. Rosenthal, *Can Gravity Probe B Usefully Constrain Torsion Gravity Theories?*, Phys. Rev. D **75**, 124016 (2007);
R. Ferraro and F. Fiorini, *Modified Teleparallel Gravity: Inflation without an Inflaton*,

Phys. Rev. D **75**, 084031 (2007);

M. Sharif and M.J. Amir, *Teleparallel Versions of Friedmann and Lewis-Papapetrou Spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **38**, 1735 (2006);

M. Leclerc, *One-parameter Teleparallel Limit of Poincaré Gravity*, Phys. Rev. D **72**, 044002 (2005).

也请参看网页：

http://prola.aps.org/forward/PRD/v19/i12/p3524_1.

第 22 章　呈 展 引 力

Man is equally incapable of seeing the nothingness
from which he emerges and the infinity in which he is engulfed.
Blaise Pascal (1623~1662)

在方程 (12.42) 中我们已引入普朗克长度 $l_{\rm P} \approx 1.616 \times 10^{-33}$cm 作为引力物理的基本长度尺度. 我们也看到，将有挠弯曲时空看作是晶格常数为 $l_{\rm P}$ 的含缺陷的晶体这一观点同实验也没有任何冲突. 事实上，构造一个可以描述更小尺度上的宇宙特性的理论并没有实际的物理意义. 自伽利略时代起，这样的理论探讨就落入哲学的范畴，甚至是宗教. 科学发展的历史证明，当对越来越短的尺度进行探测时，自然界总是不断地用新的发现让我们一次次地感到惊讶. 到目前为止，所有以前宣称是**终极理论** 的理论最终都被完全意想不到的发现所推翻.

目前最广为人知的宣称为终极理论的例子就是弦论. 数学上，这些理论可以描述从宇宙尺度跨越普朗克 (trans-Planckian) 到零尺度这样广阔的范围. 在实验可达的能量范围内，这些理论都需要一个大的额外的时空维数，而它所含效应目前来讲还是不可观测的. 而且这些理论预言了很多粒子，却很遗憾在自然中一个也没有找到. 特别是，基本粒子的弦表示只有在存在**泛频**(overtones) 时才有意义，当然，所有的弦都有泛频. 然而，在弦论中，这些泛频全部处于无法到达的普朗克区域. 连已观测到的低能粒子谱都无法正确地解释，很不可理解如何有人会相信这些理论对超高能区的预言.

弦理论的一个重要的特征就是它预言了在跨普朗克区域内的**所有**能量上洛伦兹不变性都是有效的. 在本章我们将指出，从这样一个角度来说，其实还有一个完全不同的可能的方案.

22.1　宇宙晶体中的引力

现在，仅仅因为好玩儿，我们假定我们生活在一个具有普朗克长度量级晶格常数的宇宙晶体中 [1]. 不过，到目前为止我们无法看到这一点，而且在未来很长一段时间内也不会. 这一假设并不会使所有目前的相对论性物理定律遭到任何显著的破坏. 引力及其几何描述都源于这个**宇宙晶体**中不同的塑性力. 所观察到的时空的曲率将可看作是该晶体中旋错存在的标志. 物质则是这些旋错缺陷的源[2].

为了简便起见，我们来用这种方法构造一个无挠系统. 如果宇宙晶体有一个无穷小的形变

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + u^\mu(x), \tag{22.1}$$

则相应的应变能为

$$\mathcal{A} = \frac{\mu}{4} \int \mathrm{d}^4x \, (\partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu)^2, \tag{22.2}$$

其中，μ 为某个弹性常数. 为了简化计算，我们假定第二个可能的弹性常数，即泊松比，为零. 如果上述形变部分为塑性形变，则宇宙晶体含有由 Volterra 曲面所定义的缺陷，在此曲面上晶格结构被切断. 于是位移矢量场变成多值的. 于是，宇宙晶体的欧几里得作用量就是式 (10.9) 中晶体能量 (当然不包含 λ 项) 在时空中的推广：

$$\mathcal{A} = \mu \int \mathrm{d}^4x \, (u_{\mu\nu} - u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu})^2, \tag{22.3}$$

其中，$u_{\mu\nu} \equiv (\partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu)/2$ 为弹性应变张量，而 $u^p_{\mu\nu}$ 为塑性应变张量. 在第 9.11 节中我们讨论过，塑性应变张量是塑性形变的规范场. 该能量密度在单值**缺陷规范变换**[式 (10.19) 和式 (10.20) 的连续统极限]

$$u_{\mu\nu}{}^{\mathrm{p}} \to u_{\mu\nu}{}^{\mathrm{p}} + (\partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu)/2, \quad u_\mu \to u_\mu + \lambda_\mu \tag{22.4}$$

下是不变的. 物理上，这表示缺陷不受晶体弹性形变的影响. 只有多值规范函数 λ_μ 会改变塑性规范场 $u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}$ 中的缺陷构成.

通过引入辅助对称应力张量场 $\sigma_{\mu\nu}$，我们现在可将作用量 (22.3) 改写为如下的正则形式 [类似于式 (10.15)]：

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{4\mu} \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}(u_{\mu\nu} - u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}) \right]. \tag{22.5}$$

通过分部积分，并对 u_μ 求极值，作用量中的第二项给出

$$\partial_\nu \sigma^{\mu\nu} = 0. \tag{22.6}$$

作为一个比安基恒等式，这可通过下面这个关于式 (10.17) 的推广来加以保证：

$$\sigma_{\mu\nu} = \epsilon_\mu{}^{\kappa\lambda\sigma} \epsilon_\nu{}^{\kappa\lambda'\sigma'} \partial_\lambda \partial_{\lambda'} \chi_{\sigma\sigma'}. \tag{22.7}$$

将式 (22.7) 代入式 (22.5)，我们得到类似于式 (10.18) 的表达式:

$$\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{1}{4\mu} \left[\epsilon^{\mu\kappa\lambda\sigma} \epsilon^{\nu\kappa\lambda'\sigma'} \partial_\lambda \partial_{\lambda'} \chi_{\sigma\sigma'} \right]^2 - \mathrm{i}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\sigma} \epsilon^{\mu\kappa\lambda'\sigma'} \partial_\lambda \partial_{\lambda'} \chi_{\sigma\sigma'} u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu} \right\}. \tag{22.8}$$

对此进一步作分部积分，得

$$\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{4\mu}\left[\epsilon^{\mu\kappa\lambda\sigma}\epsilon^{\nu\kappa\lambda'\sigma'}\partial_\lambda\partial_{\lambda'}\chi_{\sigma\sigma'}\right]^2-\mathrm{i}\chi_{\sigma\sigma'}\left[\epsilon^{\sigma\kappa\lambda\nu}\epsilon^{\sigma'\kappa\lambda'\mu}\partial_\lambda\partial_{\lambda'}u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}\right]\right\}. \tag{22.9}$$

现在，这个作用量就给出一个双规范理论，该理论在缺陷规范变换 (22.4) 和应力规范变换

$$\chi_{\sigma\tau}\to\chi_{\sigma\tau}+\partial_\sigma\Lambda_{\sigma'}+\partial_\tau\Lambda_\sigma \tag{22.10}$$

下是不变的. 此作用可进一步写为

$$\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{4\mu}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}-\mathrm{i}\chi_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\right\}, \tag{22.11}$$

其中，$\eta_{\mu\nu}$ 为式 (9.97) 中缺陷密度 η_{ij} 在四维中的推广：

$$\eta_{\mu\nu}=\epsilon_\mu{}^{\kappa\lambda\sigma}\epsilon_{\nu\kappa}{}^{\lambda'\tau}\partial_\lambda\partial_{\lambda'}u^{\mathrm{p}}_{\sigma\tau}. \tag{22.12}$$

它在缺陷规范变换 (22.4) 下是不变的，且满足如下守恒律：

$$\partial_\nu\eta^{\mu\nu}=0. \tag{22.13}$$

将 $u^{\mathrm{p}}_{\sigma\sigma'}$ 替换为 1/2 的式 (12.20) 中的度规场 $g_{\mu\nu}$，并借助于式 (12.30)，我们就发现张量 $\eta_{\mu\nu}$ 可看作是度规张量 $g_{\mu\nu}$ 相应的爱因斯坦张量.

现在我们来从作用量 (22.11) 中消去应力规范场. 为此我们利用式 (1A.23) 中两个列维–西维塔张量的乘积关系将应力场 (22.7) 重新写为 [比较式 (10.23)]

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}=&\epsilon_\mu{}^{\kappa\lambda\sigma}\epsilon_\nu{}^{\kappa\lambda'\tau}\partial_\lambda\partial_{\lambda'}\chi_{\sigma\tau}\\=&-(\partial^2\chi_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu\chi_\lambda{}^\lambda-\partial_\mu\partial_\lambda\chi_\mu{}^\lambda-\partial_\nu\partial_\lambda\chi_\mu{}^\lambda)+\eta_{\mu\nu}(\partial^2\chi_\lambda{}^\lambda-\partial_\lambda\partial_\kappa\chi^{\lambda\kappa}).\end{aligned} \tag{22.14}$$

引入场量 $\phi_\mu{}^\nu\equiv\chi_\mu{}^\nu-\dfrac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu\chi_\lambda{}^\lambda$ 并取希尔伯特规范 $\partial^\mu\phi_\mu{}^\nu=0$，应力张量就退化为

$$\sigma_{\mu\nu}=-\partial^2\phi_{\mu\nu}, \tag{22.15}$$

且任意分布的缺陷系统的作用量变为

$$\mathcal{A}=\int \mathrm{d}^4x\left\{\frac{1}{4\mu}\partial^2\phi^{\mu\nu}\partial^2\phi_{\mu\nu}+\mathrm{i}\phi_\mu{}^\nu\left(\eta^\mu{}_\nu-\frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu\eta^\lambda{}_\lambda\right)\right\}. \tag{22.16}$$

对 $\phi^{\mu\nu}$ 取极值就给出了任意分布的缺陷间的相互作用 [这类似于式 (10.28)]：

$$\mathcal{A}=\mu\int \mathrm{d}^4x\left(\eta^\mu{}_\nu-\frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu\eta^\lambda{}_\lambda\right)\frac{1}{(\partial^2)^2}(\eta_\mu{}^\nu-\tfrac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu\eta^\lambda{}_\lambda). \tag{22.17}$$

然而，这并不是黎曼时空中的爱因斯坦作用量. 只有当分母中的导数项 $(\partial^2)^2$ 替换为 $\sigma_{\mu\nu}(-\partial^2)\sigma^{\mu\nu}$，也即式 (22.17) 中的 $(\partial^2)^2$ 变为 $-\partial^2$，才有可能得到爱因斯坦作用量. 如果是这样的话，通过对指标重新进行整理，我们就得到如下的相互作用：

$$\mathcal{A}=\mu\int \mathrm{d}^4x\,\left(\eta^{\mu}{}_{\nu}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\eta^{\lambda}{}_{\lambda}\right)\,\frac{1}{-\partial^2}\eta_{\mu}{}^{\nu}. \tag{22.18}$$

缺陷密度 $\eta_{\mu\nu}$ 对塑性规范场 $u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}$ 的依赖关系同式 (22.14) 中应力张量同应力规范场的关系式是一样的，即

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}=&\epsilon_{\mu}{}^{\kappa\lambda\sigma}\epsilon_{\nu}{}^{\kappa\lambda'\tau}\partial_\lambda\partial_{\lambda'}\,u^{\mathrm{p}}_{\sigma\tau}.\\=&-(\partial^2u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu u^{\mathrm{p}\lambda}_{\lambda}-\partial_\mu\partial_\lambda u^{\mathrm{p}\lambda}_{\mu}-\partial_\nu\partial_\lambda u^{\mathrm{p}\lambda}_{\mu})+\eta_{\mu\nu}(\partial^2u^{\mathrm{p}\lambda}_{\lambda}-\partial_\lambda\partial_\kappa u^{\mathrm{p}\lambda\kappa}).\end{aligned} \tag{22.19}$$

如果我们引入辅助场 $w^{\mathrm{p}\nu}_{\mu}\equiv u^{\mathrm{p}\nu}_{\mu}-\dfrac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}u^{\mathrm{p}\lambda}_{\lambda}$, 并选取希尔伯特规范 $\partial^\mu w^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}=0$，则缺陷密度退化为

$$\eta_{\mu\nu}=-\partial^2w^{\mathrm{p}}_{\mu\nu},\quad \eta_{\mu}{}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}\eta^{\lambda}{}_{\lambda}=-\partial^2u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu}, \tag{22.20}$$

且式 (22.18) 中任意分布的缺陷间的相互作用将变为

$$\mathcal{A}=\mu\int \mathrm{d}^4x\,u^{\mathrm{p}}{}_{\mu\nu}(x)\eta^{\mu\nu}(x). \tag{22.21}$$

如果我们令弹性常数 μ 等于 $1/4\kappa$，其中，κ 为式 (15.9) 中的引力常数，则式 (22.21) 同线性化了的爱因斯坦–希尔伯特作用量

$$\mathcal{A}=-\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\bar{R} \tag{22.22}$$

是相一致的. 确实，在线性近似 $g_{\mu}{}^{\nu}=\delta_{\mu}{}^{\nu}+h_{\mu}{}^{\nu}$ 中，$|h_{\mu}{}^{\nu}|\ll 1$，克里斯托夫符号可近似写为

$$\bar{\varGamma}_{\mu\nu}{}^{\lambda}\approx\frac{1}{2}\left(\partial_\mu h_{\nu\lambda}+\partial_\nu h_{\mu\lambda}-\partial_\lambda h_{\mu\nu}\right), \tag{22.23}$$

于是黎曼曲率张量变为

$$\bar{R}_{\mu\nu\lambda\kappa}\approx\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\partial_\lambda h_{\nu\kappa}-\partial_\nu\partial_\kappa h_{\mu\lambda}-(\mu\leftrightarrow\nu)\right], \tag{22.24}$$

这同我们在式 (11.151) 中直接看到的一样. 这就使得里奇张量为

$$\bar{R}_{\mu\kappa}\approx\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda h_{\lambda\kappa}+\partial_\kappa\partial_\lambda h_{\lambda\mu}-\partial_\mu\partial_\kappa h-\partial^2h_{\mu\kappa}), \tag{22.25}$$

其中，$h\equiv h_{\lambda}{}^{\lambda}$ 为矩阵 $h_{\mu\nu}$ 的迹. 相应的标曲率为

$$\bar{R}\approx-(\partial^2h-\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}). \tag{22.26}$$

将此同式 (22.25) 相结合，我们就得到了相应的爱因斯坦张量

$$\begin{aligned}\bar{G}_{\mu\kappa}=&\bar{R}_{\mu\kappa}-\frac{1}{2}g_{\mu\kappa}\bar{R}\\\approx&-\frac{1}{2}(\partial^2h_{\mu\kappa}+\partial_\mu\partial_\kappa h-\partial_\mu\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\kappa}-\partial_\kappa\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\mu})+\frac{1}{2}\eta_{\mu\kappa}(\partial^2h-\partial_\nu\partial_\lambda h^{\nu\lambda}).\end{aligned} \tag{22.27}$$

这可写为四维形式的双旋度

$$\bar{G}_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\delta}{}^{\nu\lambda}\epsilon_{\kappa}{}^{\delta\sigma\tau}\partial_\nu\partial_\sigma h_{\lambda\tau}, \tag{22.28}$$

而这可以通过利用等式 (1A.23) 加以验证.

于是线性近似下的爱因斯坦–希尔伯特作用量为

$$\mathcal{A} \approx \frac{1}{4\kappa}\int \mathrm{d}^4x\, h_{\mu\nu}G^{\mu\nu}. \tag{22.29}$$

考虑到之前所建立的塑性场同度规场以及缺陷密度同爱因斯坦张量之间的等价性，我们可看出，如果 $\mu = 1/4\kappa$ 的话，式 (22.21) 中的缺陷相互作用确实正是爱因斯坦–希尔伯特作用量 (22.22) 的线性形式.

然而，具有弹性能 (22.3) 的宇宙晶体并不会给出式 (22.18) 中的作用量. 不过，我们很容易对此进行修正以使其得以满足. 我们只需额外引入两个导数项而给宇宙晶体加入高阶弹性能

$$\mathcal{A}' = \mu\int \mathrm{d}^4x\,[\partial(u_{\mu\nu} - u^{\mathrm{p}}_{\mu\nu})]^2 \tag{22.30}$$

即可. 它会将式 (22.5) 中能量的正则形式里的 $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ 变为 $\sigma_{\mu\nu}(-\partial^2)\sigma^{\mu\nu}$. 而这可从相互作用 (22.17) 中的分母中移除一个 $-\partial^2$，而这正是我们想要的.

弹性能由高阶导数作用量 (22.30) 所支配的宇宙晶体称为**松散宇宙晶体**(floppy world crystal). 于是我们之前已证明，松散宇宙晶体是可以构造出一个具有爱因斯坦–希尔伯特型作用量的黎曼时空的.

宇宙晶体这种松散特性有一个十分重要的物理后果. 如果我们计算位移场 $u_\mu(x)$ 的关联函数，

$$\langle u_\mu(x)u_\nu(x')\rangle = g_{\mu\nu}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} \approx -\frac{1}{8\pi^2}\log(|x-x'|a), \tag{22.31}$$

我们发现它的长程行为是呈 $|x-x'|$ 的对数. 这意味着，场 $u_\mu(x)$ 的波动是相当剧烈的，剧烈到在大的距离上晶体的方向完全丧失. 这一现象同二维中的一般弹性晶体的行为相类似. 这些二维晶体的关联函数在傅里叶空间中为 $1/k^2$，因此相应的实空间关联函数

$$\langle u_i(x)u_j(x')\rangle = \delta_{ij}\int \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} \approx -\frac{1}{2\pi}\log(|x-x'|a) \tag{22.32}$$

具有对数行为. 这说明如果一个二维晶体想要处于一个有序态的话，必须允许存在于垂直的第三维上的波动. 否则晶格序只能存在短距离内，且并不会显现出典型的 δ 函数类型的布拉格峰，而只是幂率型的峰.

另一个著名的例子是薄层液氦超流众序参量的相位涨落. 这一涨落破坏了低温有序相，从而导致了所说的半长程有序态[3, 4].

关于宇宙晶体更多的工作请参看文献 [5].

22.2 源于闭合 Friedmann 宇宙中物质和辐射涨落的引力

1967 年，Sacharov 提出一个很有意思的构想[6, 7]，即几何本身并不具有动力学，而时空的刚度完完全全归因于宇宙中所有量子场的真空涨落. 每个涨落都会给出一个爱因斯坦作用量，这一作用量正比于 R 以及所有可能的由 $R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ 的高阶项缩并成的标量，例如，R^2、$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$、$R_{\mu\nu\lambda\kappa}R^{\mu\nu\lambda\kappa}$、$R^3$ 等. 另外，它们还给出一个不含 R 的宇宙项. 它的系数以及线性项和二次项的系数具有紫外发散，但如果上述所有的涨落都来源于可重整化的量子场论，那么所有的发散都将会被减掉，而只留下可由实验来确定的有限值. 关于重整化手续，我们已经在方程 (15.12) 的上下文中加以了讨论.

这个不含 R 的宇宙项使得引力作用量 (15.8) 变为

$$\overset{\mathrm{f}}{\mathcal{A}}= -\frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R+2\lambda), \tag{22.33}$$

其中，常数 λ 就是所说**宇宙常数**(cosmological constant). 它将引力场的能动张量由 $-(1/\kappa)G_{\mu\nu}$ 变为 $-(1/\kappa)\left(G_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu}\right)$.

在计算基本场涨落的效应时，我们会发现，对应于作用量密度

$$\varLambda \equiv \frac{\lambda}{\kappa} = \frac{\lambda\, c^3}{8\pi G_{\mathrm{N}}} \tag{22.34}$$

会有一个加于宇宙常数上的贡献，其量级为 $\pm\hbar/l_{\mathrm{P}}^4$，其中 l_{P} 为普朗克长度. 对于玻色子，这个数为正，而对于费米子则为负，这反映出在真空中所有负能态都将被填满.

该常数的大小远远大于目前实验上的估计. 文献中，人们一般通过下式来估算此无量纲常数：

$$\varOmega_{\lambda 0} \equiv \frac{\lambda\, c^2}{3H_0^2}, \tag{22.35}$$

其中，H_0 为**哈勃常数**，它表征宇宙膨胀的速度，根据**哈勃定律**，这一速度是离地球距离 r 的函数：

$$v = H_0 r. \tag{22.36}$$

H_0 的倒数大约就等于宇宙的年龄

$$H_0^{-1} \approx 14\times 10^9\,\text{年}. \tag{22.37}$$

目前对远距离超新星观测数据的拟合以及其他天文数据对此给出的估计值为[8]

$$\Omega_{\lambda 0} \equiv 0.68 \pm 0.10. \tag{22.38}$$

这一结果说明，实验上所确定的 Λ 为

$$\Lambda = \Omega_{\lambda 0} \frac{3H_0^2}{c^2} \frac{l_{\mathrm{P}}^2}{8\pi} \approx 10^{-122} \frac{\hbar}{l_{\mathrm{P}}^4}. \tag{22.39}$$

“自然”作用量密度 $\hbar/l_{\mathrm{P}}^4$ 前的这个如此之小的系数只有在玻色子和费米子的贡献几乎完美相消的情况的下才会出现. 这一抵消就是为什么有些学者认为宇宙存在破缺的超对称性的主要原因，在这一对称性中每个玻色子都有一个费米子同它对应. 到目前为止，已知的粒子谱并没有显示出任何这样的对称性的迹象. 因此，我们需要采用另一个目前还不了解得机制来对此加以解释.

对于 Sacharov 呈展引力构想，一个简单的力学模型是一个极其薄的塑料袋内盛满了水. 塑料袋代表几何，它本身并没有任何动力学. 它的所有的运动都决定于它所盛的水的动力学.

Sacharov 的构想十分有吸引力. 然而，很不幸，按照他的思路对呈展引力作用量进行计算的话需要知道自然界所有的基本场以及它们在任意短尺度上的特性. 而这永远是不可能的. 另外，所有的复合粒子的真空涨落也会有贡献. 这包括，比方说，所有元素周期表上的元素，如金、铂等. 因此，按 Sacharov 的方法来计算真空能所碰到的困难就类似于将集合论运用于所有集合的集合上所遇到的困难一样.

只有运用可重整化的量子场论来描述基本粒子，才能避免这一问题. 可重整化特性对于消除理论对未知超短距离上物理特性的依赖性是不可或缺的，而这种超短距离上的特性的影响又是无法加以猜测的. 如同我们在方程 (15.12) 的上下文中所讨论的，在可重整化理论中，真空能始终是一个自由的参数.

文献与注记

[1] H. Kleinert, *Gravity as Theory of Defects in a Crystal with Only Second-Gradient Elasticity*, Ann. d. Physik, **44**, 117(1987) (`kl/172`).

[2] 关于宇宙晶体中为什么不存在挠率的一个可能的解释，请参阅：
H. Kleinert and J. Zaanen, *World Nematic Crystal Model of Gravity Explaining the Absence of Torsion*, Phys. Lett. A **324**, 361 (2004) (gr-qc/0307033).

[3] V.L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1971), Sov. Phys. JETP 34, 610 (1972); J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).

[4] H. Kleinert, *Gauge fields in Condensed Matter*, Vol. I: *Superflow and Vortex Lines, Disorder Fields, Phase Transitions*, World Scientific, Singapore, 1989 (`kl/b1`).

[5] M. Danielewski, *The Planck-Kleinert Crystal*, Z. Naturfoschung **62a**, 546 (2007).

[6] A.D. Sacharov, DAN SSSR **177**, 70, (1967). Reprinted in Gen. Rel. Grav. **32**, 365, (2000).

[7] 关于基于 Sacharov 构想的宇宙模型的讨论，参阅：
H. Kleinert and H.-J. Schmidt, *Cosmology with Curvature-Saturated Gravitational Lagrangian* $R/(1+l^4)^{1/2}$, Gen. Rel. Grav. **34**, 1295 (2002) (gr-qc/0006074).

[8] 对于宇宙学常数的数据，请参看以下网址：
http://super.colorado.edu/˜michaele/Lambda/links.html.

[9] J. Lense and H. Thirring, Phys. Zeitschr. **19**, 156 (1918).

索　　引

《现代物理基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

书名	作者	出版时间
1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元，侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树，等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)	梁灿彬，周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮，等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁，陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘 辽，等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元，等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡，李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04

31. 高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03
33. 量子计算与量子信息原理	Giuliano Benenti 等著	
——第一卷：基本概念	王文阁, 李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体	B. M. 弗尔曼, И. M. 扎什京 编著	
——等离子体的产生、工艺、问题及前景	邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿，韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪，魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 1 卷：基础理论	姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 2 卷：实验技术	姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海，杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	**H. 克莱纳特 著**	
	姜 颖 译	**2012.06**